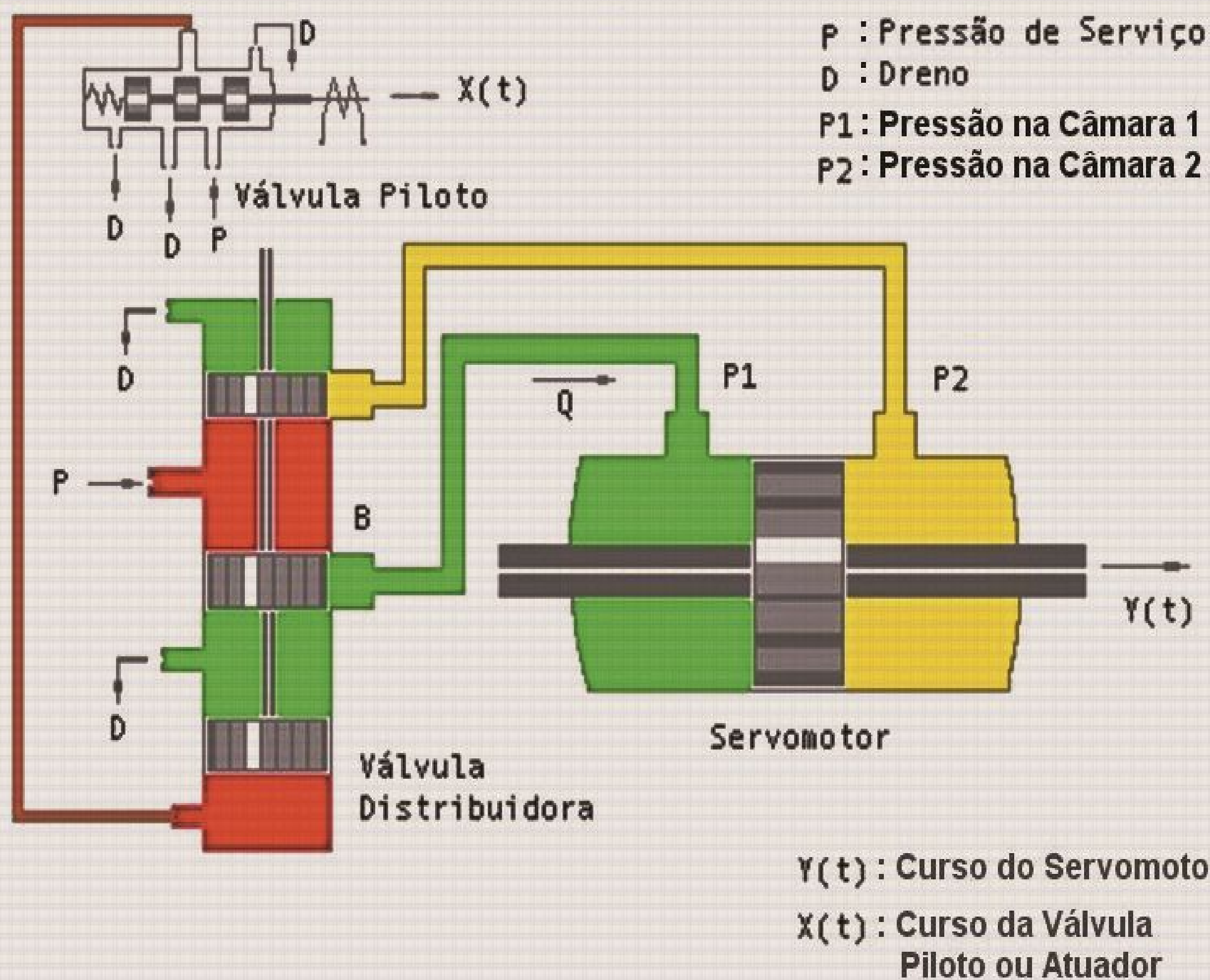



# Sistemas de Regulação e Controle Automático de Usinas de Energia Elétrica


**Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva**

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva

# Sistemas de Regulação e Controle Automático de Usinas de Energia Elétrica

4ª Edição
27/05/2019

BELO HORIZONTE
2018

Edição do Autor

## FICHA CATALOGRÁFICA

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva.
Sistemas de regulação e controle automático de usinas de energia elétrica [livro eletrônico] /Luiz Renato Gomes – Belo Horizonte: Cláudio Homero Ferreira da Silva,2018.

13,5 MB; e PUB.
ISBN 978-85-455271-0-7

1. Regulação de velocidade de turbinas hidráulicas 2. Regulação de tensão de máquinas síncronas energéticos. I. Gomes, Luiz Renato. II. Silva, Cláudio Homero Ferreira III.Título.

**CDD: 620**

*"A consecução da vida no universo material depende do concurso da energia que atua sobre a matéria, modificando-a e aplicando-a de modo seqüencial, dentro de uma relação de causa e efeito."*

# APRESENTAÇÃO

Genericamente, o modo de se fazer a avaliação do comportamento, ou melhor, o modo de se sentir o comportamento de um sistema de controle, em termos de estudo, é estabelecer uma série de análises em cima do modelo matemático desse sistema, tomando-se o devido cuidado de não mascarar os resultados com modelos não validados ou mesmo modelos genéricos e típicos apresentados em literatura técnica.

De posse dos resultados, seguem-se às análises que são caracterizadas como análises de estabilidade de sistemas, e são tais que, em função dos parâmetros utilizados na modelagem, certas raízes, solução da equação diferencial que rege fisicamente o modelo, são obtidas e delas pode-se observar o estado em que se encontra o sistema com relação ao que foi definido previamente como o desejado.

A partir deste estudo são fundamentadas otimizações, modificações construtivas do sistema, além de alterações e novas implementações de software e hardware em programas específicos. É claro que o programa de uma empresa produtora de energia é muito mais complexo que isso, pois envolve medições em tempo real, execução de programas de fluxo de carga, seguindo modelos de elevada precisão, sempre obedecendo aos preceitos da boa gestão de recursos.

A primeira conclusão que se pode tirar confere, aos campos da análise e estudo do controle da geração, certo rigor na compreensão matemática e física dos fenômenos, a ponto de se poder julgar quando um destes fenômenos é importante, ou quando outro pode ser desconsiderado da análise.

Com esse pensamento, a definição das variáveis mais importantes que interferem nas análises, bem como de todo o equacionamento num nível razoável de compreensão, na forma de um texto especial, foi o que motivou a elaboração deste trabalho. Aqui, os temas específicos, regulador de velocidade de turbinas hidráulicas e sistema de excitação de geradores síncronos, são examinados ora um ora outro ora ambos, interferindo mutuamente, num contexto da estabilidade operativa desse sistema.

Dentro deste simples trabalho, intitulado *SISTEMAS DE REGULAÇÃO E CONTROLE AUTOMÁTICO DE USINAS DE ENERGIA ELÉTRICA*, nos desenvolvimentos que se seguirão, serão abordados os equacionamentos básicos necessários ao entendimento dos principais componentes integrantes do sistema elétrico de potência considerando-se não só os aspectos particulares de cada componente como também as interações entre esses componentes para efeito de estudo e otimização.

Como o foco do trabalho está voltado para a área de regulação e controle automático, todo um subsídio teve de ser desenvolvido em função daquilo que a experiência tem demonstrado, qual seja, que neste campo a grande dificuldade vem sempre relacionada com o detalhamento dos modelos adotados para os diversos grupos envolvidos, as simulações desses modelos e o conseqüente trabalho de validação.

Deste modo, o desenvolvimento deste trabalho fica justificado dentro de suas proposições de criar uma base teórica na área tanto de controle e regulação de velocidade de turbinas hidráulicas quanto de controle e regulação de tensão de máquinas síncronas permitindo ao leitor ter a seu alcance uma obra de certa abrangência, de fácil assimilação e de aplicação prática.

# Sumário

# SIGLAS E LISTA DE VARIÁVEIS

COS : Centro de Operação do Sistema

ANEEL : Agência Nacional de Energia Elétrica

SIN : sistema interligado nacional

SEP : sistema elétrico de potência

FT ou ft : função de transferência no plano complexo de Laplace

ERAC : esquema regional de alívio e corte de cargas

SAGE : subsistema de alívio de geração

UHE : usina hidroelétrica ou usina hidrelétrica

UTE : usina termoelétrica ou usina termelétrica

SCILAB™ : Software Free Source SCILAB©, versão scilab - 4.1.1, Consortium Scilab (INRIA, ENPC), Institut Nationale de Researche em Informatique et en Automatique, French Government, Copyright (c) 1989-2007

FEM ou fem : força eletromotriz

FMM ou fmm : força magnetomotriz

LVDT : *linear voltage differential transformer*

ECA : erro de controle de área

CAG : controle automático da geração

LT : linha de transmissão

LI : linha de interligação

Cemig : Companhia Energética de Minas Gerais

Cesp : Companhia Energética de São Paulo

Copel : Companhia Paranaense de Energia

Ceee : Companhia Estadual de Energia Elétrica
Light : Light Serviços de Eletricidade

Cpfl : Companhia Paulista de Força e Luz

Furnas : Furnas Centrais Elétricas

Chesf : Companhia Hidrelétrica do São Francisco

Eletrosul: Eletrosul Centrais Elétricas

Eletronorte : Centrais Elétricas do Norte do Brasil

Itaipu: Itaipu Binacional Brasil - Paraguai

BEM : Boletim Energético Nacional

Controle Suplementar FF : Flat Frequency Control

Controle Suplementar FTL : Flat Tie Line Power

Controle Suplementar TLB : Tie Line Frequency Bias

P : proporcional

P I : proporcional-integral

PD : proporcional-derivativo

PID : proporcional-integral-derivativo

PMG : permanent magnetic generator

SCR : silicon controlled rectifiers

PSS : power system stabilizer

s/d : sem dimensão

CA : corrente alternada

CC : corrente contínua

BiBo : Bounded input – Bounded output

LQR : Linear Quadratic Regulator

MPC : Model Predictive Control

GCOI : Grupo Coordenador para Operação Interligada

# CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

## 1.1. Generalidades

Assim como ocorre em todos os sistemas automáticos de controle, um sistema elétrico de potência, ou SEP, também é regido por um conjunto de funções que transferem determinados sinais de entrada, ou de excitação, em outros sinais de saída, ou de resposta, que são otimizados por intermédio dos chamados parâmetros que nada mais são que constantes especiais envolvendo a planta física do sistema.

Quando se fala em controle de geração de um sistema composto apenas de uma turbina, de um gerador síncrono e de uma carga local, percebe-se que o desempenho deste mesmo sistema se prende dentro de certos condicionamentos que são determinados pelo próprio equipamento em si não havendo interação externa com outros sistemas. Em síntese, o sistema aqui descrito, trata-se de um sistema isolado.

Em se pensando num grupo de sistemas análogos, interligados, e, às vezes, bem mais complexos que o simples sistema mencionado anteriormente, percebe-se como o grau de dificuldade foi alterado.

Em termos de condicionamentos, ou restrições operativas impostas pelo sistema interligado, operações do tipo *on-line* e operações do tipo *off-line* acabam por interferir no grau de dificuldade que, para o sistema mais complexo, se torna mais restritivo quando comparado com o grau de dificuldade observado naquele sistema mais simples que foi abordado.

A partir de determinado ponto da análise, uma nova variável entra em consideração, trata-se da confiabilidade. A confiabilidade operativa de um determinado sistema é uma questão de compromisso – *commitment*. A confiabilidade operativa de um sistema elétrico de potência tem a ver com suprimento, capacidade e segurança.

A característica do bom desempenho operativo, deste modo, fica agora associada à confiabilidade operativa sendo que, hoje em dia, um forte compromisso assumido entre as empresas de energia elétrica e os órgãos reguladores do poder concedente menciona o cumprimento de tarefas específicas reforçando a necessidade de um trabalho contínuo de supervisão e controle das diferentes estações interligadas.

Dentro do elenco de responsabilidades encontram-se ações que tornam mais sólida a importância de um planejamento estratégico em que não só os aspectos hídricos têm relevância, mas também seus aspectos impactantes adicionais tais como o meio ambiente envolvido, o meio social, o custo marginal da energia a ser distribuída, entre outros.

Deste modo, fica evidente a questão da qualidade exigida pelo controle geral de todos esses aspectos cuja principal meta é atender, da melhor maneira possível, a demanda energética exigida.

Dentre todas estas questões, cuja abordagem já parece sacramentada para a maioria dos gestores, há uma preocupação muito grande com a implantação do

controle supervisório e da automação das centrais elétricas. Essa abordagem, de caráter mais centralizado, tem como principal objetivo o telecontrole e a telemedição, em tempo real, das estações elétricas operando sob o teto de uma determinada área geradora do tipo piloto (*).
É neste particular que a mencionada qualidade do controle de geração tem fundamentado suas necessidades e garantias. Portanto, aquilo que se fizer em prol da otimização do controle automático dos SEPs terá efeito positivo na manutenção da qualidade no processo de suprimento da energia, de uma maneira geral.

## 1.2. Regulação e Controle Automático

O processo, tanto de regulação de velocidade e controle de potência ativa quanto o de regulação de tensão e controle de potência reativa de instalações geradoras de energia elétrica, em geral, pode ser entendido como um processo mais simples de controle da corrente de excitação que deve ser aplicada ao campo da máquina no sentido de alimentar e manter a presença de um fluxo magnético, contínuo, a varrer todo o espaço confinado do estator, enquanto o movimento de rotação é mantido pela fonte primária de geração mecânica.
Deste modo, o estudo da regulação de velocidade de turbinas hidráulicas e da regulação de tensão de máquinas síncronas, trata-se de um tema dentro da área da Engenharia ligada á teoria de controle automático.
Quando se estuda o problema da estabilidade dos SEPs, são focados tanto o sistema de regulação de velocidade quanto o sistema de regulação de tensão. Existe certa analogia entre esses dois sistemas, mas cada um deles tem o seu próprio modo operativo de funcionamento. São sistemas de controle semelhantes, porém operam em campos distintos com tempos de resposta distintos e particularidades que caracterizam cada um deles.
O sistema de regulação de velocidade, basicamente, tem por finalidade garantir que a rotação mecânica e, por conseguinte, a rotação elétrica da máquina, seja mantida em um valor fixo conhecido por nominal ou de referência.
Quanto ao sistema de regulação de tensão, que também é conhecido como sistema de excitação, as particularidades verificadas são tão importantes ou complexas quanto aquelas englobadas pelo sistema de regulação de velocidade, apenas que o foco é a máquina síncrona, ou melhor, a parte elétrica do conjunto turbina-gerador.
Para o estabelecimento do estudo do processo de regulação há necessidade de se trabalhar com modelagem tanto da parte da máquina elétrica como também da parte da máquina mecânica.
Para que seja possível o desenvolvimento do estudo é necessário lançar mão dos fundamentos da física aplicados tanto à parte mecânica, quando são focados a turbina e o regulador de velocidade, quanto à parte elétrica, quando são focados a máquina síncrona e o sistema de excitação.
Em relação a técnicas disponíveis, voltadas para a análise do comportamento operativo de sistemas de controle, vale dizer que alguns autores defendem a

* Entender por área geradora qualquer empresa produtora de energia elétrica dentre os agentes.

idéia de que a análise clássica e a utilização de controladores automáticos do tipo PID – Proporcional integral Derivativo – são suficientes para a solução do problema do controle automático e isso pode ser conferido no campo onde a extensa maioria dos controladores é mesmo desse tipo. Ainda assim, existem outras técnicas tais como a técnica do controle moderno via realimentação de estado, ou mesmo a técnica do MPC – *Model Predictive Control* – ou de controladores preditivos baseados em modelos. Há métodos em que não se utiliza da técnica da realimentação de estado em tempo passado, mais conhecida como *feed back*, mas sim da técnica da realimentação de tempo futuro também conhecida como *feed forward*. Essas técnicas exploram aquilo que se chama de modelagem no plano de estados sendo a abordagem matricial a principal característica dessa metodologia. A técnica da abordagem através de variáveis de estado será explorada mais à frente durante o processo de análise de estabilidade da planta completa de uma típica instalação de hidreletricidade. Enfim, estudar o comportamento de um sistema, a luz da teoria de controle, nada mais é que estudar os limites de estabilidade operativa a que fica sujeito esse mesmo sistema sob a ação de determinados condicionamentos.

## 1.3. A Questão da Modelagem

Basicamente a modelagem de um sistema sempre considera o modelo matemático que rege tal sistema.
Normalmente, trata-se da manipulação de equações diferenciais para modelos na matemática ordinária ou equações de estado para modelos dentro da matemática matricial.
O processo de regulação de sistemas automáticos, assim como qualquer outro processo de controle automatizado, requer que se trabalhe em cima de modelos. Os modelos, via de regra, são sempre uma imagem daquilo que se quer ter como objeto de estudo e essa condição acaba sendo uma aspiração que muitas vezes foge da realidade da planta, daquilo que o próprio modelo em si quer retratar.
A questão da modelagem ou da aplicação do modelo matemático representativo de sistemas tem a ver com o perfeito conhecimento das chamadas funções de transferências ou apenas FTs. As FTs são formas de representação, universalmente conhecidas, nas quais, a partir de equações diferenciais ordinárias, é possível afigurar a dinâmica operativa de um determinado sistema, e onde se pode trabalhar com um esquema da forma entrada-saída.
O estabelecimento dessa modelagem se baseia nas chamadas transformadas de Laplace e busca estabelecer a representação da dinâmica dos sistemas físicos por meio de funções lineares ordinárias sempre a partir das equações diferenciais.
A análise no plano do domínio temporal consiste em solucionar uma equação diferencial às vezes com funções complexas enquanto que no plano do domínio da transformada de Laplace a análise normalmente se dará sobre uma equação algébrica.
A representação na forma de modelagem apresenta uma série de vantagens que pode ser resumida da seguinte lista:

a) sistemas da área de engenharia e suas simulações são freqüentemente lineares pelo menos dentro de certos limites;

b) a solução exata para as equações associadas a sistemas lineares é fácil de ser encontrada;

c) existem métodos especiais de alta fidelidade para simulação de sistemas lineares;

d) sistemas lineares fornecem um bom sentimento para perturbações verificadas em sistemas não lineares.

Em termos da técnica de aplicação das FTs, com a utilização da transformação de Laplace, conseguem-se o seguinte:

a) transformação de funções periódicas, com um número finito de descontinuidades, em simples expressões algébricas;

b) transformação de operações de integração e de derivação no domínio do tempo em operações de multiplicação e de divisão no domínio da freqüência ou no plano complexo;

c) transformação de equações diferenciais complexas em simples equações algébricas;

d) a determinação rápida das constantes arbitrárias das soluções das equações diferenciais;

e) fácil consulta por apresentar farta documentação literária.

Existem várias técnicas e todas elas buscam tornar a representação o mais fiel possível da realidade. Trabalhar com um modelo perfeito, porém, bem se sabe ser uma impossibilidade. O mais importante do modelo é representar aquilo que o escopo do estudo definiu como limite, tomando-se o devido cuidado de não extrapolar o próprio limite do modelo, o que fatalmente levaria a resultados errôneos quando não raro paradoxais.
O mais importante é conhecer os modos de oscilação para os quais o modelo, objeto de estudo, é analisado procurando adotar esse critério como limite operativo da aplicação da modelagem.
Outro fator importante será a escolha do método de integração quando houver necessidade de se trabalhar com a matemática numérica. Uma boa política é a utilização do método mais simples comparando posteriormente os resultados com métodos mais sofisticados para ver se houve alguma divergência. Nesses casos, simples ajustes resolverão o problema.
Um modelo não retrata toda dinâmica do caso real, é claro, por isso deve-se atentar para os erros matemáticos tanto no início quanto no final das simulações, caso estas forem utilizadas. Erros matemáticos de simulação podem facilmente ser interpretados como situações reais culminando com falsas conclusões.

Também deverá ser considerado muito importante o tratamento das não linearidades que existem sempre nos casos reais e que, na grande maioria das vezes, ou não são representadas nos modelos ou são esquecidas durante o processo de montagem da modelagem para estudo.
Por fim, ter sempre em mente que todo processo de simulação é uma operação matemática, antes de tudo, e que erros de interpretação poderão existir, os chamados erros de programa, ou aqueles erros originários das próprias operações matemáticas como, por exemplo, a questão da presença de *wind-up*, situações tais que alteram completamente a resposta real do modelo.
Outro erro muito comum em simulações, utilizando técnicas discretas ou numéricas, é desconsideração da importância dos procedimentos de fecha malha nas representações de sistemas com realimentação que tendem a reduzir o valor real das constantes de tempos envolvidas na malha principal na proporção inversa do valor dos ganhos do canal direto. Nestes casos, deve-se conhecer perfeitamente que nível de valores tais constantes de tempos vão atingir para que não se perca significação durante os estudos de casos simulados. Em resumo, ao se tratar com estudos e análises provenientes da representação de sistemas de regulação, por intermédio de técnicas de modelagem, buscar compreender tanto a sistemática quanto a dinâmica real dos processos por ora focados. O sucesso nas análises de sistemas utilizando técnicas de modelagem depende diretamente do prévio conhecimento da dinâmica do processo a ser estudado via modelagem.
Enfim, como já foi dito antes, o modo de se avaliar a qualidade operativa de um dispositivo de controle é avaliar o comportamento desse sistema, estabelecendo uma série de análises em cima de um modelo matemático disponível para tal.
Nestas análises, são inspecionadas as raízes obtidas da solução da equação diferencial que rege fisicamente o modelo, em função dos parâmetros utilizados na modelagem, sendo o caminho mais rápido a implementação de estudos de simulação que normalmente são realizados com o adjutório da computação digital.
Os modelos, via de regra, dependem fundamentalmente de oito pontos básicos que podem representar uma linha entre o sucesso e o insucesso ao se lidar com modelagem de sistemas. São eles:

a) a perfeita identificação do que se pretende em termos de modelagem com a identificação clara das variáveis de entrada e de saída do processo;

b) a obtenção de toda a documentação técnica envolvida nas etapas da vida operativa do sistema tais como, etapa de comissionamento, entrada em operação, histórico operativo e histórico de manutenção;

c) a correta utilização das leis físicas a serem aplicadas ao problema;

d) o estabelecimento de hipóteses simplificadoras realistas;

e) o não abuso na utilização dessas hipóteses que quase sempre são empregadas no sentido de reduzir o volume de trabalho;

f) a consideração de todas as partes físicas envolvidas no processo, mesmo aquelas que, por ventura, estejam em situação de *by pass* naquele momento;

g) a promoção dos devidos cálculos, ensaios e levantamentos visando a obtenção de dados para a composição do modelo;

h) a validação final.

A validação final será obrigatória. Como se sabe, a resposta obtida através de um modelo será, na melhor das hipóteses, uma aproximação do comportamento do sistema real. Com isso, caberá um julgamento técnico de avaliação visando à aprovação do modelo.
A melhor maneira será mesmo a simulação computacional amparada posteriormente por resultados preliminares de ensaios especiais na planta, sob condições, se não próximas, pelo menos dentro da faixa operativa do processo.
Estar ciente de que, em muitas instalações de potência, operações caracterizadas por baixa carga ou baixo carregamento muitas vezes ficam bem fora da região de linearidade adotada para a modelagem.
Lembra-se, ainda, que a modelagem de sistemas físicos reais é demorada e dispendiosa resultando num trabalho árduo e difícil.
Deve-se, portanto, otimizar ao máximo as atividades envolvidas através da utilização de um plano de trabalho que seja, acima de tudo, exeqüível e factível.

## 1.4. Regulador de Velocidade

Em linhas gerais, o sistema regulador de velocidade é composto de dois grupos distintos de componentes físicos, um eletro-eletrônico e outro mecânico-hidráulico – isso quando se restringe a análise aos reguladores mais modernos – não se esquecendo de que ainda se encontram em funcionamento alguns reguladores puramente mecânicos e outros mecânico-hidráulicos. Da parte eletro-eletrônica distingue-se o próprio regulador em si junto com todos os seus componentes tais como os transdutores, os circuitos de comando, controle, limitação e supervisão. Da parte mecânico-hidráulica são percebidos o *sumptank*, as válvulas, o sistema de ar e óleo sob pressão, os servomotores, os aros de regulação e as palhetas do distribuidor que controlam o fluxo d'água que será aplicado contra as pás do rotor da turbina.
Quando se fala em sistema regulador de velocidade, o foco principal se concentra no comportamento do regulador de velocidade em si. Por outro lado, independente disso, outras questões acabam sendo levadas em conta, uma vez que o regulador de velocidade se vê envolvido com tais questões que, via de regra, poderiam ser omitidas, mas que na realidade são emergentes e atuantes. Questões tais como a influência da rede elétrica e a influência da carga elétrica são fatores fundamentais que afetam diretamente o comportamento operativo desse importante órgão de controle. Também é de grande importância a influência dos efeitos das inércias tanto do conjunto girante quanto da massa d'água contida na tubulação forçada, massa essa responsável pela energia motriz que toca a turbina. Ao se tratar com tais

questões, o estudo torna-se mais amplo e complexo, do ponto de vista da operação interligada.
Sendo assim, o que se observa, num plano mais abrangente, é o aspecto qualitativo do controle no sentido de se conhecer o comportamento destes fatores relevantes, que devem ser respeitados e otimizados. Considerando-se esses fatores, o sistema regulador de velocidade deverá estar sempre apto a atender qualquer solicitação de imediato.
É neste particular que a qualidade dos serviços ligados ao processo de controle da geração tem seus principais aspectos evidenciados e, como o controle de geração passa obrigatoriamente pelo sistema regulador de velocidade, fica evidente a importância de se ter esse dispositivo sempre operando adequadamente.
Nesse trabalho, a ênfase será dada ao estudo do comportamento do regulador de velocidade associado ao controle da turbina e de toda a massa girante com a interferência direta no fluxo da potência ativa no sistema de transmissão.
Outro aspecto relevante que deve ser citado é que o regulador de velocidade, muito antes de ser um órgão de controle automático, apresenta importantes funções de comando de partida e sincronização de máquina, bem como o de proteção, uma vez que ele é o último dispositivo físico responsável por garantir o fechamento de emergência, sustando o fluxo d'água motriz, nas ocorrências envolvendo rejeição de carga cujos comandos podem ser originários do sistema de proteção da máquina principal. Em última instância, o regulador de velocidade pode ser encarado como um dispositivo de proteção.

## 1.5. A Turbina Hidráulica

A turbina, num processo de geração de energia, ou melhor, num processo de conversão de um tipo de energia mecânica motriz em energia elétrica, trata-se daquilo que se conhece por órgão motriz primário ou *prime mover*.
Como o presente trabalho versa sobre a hidreletricidade ou hidroeletricidade, é certo se tratar aqui da turbina hidráulica.
Quanto ao tipo de turbina, a regulação de velocidade pode ser classificada como sendo regulação simples, quando a turbina for do tipo Francis, Pelton sem controle de jato, ou do tipo hélice; ou então regulação dupla, quando a turbina for tipo Pelton com controle de jato, ou tipo Kaplan, com controle das pás do rotor.
Na regulação simples, o controle se encerra com a regulação das palhetas do distribuidor, pois até ali se consegue o desejado, porém existem turbinas que, além da regulação das palhetas, devem-se associar a esta e ao nível de água da instalação, o controle da posição das pás do rotor, surgindo o que se chama de regulação dupla.
Este procedimento tem por finalidade obter o máximo de rendimento da turbina evitando a perda de energia, fato conseguido trabalhando-se com duas variáveis, a abertura do distribuidor *versus* a posição das pás do rotor ou a abertura do distribuidor *versus* agulhas do injetor, dispositivos extras disponibilizados para turbinas do tipo Kaplan e do tipo Pelton, respectivamente.
Com esse recurso, consegue-se trabalhar a questão queda líquida útil *versus* potência deliberada pela turbina.

No processo de estudo e representação matemática, será utilizado o equacionamento básico de uma turbina genérica, uma máquina de fluxo do tipo reação cuja alimentação hidráulica se dá através de uma tubulação que pode ser adotada sob duas condições, uma tubulação elástica onde o efeito da compressibilidade da água é considerado, e outra mais simples, uma tubulação inelástica cujo efeito da compressibilidade da água é desprezado.
Lembrando que as máquinas de fluxo do tipo reação são aquelas em que o trabalho resultante é conseguido a partir das energias cinética e de pressão da água, em processo de escoamento, através de uma tubulação que conduz o fluxo na direção do órgão motriz, também chamado de rotor da turbina, enquanto que as máquinas de fluxo do tipo ação são aquelas que o trabalho resultante é conseguido a partir apenas da energia cinética da água, em processo de escoamento. De maneira geral, exemplos de turbinas de reação são as turbinas do tipo Francis, Kaplan ou hélice, e exemplos de turbinas de ação são as turbinas do tipo Pelton.

## 1.6. Regulador de Tensão ou Sistema de Excitação

Basicamente, o sistema de excitação se compõe do grupo formado pelo regulador de tensão e todos os seus componentes tais como os transdutores, os circuitos de comando, controle e limitação, retificação, transformador de excitação, sistema de proteção incorporado, PSS, disjuntor de campo e cabos.
Através do sistema de excitação são controlados os níveis de corrente e de tensão de excitação que serão aplicados ao campo da máquina síncrona principal.
O controle da excitação permite o controle tanto dos níveis da tensão terminal quanto do fluxo da potência reativa envolvida no processo entre a máquina e o sistema.
Via de regra, existem 2 tipos principais de sistemas de excitação conforme o circuito de potência a ser empregado na montagem que alimentará o campo principal da máquina primária: o sistema clássico caracterizado pela presença de excitatrizes rotativas compostas de máquinas de CC nas suas mais variadas configurações, projetos mais antigos, e o sistema de excitação estática, formado por pontes de retificação montadas a partir de elementos do tipo SCR ou *Silicon Controlled Retifier* mais conhecidos como tiristores, projetos mais recentes.
O sistema de excitação de uma máquina síncrona apresenta determinados dispositivos conhecidos como limitadores cujo número e o tipo podem variar, ligeiramente, de fabricante para fabricante, conforme a filosofia adotada.
Tais dispositivos apresentam a função de proteger a máquina elétrica de modo a garantir que ela permaneça operando dentro dos limites impostos por sua curva de capacidade ou de capabilidade.
Normalmente, o que se nota são os seguintes dispositivos limitadores cuja implementação também depende do arranjo adotado por fabricantes, dependendo do projeto: Assim podem-se notar:

a) limitador de subexcitação cuja função é não permitir a operação da máquina aquém dos limites de mínima excitação evitando com isso uma possível perda

de estabilidade pelo enfraquecimento do enlace magnético do fluxo nas cabeças polares;

b) limitador de sobrexcitação cuja função é não permitir a operação da máquina além dos limites de máxima excitação evitando com isso um possível dano nos enrolamentos de campo por sobreaquecimento;

c) limitador de Volts por Hertz cuja função é monitorar, de modo contínuo, a relação instantânea entre o módulo da tensão terminal da máquina e o valor da freqüência de rotação desta buscando evitar o conhecido fenômeno do sobrefluxo que gera sobretensão podendo trazer conseqüências danosas para o transformador elevador de saída;

d) limitador de corrente do gerador cuja função é não permitir que o valor de corrente de saída do estator da máquina não ultrapasse os valores limites evitando com isso um possível dano nos enrolamentos de saída por sobreaquecimento.

Também no sistema de excitação pode ser observada a presença de um dispositivo de controle conhecido na língua inglesa pela sigla PSS, ou seja, *Power System Stabilizer*. Na língua portuguesa este dispositivo é apelidado apenas por estabilizador de potência. Trata-se de um dispositivo compensador, de atuação transitória, cuja principal função é corrigir o atraso existente na malha de controle do sistema de excitação de modo a melhorar a condição de amortecimento, um problema existente indesejável e verificado, principalmente, em ocorrências sistêmicas tanto locais quanto inter-áreas de geração. Esses fenômenos também são observados nas operações de tomada e de retirada de carga local. Mais à frente esse assunto será debatido com mais profundidade.

## 1.7. A Máquina Síncrona

As máquinas síncronas apresentam certas particularidades necessárias ao perfeito controle operativo do sistema elétrico interligado síncrono.
O sistema elétrico é dito síncrono, não porque opera com um valor fixo de freqüência, – no caso brasileiro seria 60 Hz esse valor – mas porque ele opera sob um mesmo valor em regime permanente, mesmo sendo esse valor diferente de 60 Hz. Essa situação pode ocorrer sob condições extremas do tipo pós-ocorrência envolvendo a perda de grandes blocos de geração ou então com a saída de grandes blocos de carga.
Com relação às máquinas assíncronas ou máquinas de indução, principais concorrentes das máquinas síncronas, podem-se afirmar:

a) que, em função de as máquinas assíncronas trabalharem com escorregamento entre rotação do fluxo magnético e rotação mecânica, os controles de freqüência e tensão, em relação à operação isolada com geradores de indução, são impraticáveis;

b) que as máquinas síncronas, quando operam como gerador, podem fornecer, ao mesmo tempo, potência ativa e potência reativa, fato não verificado com os

geradores assíncronos que fornecem apenas potência ativa, continuando a consumir potência reativa;

c) que um gerador assíncrono consumiria uma potência externa de aproximadamente 40% de sua potência nominal no processo de excitação o que inviabilizaria sua utilização já que o processo de excitação de um gerador síncrono exige apenas uma potência da ordem de 1% ou menos de sua potência nominal;

d) que a operação de motores assíncronos de grande porte, interconectados ao sistema síncrono interligado, é limitada uma vez que para esta operação o consumo de reativo será dispendioso exigindo a instalação de dispositivos compensadores junto desses motores.

Tais condições serão melhor esclarecidas no decorrer do capítulo envolvendo o sistema de excitação.

O emprego das máquinas síncronas tem tudo a ver com a capacidade desse tipo de máquina elétrica gerar potências ativa e reativa conforme a necessidade da demanda. As máquinas síncronas também permitem um perfeito controle do fluxo da potência reativa ora gerando ora absorvendo esse fluxo em função do carregamento. Durante o período diário da operação interligada, é sabido que existem, basicamente, dois horários em que a demanda por potência implica em diferentes tipos de atendimento, quais sejam, o horário de carga pesada, também conhecido como horário de ponta, e o horário de carga leve. O horário de carga pesada se caracteriza por ser aquele período, teoricamente entre as 16 e 22 horas, no qual o sistema exige grande aporte de fluxo de potência, tanto ativa quanto reativa, pois é o período em que a demanda é elevada e a carga, de maneira geral, puxa tanto potência ativa quanto potência reativa. Ao contrário, o horário de carga leve é aquele em que a demanda é baixa, normalmente de madrugada, período em que ocorre o fenômeno da sobretensão de modo que há necessidade de que as máquinas absorvam a potência reativa existente. Nesse particular, o trabalho é feito no sentido de minimizar o conhecido efeito magnetizante dos geradores síncronos caracterizado pela presença de sobretensão, o que pode vir a provocar danos à integridade da máquina.

Em algumas instalações, a situação do controle, principalmente da tensão, é tão restritivo que se justifica a utilização de recursos tais como o uso de grandes motores síncronos operando em vazio ou mesmo de geradores síncronos dotados da possibilidade de operarem como motor síncrono em vazio através do procedimento de conversão-reversão nas condições motor e gerador ou então a instalação de compensadores estáticos na forma de bancos de capacitores ou mesmo a instalação de reatores. Tais situações apenas confirmam a condição e a importância das máquinas síncronas, um tipo específico de máquina elétrica utilizado nas instalações geradoras de energia elétrica tanto na condição operativa de gerador síncrono quanto na condição especial de motor síncrono em vazio.

É bom lembrar que, nos projetos mais recentes de usinas hidrelétricas, têm sido contemplados aqueles projetos que apresentam simultaneamente as duas condições operativas das máquinas síncronas, quais sejam, a condição normal

operativa como gerador síncrono e a condição especial operativa como motor síncrono. Hoje em dia, tem-se visto a implementação desse tipo de construção de geradores em instalações elétricas tanto na rede básica quanto nos sistemas de 138 kV.
Como o estudo a ser aqui desenvolvido envolve-se com a questão da modelagem, é importante frisar que, para a máquina síncrona, vários são os modelos disponíveis de modo que durante a representação matemática para estudo e análise, modelos clássicos de máquina apresentados na referência 1 são largamente utilizados. Mesmo assim, na particularidade, o modelo desenvolvido na referência 14 será utilizado em algumas simulações com os seus resultados devidamente validados a partir de ensaios de campo.
Nesses modelos, a transformação de variáveis a ser adotada para a formulação matemática da máquina síncrona será a transformação de Blondel, também conhecida por outros nomes como de Park, de Doherty, de Nickle e de outros, conforme referência 5. Trata-se de uma transformação ortogonal de variáveis principais da máquina síncrona que permite o estabelecimento de uma modelagem adequada para os fins do presente trabalho.

## 1.8. Questões Sobre Estabilidade Operativa dos SEPs

Esse assunto também é conhecido como estabilidade de sistemas de potência, tema título de várias obras na área de controle dos SEPs.
Existem vários conceitos de estabilidade, porém o mais simples é aquele que diz ser a estabilidade de um sistema a capacidade deste permanecer em equilíbrio operativo, ou em sincronismo, enquanto ocorrerem perturbações sobre este mesmo sistema.
Em termos de SEPs, podem-se definir três tipos ou três estágios de regime operativo que impactam diretamente na estabilidade da continuidade dos serviços. São eles:

a) a estabilidade em regime permanente;

b) a estabilidade transitória;

c) estabilidade dinâmica.

A despeito de um determinado sistema ter sido submetido ou não a ação de ocorrências que possam ter lugar, tanto no modo local quanto no modo inter-áreas, o certo é que se forem observadas as respostas provenientes desse mesmo sistema, esses três regimes operativos listados serão percebidos. A palavra modo tem aqui o significado de âmbito, mesmo sabendo que essas duas palavras não são sinônimas.
A palavra modo, matematicamente, tem a ver com a chamada análise modal que foca o estudo sobre as principais freqüências de oscilação, características próprias dos sistemas físicos, cuja identificação permite o conhecimento da forma como tais sistemas irão responder às solicitações externas. O conhecimento desses modos de oscilação podem também propiciar o conhecimento intrínseco da dinâmica dos sistemas onde se fala em freqüência

de ressonância, em freqüência natural amortecida, em freqüência natural não-amortecida, etc.
É importante frisar que estudos nesse sentido sempre se baseiam na modelagem da planta física, ou seja, na modelagem representativa dos sistemas físicos.
Voltando a questão dos regimes operativos que são vistos nos SEPs, a seguinte conceituação pode ser apresentada:

a) Estabilidade em Regime Permanente

Refere-se à condição operativa quando o sistema está sujeito a pequenas variações de carga, sem oscilações prolongadas, com possíveis atuações do regulador de velocidade e/ou do regulador de tensão.
Este regime operativo se caracteriza pela manutenção do sincronismo entre as estações geradoras e manutenção da interligação entre as linhas de transmissão.
A característica básica do regime permanente é manutenção do sincronismo do SEP.

b) Estabilidade Transitória

Refere-se à condição operativa quando o sistema está sujeito a grandes distúrbios caracterizando um forte impacto com a saída e/ou entrada de grandes blocos de geração.
Nesta condição operativa os reguladores de velocidade e de tensão podem não conseguir manter a estabilidade e mesmo os estabilizadores de potência podem também não contribuir para a estabilização. Há casos em que os ERACs entram em operação. Pode ocorrer sobrefreqüência ou subfreqüência. Em alguns casos, o sistema torna-se instável logo após a atuação dos reguladores de velocidade o que caracteriza ajustes inadequados dos órgãos de controle automático.
A característica básica do regime transitório é fazer com que o SEP permaneça em sincronismo.

c) Estabilidade Dinâmica

Refere-se à condição operativa imediatamente após o sistema ter estado sujeito a um distúrbio de grande impacto.
Um forte impacto como a saída e/ou entrada de grandes blocos de geração tem a ver com esta condição operativa.
Normalmente, o que se percebe é atuação dos reguladores de velocidade com oscilações mais lentas e demoradas. Se houver a presença de oscilações sustentadas, por longos períodos, pode haver instabilidade por diversos fatores que acabam sendo envolvidos. Essa situação, via de regra, encontra-se ligada ao conhecido fenômeno do baixo amortecimento na área sob controle. Esse problema pode se tornar crítico levando o sistema a um *blackout*. Esse assunto será abordado com certa ênfase, mais à frente, na parte relativa ao sistema de excitação.
Característica básica do regime dinâmico é garantir que o sincronismo do SEP seja mantido logo após o primeiro ciclo da oscilação transitória.

# CAPÍTULO 2

# SISTEMAS DE REGULAÇÃO E CONTROLE AUTOMÁTICO

## 2.1. Revisão de Equação Diferencial

Equações diferenciais nada mais são que uma forma de representação, ou de modelagem, de estruturas físicas para que se possa estudar e analisar algum tipo de sistema no plano teórico. Essa representação através de equações diferenciais também é caracterizada por serem eleitas equações diferenciais lineares, muito embora a matemática numérica permita a extensão dos procedimentos, com boa precisão, aos casos envolvendo equações diferenciais não lineares.
Uma equação diferencial se distingue pela presença de derivadas de certas variáveis, chamadas de variáveis dependentes, com relação a outras variáveis chamadas de variáveis independentes.
Geralmente, nos sistemas físicos, é comum as equações diferenciais conterem derivadas de variáveis ordinárias físicas, tais como distância, velocidade, volume, carga elétrica entre outras, em relação a variável independente do tempo ou temporal.

### 2.1.1. Condição de Linearidade

A modelagem linear de sistemas é importante por quatro razões básicas, a saber:

a) sistemas da área de Engenharia são freqüentemente representados por sistemas de equações lineares, pelo menos dentro de certos limites;

b) a solução exata para as equações associadas a sistemas lineares é fácil de ser encontrada;

c) existem métodos especiais de alta fidelidade para simulação de sistemas lineares;

d) sistemas lineares fornecem um bom sentimento para perturbações verificadas em sistemas não lineares.

Supondo-se que uma função forçante $f_1(t)$, que varia no domínio do tempo, produza uma resposta $r_1(t)$ e que uma segunda função forçante $f_2(t)$, nas mesmas condições, produza uma segunda resposta $r_2(t)$.

Pode-se então escrever que:

$$f_1(t) \rightarrow r_1(t)$$

$$f_2(t) \rightarrow r_2(t)$$

Para um sistema linear será obrigatória a seguinte relação:

$$f_1(t) + f_2(t) \rightarrow r_1(t) + r_2(t) \quad (2.1)$$

A equação 2.1 representa, matematicamente, aquilo que é chamado de princípio da superposição, uma das condições da linearidade.

Corolário Relativo ao Princípio da Superposição

a) nenhuma função forçante afetará a resposta de outra função forçante;

b) a combinação das respostas de cada função forçante determinará a resposta total do sistema.

Sistemas lineares são aqueles cuja dinâmica é modelada, ou retratada, através de equações que podem ser algébricas, lineares diferenciais ou derivativas ou de diferenças ou então a combinação destas.

Seja, por exemplo, a equação diferencial seguinte:

$$a_2 \frac{d^2 r}{dt^2} + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 = f(t) \quad (2.2)$$

Na equação 2.2 considerar *t* a variável independente, *f* a função de excitação e *r* a resposta.
Os coeficientes $a_0$, $a_1$, $a_2$, são parâmetros que podem ou não variar no domínio do tempo.
A equação 2.2 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem porque não envolve diferenciais parciais e o termo ordinário de maior ordem na derivada é de ordem dois.
Notar também que a equação 2.2 é linear pelas seguintes afirmações:

a) nem a variável dependente *r* nem suas derivadas apresentam potências acima da unidade

b) nenhum dos termos contém produtos de duas ou mais derivadas da mesma variável dependente ou produtos da variável dependente.

Pelo princípio da superposição tem-se:

$$a_2 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + a_1 \frac{dr_1}{dt} + a_0 r_1 = f_1 \quad (2.3)$$

$$a_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} + a_1 \frac{dr_2}{dt} + a_0 r_2 = f_2 \qquad (2.4)$$

Somando-se as equações 2.3 e 2.4 vem:

$$a_2 \frac{d^2 (r_1 + r_2)}{dt^2} + a_1 \frac{d(r_1 + r_2)}{dt} + a_0 (r_1 + r_2) = f_1 + f_2$$

### 2.1.2. Solução de Equações Diferenciais

A modelagem linear de sistemas é importante por quatro razões básicas, a
Uma equação diferencial linear ordinária de ordem $n$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n(t) \frac{d^n(r)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}(r)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0(t) r(t) = f(t) \qquad (2.5)$$

Na equação 2.5, os coeficientes e a função forçante variam no domínio do tempo.

Quando a função forçante $f(t)$ é igual a zero, a equação diferencial 2.5 é dita homogênea caso contrário é chamada de não homogênea.
A referência 17 define que:

$$\phi(r) = f \qquad (2.6)$$

com

Aqui, $\phi$ tomou a condição de um operador. Através desta implementação, será possível a análise de algumas propriedades das equações diferenciais do seguinte modo:

a) multiplicando-se a variável dependente $r$ por uma constante $k$, multiplica-se cada termo da equação por esta mesma equação, ou melhor:

$$\phi(Kr) = k\,\phi(r) \qquad (2.7)$$

b) mudando a variável dependente r para $r_1 + r_2$, onde tanto como são linearmente independentes, escreve-se:

$$\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1) + \phi(r_2) \qquad (2.8)$$

Para a condição homogênea tem-se:

$$\phi(r_1 + r_2) = 0 \quad \text{somente se} \quad \phi(r_1) = \phi(r_2) = 0$$

Observa-se que, se $r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)$ são linearmente independentes, a solução geral de $\phi(r) = 0$ também será uma combinação linear do tipo $c_1 r_1 + c_2 r_2 + \ldots + c_n r_n$ onde $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ são constantes arbitrárias.

c) a solução com $n$ constantes arbitrárias será a solução geral da equação homogênea desde que $r_1, r_2, ..., r_n$ sejam linearmente independente;

d) se $r_p$ é a solução particular de uma equação não homogênea tal que seja válida a operação $\phi(r_p) = f(t)$, então a solução completa será a soma desta solução particular com a solução complementar resultado da solução da equação homogênea quando se fez $f(t) = 0$.

Assim:

$$r(t) = r_c(t) + r_p(t) \tag{2.9}$$

e) a determinação das $n$ constantes arbitrárias referidas anteriormente deverá ser obtida via condições de contorno do problema ou do sistema em análise.

---

**<u>EXEMPLO 2.1</u>**

Encontrar a solução completa da seguinte equação diferencial de primeira ordem seguinte pelo método clássico no domínio do tempo.

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t) \tag{2.10}$$

**Solução:**

Sabe-se que para $g(t) = y\ \ t\ \ u\ \ t$ é possível que se escreva o seguinte:

$$\frac{dg}{dt} = y\frac{du}{dt} + u\frac{dy}{dt} \tag{2.11}$$

Multiplicando-se a equação 2.10 por u vem:

$$u\frac{dy}{dt} + ua(t)y = uf(t) \tag{2.12}$$

Comparando-se as equações 1.11 e 1.12 vem que:

$$\frac{du}{dt} = u\,a(t) \quad \therefore \quad \int \frac{du}{u} = \int a(t)dt$$

$$ln\frac{u}{c}=\int a(t)dt \quad \therefore \quad u=ce^{\int a(t)dt} \tag{2.13}$$

mas

$$\frac{d(yu)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[yc\,e^{\int a(t)dt}\right]=yc\,a(t)e^{\int a(t)dt}+c\,e^{\int a(t)dt}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d(yu)}{dt}=yc\,a(t)e^{\int a(t)dt}+c\,e^{\int a(t)dt}\left[\frac{dy}{dt}\right] \tag{2.14}$$

Da equação 2.10 tira-se o valor de $\frac{dy}{dt}$.

Assim:

$$\frac{dy}{dt}=f(t)-y\,a(t) \tag{2.15}$$

Levando-se o valor $\frac{dy}{dt}$ da equação 2.15 na equação 2.14 vem:

$$\frac{d(yu)}{dt}=yc\,a(t)e^{\int a(t)dt}+c\,e^{\int a(t)dt}\left[f(t)-y\,a(t)\right]$$

$$\frac{d(yu)}{dt}=yc\,a(t)e^{\int a(t)dt}+c\,e^{\int a(t)dt}f(t)-c\,e^{\int a(t)dt}y\,a(t)=c\,e^{\int a(t)dt}f(t)$$

ou integrando-se a equação anterior vem :

$$y=\frac{1}{u}\int c\,f(t)e^{\int a(t)dt}dt+c'=\frac{1}{c\,e^{\int a(t)dt}}\int c\,f(t)e^{\int a(t)dt}dt+c'$$

$$y=e^{-\int a(t)dt}\left[\int f(t)e^{\int a(t)dt}dt+c'\right] \tag{2.16}$$

**EXEMPLO 2.2**

Encontrar a solução completa da equação diferencial de primeira ordem dada na equação 2.18 seguinte pelo método do operador *D*.

Pelo método clássico, através do operador $\mathcal{D}$, tem-se um processo mais genérico de solução.

**Solução:**

Sendo

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$$

tem-se que

$$\mathcal{D}^n(r) = \frac{d^n(r)}{dt^n} \tag{2.17}$$

Para a equação diferencial linear de primeira ordem do problema em questão tem-se que:

$$\frac{dr}{dt} + 2r = f(t) \tag{2.18}$$

Assim, através da utilização do operador *D*, tem-se que:

$$(\mathcal{D} + 2)r = f(t)$$

$$r = \left(\frac{1}{\mathcal{D} + 2}\right) f(t)$$

Pela equação 2.16 tem-se:

$$r(t) = e^{-\int a(\tau)d\tau}\left[\int f(\tau)\, e^{\int a(\tau)d\tau} d\tau + c\right]$$

e

$$r(t) = e^{-2t}\left[\int f(\tau)\, e^{2\tau} d\tau + c\right] \tag{2.19}$$

Assim pode-se escrever que:

$$r(t) = \left( \frac{1}{\mathcal{D}+2} \right) f(t) = e^{-2t} \left[ \int f(\tau) e^{2\tau} d\tau + c \right] \qquad (2.20)$$

---

**EXEMPLO 2.3**

Encontrar a solução completa da equação diferencial de segunda ordem mostrada na equação 2.21 seguinte pelo método do operador $\mathcal{D}$. Logo após, promover a generalização do processo para uma equação diferencial de ordem *n*.

$$a_2 \frac{d^2 r}{dt^2} + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 = f(t) \qquad (2.21)$$

**Solução:**

A equação 2.21 pode ser escrita segundo a aplicação do operador $\mathcal{D}$:

$$\left( a_2 \mathcal{D}^2 + a_1 \mathcal{D} + a_0 \right) r = g(t)$$

$$\left( \mathcal{D} - S_1 \right) \left( \mathcal{D} - S_2 \right) r = f(t) \qquad (2.22)$$

onde

$$S_1 = \frac{-a_1}{2a_2} + \frac{\sqrt{(a_1^2 - 4a_2 a_0)}}{2a_2}$$

$$S_2 = \frac{-a_1}{2a_2} - \frac{\sqrt{(a_1^2 - 4a_2 a_0)}}{2a_2}$$

A solução complementar é obtida considerando-se $f(t) = 0$.

Assim $\left( \mathcal{D} - S_1 \right) \left( \mathcal{D} - S_2 \right) r = 0$.

Como $r \neq 0$ e $(\mathcal{D} - S_1)(\mathcal{D} - S_2) = 0$, a solução complementar da equação diferencial 2.21 será:

$$r_{1c} = c_1 e^{S_1 t}$$

$$r_{2c} = c_2 e^{S_2 t}$$

A solução particular será dada pela seguinte expressão:

$$r_p = \left(\frac{1}{\mathcal{D} - S_1}\right)\left(\frac{1}{\mathcal{D} - S_2}\right) f(t)$$

ou melhor,

$$r_p = \left\{\frac{1}{\mathcal{D} - S_1}\left[\left(\frac{1}{\mathcal{D} - S_2}\right) f(t)\right]\right\}$$

$$r_p = \left(\frac{1}{\mathcal{D} - S_1}\right) F(t)$$

Agora, com $F(t)$ dada pela fórmula recursiva 2.20, anterior, pode-se escrever o seguinte:

$$F(t) = e^{S_2 t}\left[\int f(\tau_1) e^{-S_2 \tau_1} d\tau_1\right] \tag{2.23}$$

Assim a solução particular será:

$$r_p = e^{S_1 \tau} \int F(\tau) e^{-S_1 \tau_2} d\tau_2$$

ou melhor,

$$r_p = e^{S_1 t} \int e^{S_2 \tau_2} \left(\int f(\tau_1) e^{-S_2 \tau_1} d\tau_1\right) e^{-S_1 \tau_2} d\tau_2$$

ou

$$r_p = e^{S_1 t} \int e^{(S_2 - S_1)\tau_2} \left(\int f(\tau_1) e^{-S_2 \tau_1} d\tau_1\right) d\tau_2 \tag{2.24}$$

Generalizando-se para uma equação diferencial de ordem *n*, representada pela equação diferencial 2.25 seguinte, vem:

$$a_n \frac{d^n r}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 r = g(t) \qquad (2.25)$$

Em termos do operador *D* vem que:

$$\left(a_n \mathcal{D}^n + a_{n-1} \mathcal{D}^{n-1} + \ldots + a_0\right) r = g(t) \qquad (2.26)$$

A solução geral da equação diferencial 2.25 tomará então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} r &= c_1 e^{S_1 t} + c_2 e^{S_2 t} + \ldots + c_n e^{S_n t} + \\ &+ e^{S_1 t} \int e^{(S_2 - S_1)\tau} \int e^{(S_3 - S_2)\tau} \ldots \int e^{-S_n \tau} f(\tau) d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n \end{aligned} \qquad (2.27)$$

---

**EXEMPLO 2.4**

Seja encontrar a solução da equação diferencial linear de segunda ordem seguinte considerando *f(t) = K*, uma função do tipo constante:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = f(t) \qquad (2.28)$$

**Solução:**

Aplicando-se a técnica do operador *D* vem:

$$\left(\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}\right) x = f(t)$$

$$(\mathcal{D} + 2)\mathcal{D}\, x = f(t)$$

$$(\mathcal{D} + 2)\mathcal{D}\, x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} = -2 \Rightarrow S_1 = 0 \\ \mathcal{D} = 0 \ \ \Rightarrow S_2 = -2 \end{array} \right\}$$

$$x_c = c'_1 + c_2 e^{-2t}$$

A solução particular será obtida pela aplicação direta da equação 2.24 conforme o seguinte desenvolvimento:

$$x_p = \frac{1}{(\mathcal{D}+2)\mathcal{D}} f(t) \quad \text{ou} \quad x_p = \frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{D}+2)} f(t)$$

$$r_p = e^{S_1 t} \int e^{S_2 \tau_2} \left( \int f(\tau_1) e^{-S_2 \tau_1} d\tau_1 \right) e^{-S_1 \tau_2} d\tau_2$$

$$x_p = \int e^{-2\tau_2} \left( \int e^{2\tau_1} f(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau_2$$

Para $f(\tau_1) = K$ , onde $K$ é uma constante, vem:

$$x_p = \int e^{-2\tau_2} \left( \int e^{2\tau_1} K\, d\tau_1 \right) d\tau_2$$

$$x_p = K \int e^{-2\tau} \left[ \frac{1}{a} e^{2\tau} \right] d\tau = K \int \frac{1}{2} d\tau$$

$$x_p = \frac{K}{2}\tau + c_3 \quad \therefore \quad x_p = \frac{K}{2} t + c_3$$

Logo, a solução geral da equação 2.28 será:

$$x(t) = c'_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{Kt}{2} + c_3$$

ou, genericamente

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{Kt}{2} \qquad (2.29)$$

**Verificação:**

Para verificação da solução bastará substituir o valor de *x(t)* da equação 2.29 na equação 2.28.

Assim:

$$\frac{dx}{dt} = -2c_2 e^{-2t} + \frac{K}{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4c_2 e^{-2t}$$

$$2\frac{dx}{dt} = -4c_2 e^{-2t} + K$$

Deste modo, substituindo-se as expressões anteriores na equação 2.28, vem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 4c_2 e^{-at} - 4c_2 e^{-at} + K = f(t) \quad \therefore \quad f(t) = K$$

Deste modo, fica então comprovada a solução dada pela equação 2.29 como sendo a solução geral da equação diferencial 2.28.

---

## 2.2. Revisão de Série de Fourier e Transformada de Laplace

## 2.2.1. Série de Fourier e Transformada de Fourier

Uma função periódica $f(\theta)$ pode ser expandida numa série de Fourier se obedecer as seguintes condições também conhecidas como condições de Dirichlet:

a) a função deverá apresentar, num período, um número máximo finito de descontinuidades;

b) a função deverá admitir valores finitos para seu máximo e seu mínimo em um período;

c) a integral $\int_0^{2\pi} |f(\theta)| d\theta$ deverá ser finita.

A série de Fourier, em sua forma trigonométrica, tem a seguinte expressão:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \, sen \, n\theta] \qquad (2.30)$$

Os termos $a_n$ e $b_n$ são chamados coeficientes de Euler, e são dados pelas seguintes expressões:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \qquad (2.31)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \qquad (2.32)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \, sen(n\theta) d\theta \qquad (2.33)$$

para *n = 1, 2, 3* ...

onde $\theta = \omega t$ com $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\therefore$ $\theta = \frac{2\pi}{T} t$ sendo *T* o período considerado.

Deste modo, pode-se escrever a série de Fourier numa nova forma, conforme a seguinte expressão:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \omega t) + b_n \, sen(n \omega t)] \qquad (2.34)$$

onde agora

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n \omega t) dt \qquad (2.35)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, sen(n \omega t) dt \qquad (2.36)$$

Na sua forma exponencial, após uma série de manipulações algébricas, a série de Fourier poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega t} \qquad (2.37)$$

onde

$$\alpha_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

ou

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt \qquad (2.38)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Pode-se obter, a partir daqui, a chamada integração de Fourier, considerando *f(t)* uma função temporal aperiódica. Uma função aperiódica pode ser entendida como sendo uma função periódica cujo período tende ao infinito.

Neste caso, as seguintes considerações serão válidas como conseqüência de $T \to \infty$:

$$-T/2 \to -\infty$$

$$+T/2 \to +\infty$$

$$n\omega \to \omega \quad \therefore \quad \omega \to d\omega$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\frac{1}{T} \to \frac{d\omega}{2\pi}$$

Desenvolvendo o raciocínio a partir daqui, a equação 2.37 pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}dt\right]e^{jn\omega t}$$

Considerando a condição $T \to \infty$ vem:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\; e^{j\omega t}$$

ou ainda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega \qquad (2.39)$$

A equação 2.39 é chamada integral de Fourier e dela pode-se definir um par de transformadas, a saber:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (2.40)$$

onde

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (2.41)$$

A equação 2.41, trata-se da chamada transformada de Fourier da função *f(t)* ou apenas, de maneira simbólica, $g(\omega) = \Im[f(t)]$.

A função $f(t) = \Im^{-1}[g(\omega)]$ é conhecida como a anti-transformada de Fourier e é dada pela própria equação 2.41.

---

**EXEMPLO 2.5**

Seja encontrar as expressões para os coeficientes de Euler das equações 2.31, 2.32, 2.33, reescritas a seguir.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)sen(n\theta)d\theta$$

para $n = 1, 2, 3$ ...

**Subsídio:**

Considerar as seguintes relações de integrais:

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, d\theta = 0$$

e

$$\int_0^{2\pi} cos\, m\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, cos m\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, cos\, m\theta d\theta = \begin{cases} 0 \text{ para } m \neq n \\ \pi \text{ para } m = n \end{cases}$$

e também

$$\int_0^{2\pi} sen\, m\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 \text{ para } m \neq n \\ \pi \text{ para } m = n \end{cases}$$

**Solução:**

Primeiramente, para o índice $\frac{a_0}{2}$, integrando-se a equação 2.30 no período $0$ a $2\pi$ vem:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos n\theta + b_n sen\, n\theta] d\theta$$

o que conduz a:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, d\theta \qquad (2.42)$$

Considerando-se as seguintes equações dadas como subsídio deste problema, equações:

$$\int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, d\theta = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, d\theta = 0$$

a equação 2.42 tomará o seguinte aspecto:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a_0}{2} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi$$

Finalmente, pode-se obter a expressão para o primeiro coeficiente da expressão da série de Fourier conforme a equação 2.43, seguinte:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \tag{2.43}$$

Constata-se que o coeficiente $\frac{a_0}{2}$ equivale ao valor médio da função $f(\theta)$.

Para a determinação do coeficiente $a_n$ deve-se multiplicar a equação 2.30 por $cos(m\theta)$ e promover a integração no período 0 a $2\pi$.

Assim, obtém-se que:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)cos\, m\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} cos\, m\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos\, n\theta + b_n sen\, n\theta ] cos\, m\theta\, d\theta$$

Continuando a manipulação algébrica, finalmente:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)cos\, m\theta\, d\theta = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} cos\, m\theta\, d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} cos n\theta\, cos\, m\theta\, d\theta + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, cos\, m\theta\, d\theta \tag{2.44}$$

Considerando-se as seguintes equações dadas como subsídio deste problema, equações:

$$\int_0^{2\pi} cos\, m\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} sen\, n\theta \cdot cos m\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} cos\, n\theta \cdot cos\, m\theta d\theta = \begin{cases} 0 \text{ para } m \neq n \\ \pi \text{ para } m = n \end{cases}$$

além de considerar o valor para $m = n$, tem-se para a equação 2.44 que, para todos os valores de $n = 1 \to \infty$, exceto para $m = n$, que:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)cos\, m\theta\, d\theta = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, cos\, m\theta\, d\theta + a_n \int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, cos n\theta\, d\theta$$

E para $m = n$, tem-se:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta\, )cos n\theta d\theta = a_n \int_0^{2\pi} cos n\theta\, cos n\theta d\theta = a_n \pi$$

Finalmente, pode-se obter a expressão para o coeficiente $a_n$ da expressão da série de Fourier conforme a equação 2.45, seguinte:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)cosn\theta d\theta \qquad (2.45)$$

Do mesmo modo, para a determinação do coeficiente $b_n$ deve-se multiplicar a equação 2.30 por $sen(m\theta)$ e promover a integração no período 0 a $2\pi$.

Assim obtém-se que:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)sen\, m\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} sen\, m\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos\, n\theta + b_n sen\, n\theta\, ]sen\, m\theta\, d\theta$$

Continuando a manipulação algébrica, finalmente:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)sen\, m\theta\, d\theta = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} sen\, m\theta\, d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta \qquad (2.46)$$

Considerando-se as seguintes equações dadas como subsídio deste problema, equações:

$$\int_0^{2\pi} sen\, m\theta\, d\theta = 0$$
$$\int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta = 0$$
$$\int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 \text{ para } m \neq n \\ \pi \text{ para } m = n \end{cases}$$

além de considerar o valor para $m = n$, tem-se para a equação 2.46, para todos os valores de $n = 1 \rightarrow \infty$, exceto para $m = n$, que:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)sen\, m\theta\, d\theta = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} cos\, n\theta\, sen\, m\theta\, d\theta + b_n \int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, sen\, n\theta\, d\theta$$

E para $m = n$, tem-se:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)sen\, m\theta\, d\theta = b_n \int_0^{2\pi} sen\, n\theta\, sen\, n\theta\, d\theta = b_n\pi$$

Finalmente, pode-se obter a expressão para o coeficiente $b_n$ da expressão da série de Fourier conforme a equação 2.47, seguinte:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) sen\, n\theta\, d\theta \qquad (2.47)$$

---

<u>**EXEMPLO 2.6**</u>

Desenvolver em série de Fourier a função periódica representada pela figura 2.1 seguinte e que pode ser resumida da seguinte forma:

$$f(\theta( = \begin{cases} -k \text{ para } -\pi \le \theta \le 0 \\ k \text{ para } 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

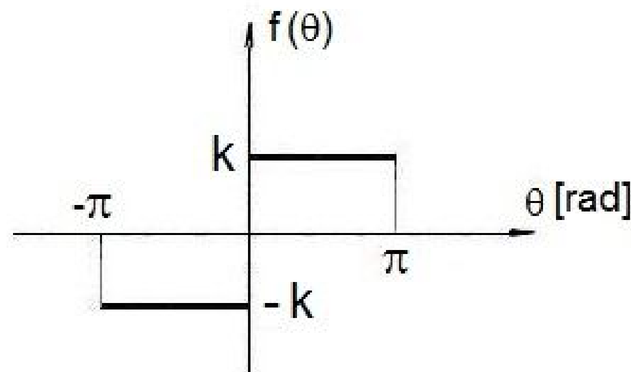



***Figura 2.1 – Função periódica relativa ao exemplo 2.6***

**Solução:**

Promovendo a determinação dos coeficientes de Euler referentes à série de Fourier para a função dada.

Pela equação 2.31 obtém-se o coeficiente $\frac{a_0}{2}$.

Assim:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -k\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} k\, d\theta = \frac{1}{2\pi}(-k)[\theta]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}k[\theta]_0^{\pi}$$

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{k\pi}{2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi} = 0 \quad \therefore \quad \frac{a_0}{2} = 0$$

Pela equação 2.32 obtém-se o coeficiente $a_n$.

Assim:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -k\cos n\theta d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} k\cos n\theta d\theta$$

$$a_n = -\frac{k}{\pi}\left[\frac{sen\, n\theta}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{k}{\pi}\left[\frac{sen\, n\theta}{n}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

Pela equação 2.33 obtém-se o coeficiente $b_n$.

Assim:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -k\, sen\, n\theta\, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} k\, sen\, n\theta\, d\theta$$

$$b_n = -\frac{k}{\pi}\left[\frac{-\cos n\theta}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{k}{\pi}\left[\frac{-\cos n\theta}{n}\right]_{0}^{\pi} = -\frac{k}{\pi}\left[\frac{-1+\cos(-n\pi)}{n}\right] + \frac{k}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi + 1}{n}\right]$$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi) + \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

Logo

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi) sen\, n\theta$$

ou melhor

$$f(\theta) = \frac{2k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{n} sen\, n\theta$$

A representação gráfica da função pode ser obtida a partir do desenvolvimento da equação anterior resultante para os diferentes valores de $n$ da seguinte maneira:

Para $n = 1$

$$b_1 = \frac{2k}{\pi}\frac{1-\cos\pi}{1} = \frac{4k}{\pi}$$

Para $n = 2$

$$b_2 = \frac{2k}{\pi}\frac{1-\cos 2\pi}{2} = 0 \quad \text{(para n = par } b_n = 0\text{)}$$

Para $n = 3$

$$b_3 = \frac{2k}{\pi}\frac{1-\cos 3\pi}{3} = \frac{4k}{3\pi}$$

Para $n = 5$

$$b_5 = \frac{2k}{\pi} \cdot \frac{1-\cos 5\pi}{5} = \frac{4k}{5\pi}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{4k}{n\pi} \text{ com n = ímpar}$$

A série assim expandida será:

$$f(\theta) = \frac{4k}{\pi} se\, n\theta + \frac{4k}{3\pi} sen\, 3\theta + \frac{4k}{5\pi} sen\, 5\theta + \ldots + \frac{4k}{n\pi} sen\, n\theta$$

Expandindo a série da função $f(\theta)$ apenas até o quinto harmônico é obtida a forma mostrada na figura 2.2 seguinte. Notar como a função obtida se deformou em torno da forma original quando se tomaram poucos harmônicos.

$$\frac{4k}{\pi} sen\, \theta = 1{,}273k\, sen\, \theta$$

$$\frac{4k}{3\pi} sen\, 3\theta = 0{,}424k\, sen\, 3\theta$$

$$\frac{4k}{5\pi} sen\, 5\theta = 0{,}254k\, sen\, 5\theta$$

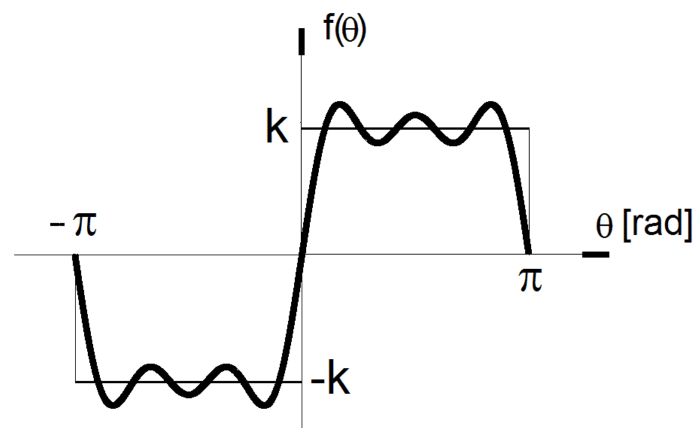



***Figura 2.2 – Composição da função $f(\theta)$ apenas até o quinto harmônico***

Será necessário que se desenvolvam todos os harmônicos para que se tenha a restituição da função original o que, teoricamente, significa calcular a função para infinitos harmônicos, ou seja, $n \to \infty$.
Considerando até o quinto harmônico, apenas para efeito de exemplificação, vê-se que a função obtida difere muito da função original.

---

**EXEMPLO 2.7**

Desenvolver em série de Fourier a função periódica $f(x) = x^2$, de período $2\pi$, no intervalo $-\pi \le x \le \pi$, representada na figura 2.3 seguinte.

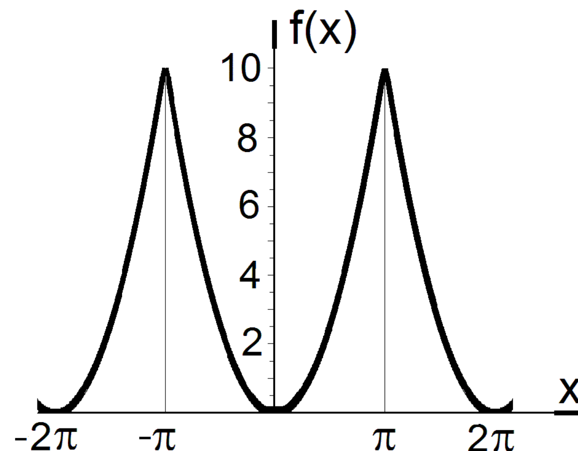



***Figura 2.3 – Função periódica*** $f(x) = x^2$ ***relativa ao exemplo 2.7***

**Solução:**

Promovendo a determinação dos coeficientes de Euler referentes à série de Fourier para a função dada.

Pela equação 2.31 obtém-se o coeficiente $\frac{a_0}{2}$.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}$$

Pela equação 2.32 obtém-se o coeficiente $a_n$.

Assim:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

Mas

$$\int x^2 \cos nx\, dx = \frac{2x}{n^2}\cos nx + \left[\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right] sen\, nx$$

Logo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right) sen\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi - \frac{2(-\pi)}{n^2}\cos n(-\pi) + \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right) sen\, n\pi - \left(\frac{(-\pi)^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right) sen\, n(-\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\cdot 2\pi}{n^2}\cos n\pi\right] = \frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad \therefore \quad a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

Pela equação 2.33 obtém-se o coeficiente $b_n$.

Assim:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 sen\, nx\, dx$$

Mas

$$\int x^2 sen\, nx\, dx = \frac{2x}{n^2} sen\, nx + \left[\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right]\cos nx$$

Logo

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{2x}{n^2} sen\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2} sen\, n\pi - \frac{2(-\pi)}{n^2} sen\, n(-\pi) + \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\cos n\pi - \left(\frac{2}{n^3} - \frac{(-\pi)^2}{n}\right)\cos n(-\pi)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)(\cos n\pi - \cos n\pi)\right] = 0$$

$$b_n = 0$$

Deste modo, tem-se para a função $f(x) = x^2$ o seguinte desenvolvimento em série trigonométrica de Fourier:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$$

Colocando na forma expandida, a equação anterior toma o seguinte aspecto:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{4}{16}\cos 4x \cdots (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx$$

Expandindo a série da função $f(x) = x^2$ apenas até o quarto harmônico é obtida a forma mostrada na figura 2.4 seguinte. Notar como a função obtida se deformou, ligeiramente, em torno da forma original quando se tomaram poucos harmônicos.

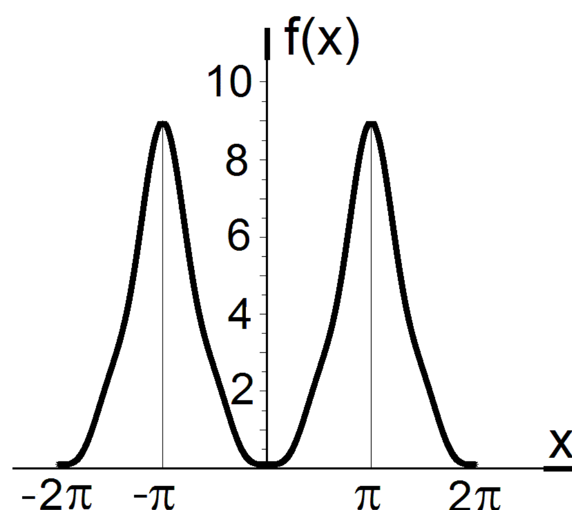



***Figura 2.4 – Composição da função*** $f(x) = x^2$ ***apenas até o quarto harmônico***

**Observações:**

Dos exemplos 2.6 e 2.7, podem-se tirar algumas conclusões:

a) que no processo de reconstrução da função original, quanto maior o número de harmônicos adotado mais próxima do original será a função a ser

representada pela série de Fourier

b) que uma função ímpar, tal como a função do exemplo 2.6, não admitirá os termos em $a_n$ nem o termo em $\frac{a_0}{2}$, que teoricamente seriam os termos em co-seno

c) que uma função par, tal como a função do exemplo 2.7, não admitirá os termos $b_n$, que teoricamente seriam os termos em seno.

---

## 2.2.2. Fenômeno de Gibb

Ainda dentro da teoria aplicada à série de Fourier, pode-se analisar um fenômeno importante. Um erro considerável aparece na vizinhança de um ponto de descontinuidade quando uma função é aproximada pela soma de uma série de Fourier, não importando o número de harmônicos levado em conta.
Considerando-se uma função seccionalmente contínua, a série de Fourier converge, no ponto $x_d$ de descontinuidade, para a média aritmética dos limites laterais da função no ponto de descontinuidade, $x_d^+$ e $x_d^-$.

Ou melhor:

$$f(x_d) = \frac{f(x_d^+) + f(x_d^-)}{2} \tag{2.48}$$

---

**EXEMPLO 2.8**

Determinar o valor da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})$.

**Solução:**

Do exemplo 2.7, anterior, tem-se que $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$.

Tomando o ponto $x = \pi$, observa-se a incidência do fenômeno de Gibb através da inspeção da figura 2.3, pois neste ponto há descontinuidade. A descontinuidade ocorreu em função do procedimento de seccionamento adotado para que se obtivesse a periodicidade no processo.

Assim, pela equação 2.48, com $x_d^+ = \pi$ e $x_d^- = \pi$, tem-se:

$$f(\pi) = \frac{f(\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2$$

$$f(\pi) = \pi^2$$

Utilizando-se a expressão da série de $x^2$, do exemplo 2.7, com o valor $x = \pi$, vem:

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos n\pi$$

Sendo o valor de *n* sempre inteiro, até por imposição do desenvolvimento da série de Fourier, qualquer que seja esse valor a expressão seguinte será válida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\pi = 1$$

Logo

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{4} \left( \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

---

### 2.2.3. Espectro de Freqüência

Seja a função seguinte e o seu desenvolvimento em série de Fourier na forma trigonométrica, um nome comum dado ao desenvolvimento da série na forma até aqui apresentada.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t \right] \qquad (2.49)$$

$$a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t = a_n \left( \cos n\omega t + \frac{b_n}{a_n} \operatorname{sen} n\omega t \right)$$

Imaginando-se a relação $\frac{b_n}{a_n} = \tan \varphi_n$ vem:

$$a_n\left(\cos n\omega t + \frac{b_n}{a_n}\operatorname{sen} n\omega t\right) = a_n\left(\cos n\omega t + \frac{\operatorname{sen}\varphi_n}{\cos\varphi_n}\operatorname{sen} n\omega t\right) =$$

$$= \frac{a_n}{\cos\varphi_n}\left(\cos\varphi_n \cos n\omega t + \operatorname{sen}\varphi_n \operatorname{sen} n\omega t\right)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t\right] = \frac{a_n}{\cos\varphi_n}\cos\left[(n\omega t) - \varphi_n\right] \qquad (2.50)$$

Tem-se que $\frac{b_n}{a_n} = \tan\varphi_n \quad \therefore \quad \frac{\operatorname{sen}\varphi_n}{\cos\varphi_n} = \frac{b_n}{a_n} \quad \therefore \quad \frac{\operatorname{sen}^2\varphi_n}{\cos^2\varphi_n} = \frac{b_n^2}{a_n^2}$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varphi_n}{\cos^2\varphi_n} + 1 = \frac{b_n^2}{a_n^2} + 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varphi_n + \cos^2\varphi_n}{\cos^2\varphi_n} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n^2} \quad \therefore \quad \frac{a_n^2}{\cos^2\varphi_n} = a_n^2 + b_n^2$$

Logo

$$\frac{a_n}{\cos\varphi_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (2.51)$$

Deste modo, a equação 2.50 tomará a seguinte forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos(n\omega t - \varphi_n) \qquad (2.52)$$

onde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

A equação 2.52 mostra uma nova forma de representação da série de Fourier contendo o parâmetro $c_n$ conhecido como amplitude em função da freqüência. O gráfico do módulo de $c_n$ *versus* a freqüência gera um gráfico conhecido como espectro de freqüência.

---

**EXEMPLO 2.9**

Desenvolver a função esboçada na figura 2.5 em série de Fourier traçando, a seguir, o seu respectivo espectro de freqüência.

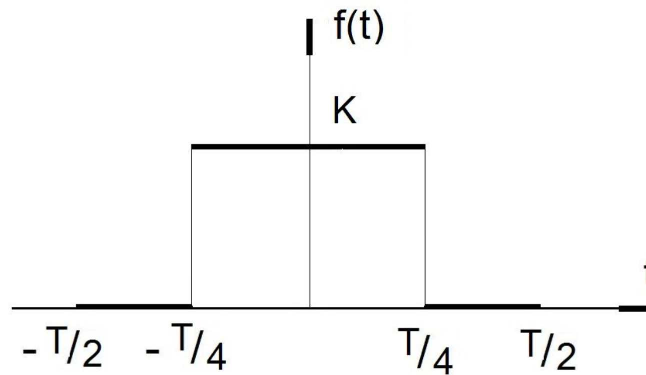



***Figura 2.5 – Função periódica relativa ao exemplo 2.9***

**Solução:**

Determinação dos coeficientes de Euler através das equações 2.31, 2.32, 2.33.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} K\,dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{-T/4} 0dt + \frac{1}{T}\int_{T/4}^{T/2} 0dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\left[Kt\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{K}{T}\left[\frac{T}{4} - \left(-\frac{T}{4}\right)\right] = \frac{K}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{K}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} K\cos n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{-T/4}(0)\cos n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{T/4}^{T/2}(0)\cos n\omega t\,dt$$

$$a_n = \frac{2K}{T}\frac{1}{n\omega}\left[sen\,n\omega t\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{2K}{Tn\omega}\left[sen\frac{n\omega T}{4} - sen\,n\omega\left(-\frac{T}{4}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2K}{Tn\frac{2\pi}{T}}\left[2sen\frac{nT2\pi}{4T}\right] = \frac{4A}{2\pi n}sen\,n\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2K}{n\pi}sen\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} K\, sen\, n\omega t\, dt + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{-T/4} (0)\, sen\, n\omega t\, dt + \frac{2}{T}\int_{T/4}^{T/2} (0)\, sen\, n\omega t\, dt$$

$$b_n = \frac{2K}{T}\left(-\frac{1}{n\omega}\right)\left[cos\, n\omega t\right]_{-T/4}^{T/4} = -\frac{2K}{Tn\omega}\left[cos\frac{n\omega T}{4} - cos\, n\omega\left(-\frac{T}{4}\right)\right]$$

$$b_n = -\frac{2K}{Tn\omega}\cdot 0 = 0 \quad \therefore \quad b_n = 0$$

Logo, a série de Fourier na forma trigonométrica para a função mostrada na figura 2.5 será:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2K}{n\pi} sen\frac{n\pi}{2} cos\, n\omega t$$

O espectro de freqüência será dado por:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \therefore \quad c_n = a_n \quad \text{pois } b_n = 0$$

Assim:

$$c_1 = \frac{2A}{\pi} sen\frac{\pi}{2} = \frac{2A}{\pi} \quad \therefore \quad |c_1| = \frac{2A}{\pi} = 0{,}636A$$

$$c_2 = \frac{2A}{2\pi} sen\pi = 0 \quad \therefore \quad |c_2| = 0$$

$$c_3 = \frac{2A}{3\pi} sen\frac{3\pi}{2} = -\frac{2A}{3\pi} \quad \therefore \quad |c_3| = \frac{2A}{3\pi} = 0{,}212A$$

$$c_4 = \frac{2A}{4\pi} sen\frac{4\pi}{2} = 0 \quad \therefore \quad |c_4| = 0$$

$$c_5 = \frac{2A}{5\pi} sen\frac{5\pi}{2} = \frac{2A}{5\pi} \quad \therefore \quad |c_3| = \frac{2A}{5\pi} = 0{,}127A$$

O espectro de freqüência também poderá ser traçado em escala e visto na figura 2.6, seguinte:

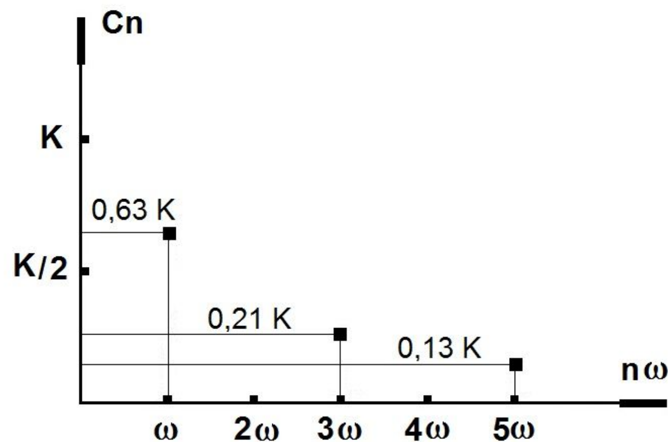



***Figura 2.6 – Espectro de freqüência da função do exemplo 2.9***

**Observações:**

É interessante saber que na Engenharia:

a) a análise espectral tem tudo a ver com o estudo do espectro de freqüência de determinadas funções cuja finalidade é identificar o que se chama de modo ou modos de oscilação dessa função

b) os sistemas físicos respondem ou apresentam certos modos de oscilação, particulares, ligados à própria estrutura ou característica desses sistemas

c) as respostas desses sistemas apresentam particularidades associadas ao modo ou modos de oscilação desses sistemas.

---

**<u>EXEMPLO 2.10</u>**

Determinar a transformada de Fourier da função $f(x) = 1$ no intervalo $-k < t < k$ e $f(x) = 0$ fora desse intervalo, conforme é mostrado na figura 2.7, seguinte.

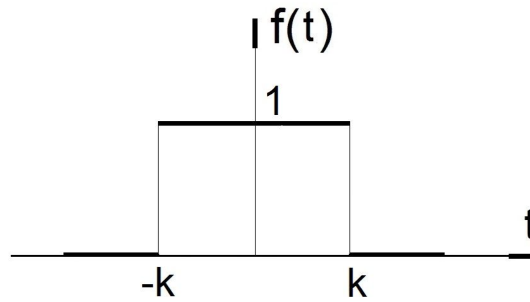



***Figura 2.7 – Função periódica relativa ao exemplo 2.10***

**Solução:**

Pela equação 2.41, tem-se a seguinte expressão para a transformada de Fourier:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-k}^{k} e^{-j\omega t} dt$$

$$g(\omega) = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-k}^{k} = -\frac{1}{\omega}\frac{e^{-j\omega k} - e^{-j\omega(-k)}}{j}$$

$$g(\omega) = -\frac{2}{\omega}\frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} = \frac{2}{\omega} sen\, \omega k$$

O espectro de amplitude da função *f(t)* da figura 2.7 pode ser calculado a partir da transformada de Fourier.

Tem-se que:

$$g(\omega) = \frac{2}{\omega} sen\, \omega k = \frac{2k\, sen\, \omega k}{\omega k}$$

Logo

$$\left| g(\omega) \right| = 2k \left| \frac{sen\, \omega k}{\omega k} \right|$$

**Tabela 1.1 – Valores de $|g(\omega)|$ versus $\omega k$**

| $\omega k$ | $\lvert g(\omega) \rvert$ |
|---|---|
| $0$ | $2k$ |
| $\pi/2$ | $1,27k$ |
| $\pi$ | $0$ |
| $3\pi/2$ | $0,42k$ |
| $2\pi$ | $0$ |
| $2\pi+\pi/2$ | $0,25k$ |
| $2\pi+\pi$ | $0$ |
| $2\pi+3\pi/2$ | $0,18k$ |
| ⋮ | ⋮ |

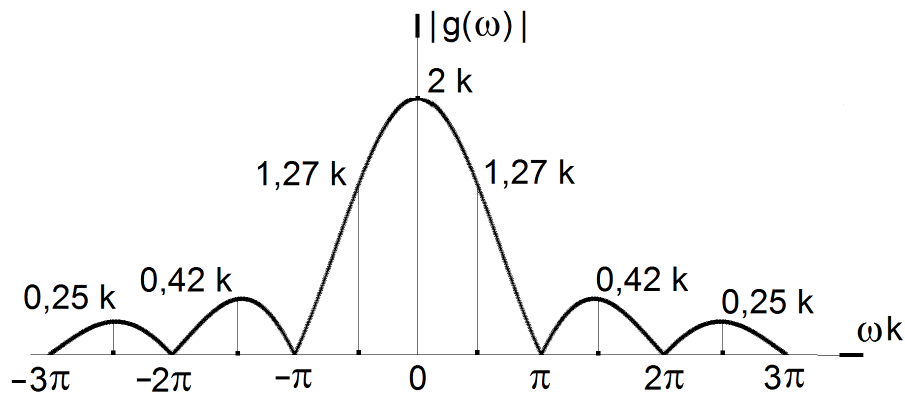



**Figura 2.8 – Espectro de amplitude $g(\omega)$ da função $f(t)=1$, pulso unitário retangular compreendido no intervalo [–k, k]**

---

## 2.2.4. Transformada de Laplace

Apesar de toda a teoria a respeito da transformação de Fourier, alguns problemas ficam bastante evidenciados, problemas tais como:

a) a obtenção da anti-transformada de Fourier quase sempre envolve integrais impróprias de difícil solução;

b) para um grande número de funções temporais, envolvidas na área de Engenharia, a transformação de Fourier não converge.

Esta segunda dificuldade é um fator significativo e pode ser comprovado no exemplo seguinte.
Com um estudo bastante interessante, Laplace descobriu que a transformação de Fourier não poderia, para certas funções, atingir convergência um problema inicial. O artifício foi a utilização do operador $e^{-\sigma t}$ do modo a ser demonstrado a seguir.

Seja então a função

$$f'(t) = e^{-\sigma t} f(t) \qquad (2.53)$$

Sua transformada de Fourier, unilateral, será:

$$\Im(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

Agora, fazendo:

$$s = \sigma + j\omega \qquad (2.54)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad (2.55)$$

A expressão da equação 2.55 é chamada de transformada unilateral de Laplace.

---

**EXEMPLO 2.11**

Determinar a transformada de Fourier da função degrau unitário definido dentro do seguinte intervalo:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 0 \\ 1 & para\ t \geq 0 \end{cases}$$

Mostrar o problema da convergência, associado à transformada de Fourier, conforme foi citado anteriormente.

**Solução:**

Pela equação 2.41, tem-se a seguinte expressão para a transformada de Fourier da função dada:

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^{\infty}$$

Das equações de Euler, sabe-se que:

$$e^{-j\theta} = cos\theta - jsen\theta$$

o que permite que a expressão anterior de $g(\omega)$ seja escrita da seguinte forma:

$$g(\omega) = \left[ -\frac{cos\,\omega t - jsen\,\omega t}{j\omega} \right]_0^{\infty}$$

É fato que não há convergência da transformada $g(\omega)$ anterior para um valor determinado!

Considerando essa questão do exemplo 2.11, Laplace estudou o problema e solucionou-o utilizando-se de um fator de convergência que se sabe ser $e^{-\sigma t}$, sendo $\sigma$ um valor real positivo, aplicado segundo o que foi apresentado na equação 2.53, o que permitiu se chegar à expressão da nova transformada, ligeiramente modificada da equação 2.55.

A nova definição da função *f(t)* será:

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 0 \\ e^{-\sigma t} & para\ t \geq 0 \end{cases}$$

Deste modo, a nova transformação de Fourier será:

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$g(\omega) = \left[ \frac{-1}{\sigma + j\omega} e^{-(\sigma + j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \left[ \frac{-1}{\sigma + j\omega} e^{-\sigma t} (cos\omega t - jsen\,\omega t) \right]_0^{\infty}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sigma + j\,\omega}$$

Deste modo, a utilização do fator de convergência resolve o problema da convergência que afetava as transformações de Fourier das principais funções observadas na área de Engenharia.

**Observações:**

Seja a equação da transformada de Fourier de uma função $f'(t) = e^{-\sigma t} f(t)$ no intervalo $[0, +\infty)$ de definição e sua equação da anti-transformada também definida no mesmo intervalo.

Assim, pela aplicação direta da equação 2.41, considerando a função $f'(t) = e^{-\sigma t} f(t)$, tem-se:

$$, g(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \qquad (2.56)$$

A equação 2.56 é a transformada unilateral de Laplace e tem a seguinte representação clássica:

$$\pounds[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-St} dt \qquad (2.57)$$

onde $S = \sigma + j\omega$

Na equação 2.57 foi utilizado o símbolo £ para a representação da operação da transformada de Laplace.

Pela equação 2.40 da anti-transformada de Fourier obtém-se que:

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad (2.58)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d(j\omega) \qquad (2.59)$$

mas $d(j\omega) = d(\sigma + j\omega) = dS$

$$\omega = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases} \quad \therefore \quad j\omega = \begin{cases} j\infty \\ -j\infty \end{cases} \quad \therefore \quad \sigma + j\omega = \begin{cases} \sigma + j\infty \\ \sigma - j\infty \end{cases}$$

Com as observações anteriores, lembrando-se que $g(\omega) = F(s)$, vem:

$$£^{-1}[F(S)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(S)e^{St}dS \qquad (2.60)$$

onde $S = \sigma + j\omega$

**Observações:**

A equação 2.60 representa a expressão da anti-transformada de Laplace da função $F(S)$ e a variável $S = \sigma + j\omega$ é conhecida como variável complexa de Laplace por exatamente se tratar de um número complexo.
Na equação 2.59 foi utilizado o símbolo $£^{-1}$ para a representação da operação da anti-transformada de Laplace.

---

## 2.2.5. Propriedades da Transformada de Laplace

A transformação de Laplace permite as seguintes possibilidades:

a) a transformação de funções periódicas, com um número finito de descontinuidades, em simples expressões algébricas;

b) a transformação de operações de integração e de diferenciação (derivação) no domínio do tempo em operações de multiplicação e de divisão no domínio da freqüência (complexo);

c) a transformação de equações diferenciais complexas em simples equações algébricas;

d) a determinação rápida das constantes arbitrárias das soluções das equações diferenciais;

e) a obtenção de fácil consulta por apresentar farta documentação literária.

O resumo das principais propriedades da transformação de Laplace está contido em treze propriedades descritas a seguir.

**Propriedade 1 – Propriedade da Soma**

A transformada de Laplace de uma soma de duas funções é a soma das transformadas de Laplace individuais.

$$£[f_1 + f_2] = £[f_1] + £[f_2] \qquad (2.61)$$

**Propriedade 2 – Propriedade da Constante**

A transformada de Laplace de uma constante multiplicando uma função é igual a constante vezes a transformada da função.

$$£[kf] = k£[f] \tag{2.62}$$

onde *k* é uma constante.

**Propriedade 3 – Propriedade do Deslocamento no Tempo**

Se $£[f] = F(S)$, a transformada de Laplace de $f(t-k)$ multiplicada por $u(t-k)$, uma função degrau unitário atrasado de um tempo *k*, será dada por $F(S)e^{-kS}$.

$$£[f(t-k)u(t-k)] = e^{-kS}F(S) \tag{2.63}$$

<u>Comprovação</u>

Pela equação 2.57 pode-se escrever que:

$$£[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-St} dt = F(S)$$

Para a função da equação 2.63, tem-se que:

$$F'(S) = £[f(t-k)u(t-k)] = \int_{t=0}^{\infty} f(t-k)\; u(t-k) e^{-St} dt$$

Promovendo-se uma mudança adequada de variáveis, vem:

$t - k = \tau \quad \therefore \quad t = \tau + k$

$t \to 0 \;\; \therefore \;\; \tau \to -k$

$dt = d\tau$

$$F'(S) = \int_{t=0}^{\infty} f(\tau)\; u(\tau) e^{-S(\tau+k)} d\tau = e^{-Sk} \int_{\tau=-k}^{\infty} f(\tau)\; u(\tau) e^{-S\tau} d\tau$$

A última equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma mediante uma pequena alteração de variáveis.

Assim, tem-se que:

$$F'(S) = e^{-Sk} \int_{t-k=-k}^{\infty} f(t-k)\, u(t-k) e^{-S(t-k)} d(t-k)$$

Somando-se ao fator $(t-k)$ um valor $+k$ vem que:

$$F'(S) = e^{-Sk} \int_{t=0}^{\infty} f(t)\, u(t) e^{-St)} d(t) = e^{-kS} F(S)$$

**Propriedade 4 – Propriedade das Funções Periódicas**

A transformada de Laplace de uma função periódica $f(t)$ de período $T$ é igual a $\frac{1}{1-e^{-ST}}$ vezes a transformação de $f(t)$ no primeiro período.

Comprovação

Considerando-se uma função periódica $f(t)$ de período $T$, a transformada de Laplace de cada um dos períodos pode ser descrita do modo seguinte:

$$\pounds[f(t)] = \int_0^T f(t) e^{-St} dt + \int_T^{2T} f(t+T) e^{-S(t+T)} dt + \int_{2T}^{3T} f(t+2T) e^{-S(t+2T)} dt + \ldots$$

E como a função é periódica, tem-se que $f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \ldots$

Assim:

$$\pounds[f(t)] = \int_0^T f(t) e^{-St} dt + \int_T^{2T} f(t) e^{-ST} e^{-St} dt + \int_{2T}^{3T} f(t) e^{-S2T} e^{-St} dt + \ldots$$

$$\pounds[f(t)] = \int_0^T f(t) e^{-St} dt + e^{-ST} \int_0^T f(t) e^{-St} dt + e^{-S2T} \int_0^T f(t) e^{-St} dt + \ldots$$

$$\pounds[f(t)] = \int_0^T f(t) e^{-St} dt \left[ 1 + e^{-ST} + e^{-S2T} + \cdots \right]$$

A série $q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Mas quando se tem $0 < q < 1$ o termo $q^n \to 0$. Assim:

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{1}{1-q} \quad \text{para } 0 < q < 1 \text{ para } n \to \infty$$

Na somatória da transformada tem-se que:

$$q = e^{-ST}$$

Assim:

$$1 + e^{-ST} + e^{-S2T} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-ST}}$$

Logo

$$\pounds\left[f(t)\right] = \frac{1}{1 - e^{-ST}} \int_0^T f(t)\, e^{-ST}\, dt = F(S) \qquad (2.64)$$

**Propriedade 5 – Propriedade da Diferenciação**

Se a função *f(t)* e suas derivadas são transformáveis por Laplace com a relação $\pounds\left[f(t)\right] = F(S)$ então vale a expressão:

$$\pounds\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = SF(S) - f(0^+) \qquad (2.65)$$

Comprovação

Pela equação 2.57, pode-se escrever que:

$$\pounds\left[\frac{df}{dt}\right] = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_\varepsilon^T \frac{df}{dt} e^{-St} dt = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_\varepsilon^T e^{-St} df$$

Utilizando-se da técnica da integração por partes vem:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \begin{cases} dv = df & \therefore \quad f(t) = v \\ u = e^{-st} & \therefore \quad du = -S\, e^{-st} dt \end{cases}$$

$$\int_\varepsilon^T e^{-St} df = \left[ f(t) e^{-St} \right]_\varepsilon^T - \int_\varepsilon^T f(t) \left[ -S\, e^{-St} dt \right] =$$

$$= \left[ f(t) e^{-St} \right]_\varepsilon^T + S \int_\varepsilon^T f(t) e^{-St} dt$$

Assim:

$$\pounds\left[\frac{df}{dt}\right] = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \left[ f(t) e^{-St} \right]_\varepsilon^T + \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0^+}} S\, F(S)$$

$$£\left[\frac{df}{dt}\right] = -f(0^+) + S\,F(S)$$

ou melhor,

$$£\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = S\,F(S) - f(0^+) \quad \text{para } \varepsilon = 0^+$$

**Propriedade 6 – Propriedade da Integração I**

Se a transformada de Laplace de função *f(t)* é dada pela relação $£[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$£\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(S)}{S} \tag{2.66}$$

<u>Comprovação</u>

Pela equação 2.57 pode-se escrever que:

$$£\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] e^{-St} dt$$

$$g(t) = \int_0^t f(t)dt \quad \therefore \quad \frac{d\,g(t)}{dt} = f(t) \qquad \text{com} \quad g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$$

mas $£\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = S\,£[g(t)] - g(0) = S\,£[g(t)]$ pela propriedade 5.

Logo

$$£[g(t)] = \frac{1}{S}£\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] \qquad \text{ou} \qquad £\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(S)}{S}$$

**Propriedade 7 – Propriedade da Integração II**

Se a transformada de Laplace de função *f(t)* é dada pela relação $£[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$£\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(S)dS \tag{2.67}$$

Comprovação

Pela equação 2.57 pode-se escrever que:

$$\pounds[f(t)] = F(S)$$

$$\int_S^{\infty} F(S)\, dS = \int_S^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)e^{-St} dt\, dS = \int_0^{\infty}\left[\int_S^{\infty} f(t)e^{-St} dS\right] dt$$

$$\int_S^{\infty} F(S) dS = \int_0^{\infty} f(t)\left[-\frac{1}{t}e^{-St}\right]_S^{\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-St} dt$$

$$\int_S^{\infty} F(S) dS = \pounds\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

**Propriedade 8 – Propriedade do Valor Inicial**

Se a transformada de Laplace de função $f(t)$ é dada pela relação $\pounds[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{S \to \infty} S\, F(S) \qquad (2.68)$$

Da comprovação da propriedade 5, sabe-se que:

$$\pounds\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = S\, F(S) - f(0^+) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df(t)}{dt} e^{-St} dt$$

Logo

$$\lim_{S \to \infty}\left[S\, F(S) - f(0^+)\right] = \lim_{S \to \infty}\left[\lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{df(t)}{dt} e^{-St} dt\right]$$

$$\lim_{S \to \infty}\left[S\, F(S)\right] - f(0^+) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}}\left[\int_{\varepsilon}^{T} \frac{df(t)}{dt}\left(\lim_{S \to \infty} e^{-St}\right) dt\right] = 0$$

$$\lim_{S \to \infty} S\, F(S) = f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

Ou melhor $$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{S \to \infty} S\, F(S)$$

**Propriedade 9 – Propriedade do Valor Final**

Se a transformada de Laplace de função *f(t)* é dada pela relação $\pounds[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} S\,F(S) \tag{2.69}$$

Da comprovação anterior sabe-se que:

$$\lim_{s \to 0} \left[S\,F(S) - f(0^+)\right] = \lim_{s \to 0}\left[\lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^T \frac{df(t)}{dt} e^{-St} dt\right]$$

$$\lim_{s \to 0} S\,F(S) - f(0^+) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_\varepsilon^T \frac{df(t)}{dt} \left(\lim_{s \to 0} e^{-St}\right) dt\right]$$

$$\lim_{s \to 0} S\,F(S) - f(0^+) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^T df(t) = \left[f(t)\right]_{0^+}^{\infty} = f(\infty) - f(0^+)$$

$$\lim_{s \to 0} S\,F(S) = \lim_{t \to \infty} f(t)$$

**Propriedade 10 – Propriedade do Deslocamento da Variável de Laplace**

Se a transformada de Laplace de função *f(t)* é dada pela relação $\pounds[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$\pounds\left[e^{kt} f(t)\right] = F(S-k) \tag{2.70}$$

<u>Comprovação</u>

Pela equação 2.57 pode-se escrever que:

$$\pounds\left[e^{kt} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{kt} f(t) e^{-St} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(S-k)t} dt = F(S-k)$$

**Propriedade 11 – Propriedade da Multiplicação do Tempo**

Se a transformada de Laplace de função $f(t)$ é dada pela relação $£[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$£[f(kt)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{S}{k}\right) \tag{2.71}$$

<u>Comprovação</u>

Pela equação 2.57 pode-se escrever que:

$$£[f(t)] = F(S)$$

Para $\quad kt = \tau \quad \therefore \quad t = \frac{\tau}{k} \quad \therefore \quad dt = \frac{1}{k} d\tau$

Na mudança de variável, os limites de integração são mantidos.

Assim:

$$£[f(kt)] = \int_0^\infty f(\tau) e^{\frac{-S\tau}{k}} \left(\frac{1}{k} d\tau\right) = \frac{1}{k} \int_0^\infty f(\tau) e^{\frac{-S\tau}{k}} d\tau$$

Voltando-se a variável original vem:

$$£[f(kt)] = \frac{1}{k} \int_0^\infty f(t)\, e^{\frac{-St}{a}} dt = \frac{1}{k} F\left(\frac{S}{a}\right)$$

**Propriedade 12 – Propriedade da Derivação**

Se a transformada de Laplace de função $f(t)$ é dada pela relação $£[f(t)] = F(S)$ vale a relação seguinte:

$$£\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{dS^n} F(S) \tag{2.72}$$

<u>Comprovação</u>

Pela equação 2.57 aplicada a função $t^n f(t)$ para cada valor de $n$ tem-se:

Para $n = 1$

$$£[t\, f(t)] = \int_0^\infty t\, f(t) e^{-St} dt$$

Sendo

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-St} dt$$

pode-se escrever que:

$$\frac{dF(S)}{dS} = \frac{d}{dS}\int_0^{\infty} f(t)e^{-St}dt = \int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{\partial}{\partial S}e^{-St}\right]d\,t = -\int_0^{\infty} t\,f(t)e^{-St}dt = £\left[t\,f(t)\right]$$

Logo $$£\left[t\,f(t)\right] = (-1)\frac{dF(S)}{dS}$$

Para $n = 2$

$$£\left[t^2 f(t)\right] = \int_0^{\infty} t^2 f(t)e^{-St}dt$$

Sendo

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-St} dt$$

pode-se também escrever que:

$$\frac{d^2}{dS^2}F(S) = -\int_0^{\infty} t\,f(t)\left[\frac{\partial}{\partial S}e^{-St}\right]d\,t = \frac{d^2}{dS^2}F(S) = \int_0^{\infty} t^2 f(t)e^{-St}dt = £\left[t^2 f(t)\right]$$

Logo $$£\left[t^2 f(t)\right] = (-1)^2 \frac{d^2}{dS^2}F(S)$$

Generalizando-se vem:

$$£\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{dS^n}F(S)$$

**Propriedade 13 – Propriedade da Convolução**

Se a transformada de Laplace de função $f(t)$ é dada pela relação $£\left[f(t)\right] = F(S)$ e se $£\left[f_1(t)\right] = F_1(S)$ e $£\left[f_2(t)\right] = F_2(S)$ então vale a relação seguinte:

$$£\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = £\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right] = F_1(S)F_2(S) \qquad (2.73)$$

<u>Comprovação</u>

Pela equação 2.59, relativa à anti-transformada de Laplace, pode-se escrever que:

$$£^{-1}\left[F_1(S)F_2(S)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_1(S)F_2(S)e^{St}dS$$

Mas $F_1(S) = \int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{S\tau}d\tau$

Assim:

$$£^{-1}\left[F_1(S)F_2(S)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-S\tau}d\tau\right]F_2(S)e^{St}dS =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_0^{\infty} f_1(\tau)\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_2(S)e^{-S(\tau - t)}dS\,d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_2(S)e^{-S(\tau - t)}dS\right]d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} f_1(\tau)\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_2(S)e^{S(t - \tau)}dS\right]d\tau$$

Finalmente:

$$£^{-1}\left[F_1(S)F_2(S)\right] = \int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau$$

Tomando-se $F_2(S) = \int_0^{\infty} f_2(\tau)\,e^{S\tau}d\tau$ na equação 2.59 relativa à anti-transformada de Laplace, após os cálculos e em analogia com o caso anterior, vem que:

$$£^{-1}\left[F_1(S)F_2(S)\right] = \int_0^{\infty} f_2(\tau)f_1(t - \tau)d\tau$$

Generalizando-se, vem que:

$$£\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right] = £\left[\int_0^{\infty} f_2(\tau)f_1(t - \tau)d\tau\right] = F_1(S)F_2(S)$$

Finalmente, para o intervalo $[0,t]$, tem-se que:

$$£\left[\int_0^{t} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right] = £\left[\int_0^{t} f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(S)F_2(S)$$

Notar que a mudança no limite superior $\infty$ para $t$ se deve a definição do intervalo $[0,t]$ uma vez que as funções $f_1(t-\tau)$ e $f_2(t-\tau)$ obedecem à relação onde

$$f_1(t-\tau) = f_2(t-\tau) = 0 \quad \text{para } \tau \geq t \qquad (2.74)$$

---

**EXEMPLO 2.12**

Sendo $t$ a variável independente tempo, determinar a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) degrau unitário, definido dentro do seguinte intervalo:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 0 \\ 1 & para\ t \geq 0 \end{cases}$$

b) impulso unitário, definido dentro do seguinte intervalo:

$$u_0(t) = \begin{cases} 0 & para\ t < 0 \ \text{ e } \ t > 0 \\ 1 & para\ t = 0 \end{cases}$$

**Solução:**

a) Degrau unitário:

Pela equação 2.57 tem-se que:

$$\pounds[u_{-1}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-St} dt = \left[ \frac{-1}{S} e^{-St} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{S}$$

Como, entre as transformações de Laplace e de Fourier, há necessidade do fator de convergência, tem-se que:

$$\pounds[u_{-1}(t)] = \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

onde $\sigma > 0$

b) Impulso unitário:

Sendo $£[f(t)] = F(S)$, pela equação 2.65, anterior, sabe-se que a transformada de Laplace da derivada de uma função $f(t)$ pode ser dada pela relação seguinte, aqui repetida por comodidade, ver propriedade 5:

$$£\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = SF(S) - f(0^+)$$

O impulso unitário tem a seguinte expressão:

$$u_0(t) = \begin{cases} 0 \ \ para\ t < 0 \ \ \text{e} \ \ t > 0 \\ 1 \ \ para\ t = 0 \end{cases}$$

Logo, para o impulso, $f(0^+) = 0$ o que permite que se escreva:

$$£\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = SF(S)$$

Agora, a transformada de Laplace da função degrau unitário é dada pela seguinte expressão, já devidamente calculada no item anterior desse exemplo:

$$£[u_{-1}(t)] = \frac{1}{S}$$

Porém, como se sabe, é guardada a seguinte relação entre as funções degrau e impulso:

$$u_0(t) = \frac{d}{dt}[u_{-1}(t)]$$

Assim, pela propriedade 5, a seguinte relação é justificada entre as transformadas de Laplace de ambas as funções:

$$£\{\frac{d}{dt}[u_{-1}(t)]\} = £[u_0(t)]$$

$$£\{\frac{d}{dt}[u_{-1}(t)]\} = S£[u_{-1}(t)] = S(\frac{1}{S}) = 1 \ \ \therefore \ \ £\{\frac{d}{dt}[u_0(t)]\} = 1$$

**Nota a respeito do exemplo 2.12:**

Na solução desse exemplo, houve várias referências às funções degrau e impulso, funções especiais que se desenvolvem no domínio do tempo.

Na realidade, essas funções são agrupadas naquilo que a literatura técnica de controle costumou chamar de funções singulares, um grupo de funções

específicas bastante utilizado como sinal de entrada para determinados sistemas de controle a fim de se conhecerem, através da resposta, as características próprias desses sistemas como função de seus parâmetros internos.

Algumas funções singulares são:

$$\vdots$$

$$u_{-2}(t) = \frac{d}{dt}[u_{-3}(t)] \Rightarrow \text{rampa unitária}$$

$$u_{-1}(t) = \frac{d}{dt}[u_{-2}(t)] \Rightarrow \text{degrau unitário}$$

$$u_{0}(t) = \frac{d}{dt}[u_{-1}(t)] \Rightarrow \text{impulso unitário}$$

$$u_{1}(t) = \frac{d}{dt}[u_{0}(t)] \Rightarrow \text{dublet unitário}$$

$$\vdots$$

---

**EXEMPLO 2.13**

Determinar a transformada de Laplace da função rampa unitária, definida pela seguinte equação:

$$u(t) = t$$

**Solução:**

Pela equação 2.57 tem-se que:

$$\pounds[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-St}dt = \int_0^\infty t\,e^{-St}dt$$

A solução da integral pode ser obtida através da referência 18 que fornece a seguinte fórmula para a integração anterior:

$$\int x\,e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}(x - \frac{1}{a})$$

Assim, a partir da fórmula recursiva anterior, considerando-se $x = t$ e $a = -S$, vem o seguinte:

$$\pounds[t] = \left[\frac{e^{-St}}{-S}(t - \frac{1}{-S})\right]_0^\infty = \left[-\frac{e^{-St}}{S}(t + \frac{1}{S})\right]_0^\infty = \frac{1}{S^2}$$

## EXEMPLO 2.14

Determinar a transformada de Laplace da função seno, definida pela seguinte equação:

$$u(t) = sen\,\omega t$$

onde $\omega = 2\pi f$ e $f$ é a freqüência da função dada em ciclos por segundo, por exemplo.

**Solução:**

Pela equação 2.57 tem-se que:

$$\pounds[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-St}dt = \int_0^\infty sen(\omega t)e^{-St}dt$$

A solução da integral pode ser obtida a partir da referência 18 que fornece a seguinte fórmula para a integração anterior:

$$\int e^{ax} sen(bx)dx = \frac{e^{ax}[a\,sen(bx) - b\cos(bx)]}{a^2 + b^2}$$

Assim, a partir da fórmula recursiva obtida, considerando-se $x = t$ e $a = -S$, vem o seguinte:

$$\pounds[sen(\omega t)] = \left[\frac{e^{-St}[-S\,sen(\omega t) - \omega\cos(\omega t)]}{(-S)^2 + \omega^2}\right]_0^\infty = \left[\frac{e^{-St}[-S\,sen(\omega t) - \omega\cos(\omega t)]}{S^2 + \omega^2}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$$

---

## EXEMPLO 2.15

Determinar a transformada de Laplace da função $u(t)$, definida pela seguinte equação:

$$u(t) = \frac{b\,e^{bt} - c\,e^{ct}}{b - c}$$

onde $c \neq b$, sendo $e$ a base dos logaritmos neperianos ou naturais.

**Solução:**

Pela equação 2.57 tem-se que:

$$£[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-St}dt = \int_0^{\infty} (\frac{b e^{bt} - c e^{ct}}{b-c}) e^{-St} dt$$

A equação anterior pode ser desmembrada conforme o seguinte procedimento:

$$£[u(t)] = \frac{b}{b-c}\int_0^{\infty} e^{bt} e^{-St} dt - \frac{c}{b-c}\int_0^{\infty} e^{ct} e^{-St} dt =$$

$$= \frac{b}{b-c}\int_0^{\infty} e^{(b-S)t} dt - \frac{c}{b-c}\int_0^{\infty} e^{(c-S)t} dt$$

A solução das integrais anteriores pode ser obtida a partir da referência 18 que fornece a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

Assim, a partir da fórmula recursiva anteriormente mostrada, considerando-se primeiramente $x = t$ e $a = (b-S)$ e, depois, $a = (c-S)$, vem o seguinte:

$$£[u(t)] = £[u_1(t)] - £[u_2(t)]$$

$$£\left[u_1(t)\right] = \frac{b}{b-c}\int_0^{\infty} e^{(b-S)t} dt = \frac{b}{b-c}\int_0^{\infty} e^{(b-S)t} dt = \frac{b}{b-c}\left[\frac{e^{(b-S)t}}{b-S}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{b}{b-c}\frac{(-1)}{b-S} = -\frac{b}{(b-c)(b-S)}$$

E também se tem:

$$£\left[u_2(t)\right] = \frac{c}{b-c}\int_0^{\infty} e^{(c-S)t} dt = \frac{c}{b-c}\int_0^{\infty} e^{(c-S)t} dt = \frac{c}{b-c}\left[\frac{e^{(c-S)t}}{c-S}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{c}{b-c}\frac{(-1)}{c-S} = -\frac{c}{(b-c)(c-S)} = -\frac{c}{(b-c)(c-S)}$$

Deste modo, a transformada de Laplace da função *u(t)*, definida anteriormente, será dada por:

$$£\left[u(t)\right] = -\frac{b}{(b-c)(b-S)} - [-\frac{c}{(b-c)(c-S)}] = \frac{c}{(b-c)(c-S)} - \frac{b}{(b-c)(b-S)} =$$

$$= \frac{c}{(b-c)(c-S)} - \frac{b}{(b-c)(b-S)} = \frac{b}{(b-c)(S-b)} - \frac{c}{(b-c)(S-c)}$$

Assim, a anti-transformada de Laplace da função $£\left[u(t)\right]$, definida, será dada por:

$$£\left[u(t)\right] = \frac{b}{(b-c)(S-b)} - \frac{c}{(b-c)(S-c)} = \frac{S}{(S-b)(S-c)}$$

**Nota a respeito do exemplo 2.15:**

Na solução desse exemplo, na determinação do valor da integral definida, houve a necessidade de se impor duas condições especiais para que a solução fosse atingida.

No caso, a solução das transformadas $£\left[u_1(t)\right]$ e $£\left[u_2(t)\right]$ trouxe para o processo analítico um complicador quando se tentou calcular o valor da expressão para o limite superior da integral definida. Observa-se o fato pela seguinte equação aqui repetida:

$$£\left[u_1(t)\right] = \frac{b}{b-c}\left[\frac{e^{(b-S)t}}{b-S}\right]_0^{\infty} = \frac{b}{b-c}[\lim_{t \to \infty}\frac{e^{(b-S)t}}{b-S} - \lim_{t \to 0}\frac{e^{(b-S)t}}{b-S}] =$$

$$= \frac{b}{b-c}[\lim_{t \to \infty}\frac{e^{(b-S)t}}{b-S} - \frac{1}{b-S}]$$

Por outro lado, também se tem o mesmo problema na seguinte equação:

$$£\left[u_2(t)\right] = \frac{c}{b-c}\left[\frac{e^{(c-S)t}}{c-S}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{b-c}[\lim_{t \to \infty}\frac{e^{(c-S)t}}{c-S} - \lim_{t \to 0}\frac{e^{(c-S)t}}{c-S}] =$$

$$= \frac{c}{b-c}[\lim_{t \to \infty}\frac{e^{(c-S)t}}{c-S} - \frac{1}{c-S}]$$

Se a referência 18 for consultada, obtém-se, para a transformada de Laplace da função $£\left[u(t)\right]$, a fórmula recursiva $£\left[u(t)\right] = \frac{S}{(S-b)(S-c)}$ o que confirma

o resultado do cálculo do exemplo, porém levando-se em conta a condição específica de que a soma das expressões relativas aos limites superiores da integral definida tendesse a zero,

ou seja:

$$£\,[u(t)] = \frac{b}{b-c}[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(b-S)t}}{b-S} - \frac{1}{b-S}] - \frac{c}{b-c}[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(c-S)t}}{c-S} - \frac{1}{c-S}] =$$

$$= \frac{S}{(S-b)(S-c)} + \frac{b}{b-c}[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(b-S)t}}{b-S}] - \frac{c}{b-c}[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(c-S)t}}{c-S}]$$

Onde

$$\frac{b}{b-c}[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(b-S)t}}{b-S}] - \frac{c}{b-c}[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(c-S)t}}{c-S}] \Rightarrow 0 \qquad (2.75)$$

O que realmente aconteceu aqui nessa situação particular foi a repetição do problema que foi abordado anteriormente na definição da transformada de Fourier quando se observou a questão da não convergência no processo de transformada de certas funções temporais.
A equação 2.75 mostra que para haver convergência torna-se necessário que a soma das parcelas dos dois limites tendam a zero.
No caso, ambos os expoentes $(b-S)t$ e $(c-S)t$ deverão apresentar valores negativos o que garantiria a convergência.
Em outras palavras, para todo $t > 0$, a convergência apenas se dará quando:

$$(b-S)t = (b-\sigma-j\omega) \;\therefore\; (b-\sigma) < 0$$
$$(c-S)t = (c-\sigma-j\omega) \;\therefore\; (c-\sigma) < 0$$

Mais à frente, com a utilização do método de Heaviside para a determinação da transformada de Laplace pela utilização do método das frações polinomiais, esse exemplo será recalculado.

---

**EXEMPLO 2.16**

Sendo *t* a variável independente tempo, encontrar a transformada de Laplace da seguinte função de transferência referente à resposta de um sistema de controle do tipo primeira ordem:

$$u(t) = e^{at} \Rightarrow \text{ para todo } t \text{ real}$$

onde $a$ é uma constante podendo ser um número real ou complexo.

**Solução:**

Pela equação 2.57 tem-se que:

$$£[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-St} dt = \int_0^{\infty} e^{-(S-a)t} dt$$

Utilizando do mesmo raciocínio desenvolvido no exemplo 2.15, anteriormente resolvido, pode-se escrever que:

$$\int_0^{\infty} e^{-(S-a)t} dt = \left[ \frac{-1}{(S-a)} e^{-(S-a)t} \right]_0^{\infty} =$$

$$= -\left[ \frac{e^{-(S-a)t}}{(S-a)} \right]_0^{\infty} = -[ \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(S-a)t}}{(S-a)} - \lim_{t \to 0} \frac{e^{-(S-a)t}}{(S-a)} ] =$$

$$= \frac{1}{(S-a)}$$

Deste modo, a transformada de Laplace $u(t) = e^{at}$, onde $a$ é uma constante, podendo ser um número real ou complexo, será sempre dada por:

$$£\left[ e^{at} \right] == \frac{1}{(S-a)}$$

**Nota a respeito do exemplo 2.16:**

Uma das mais importantes transformadas de Laplace verificadas na solução de equações diferenciais associadas a sistemas físicos, principalmente a sistemas de controle automático, é a transformada de Laplace da função $e^{at}$. Essa função vem sempre relacionada com soluções, tanto das equações diferencias quanto das transformadas de Laplace, o que permite uma resolução analítica direta quando são utilizadas as técnicas aplicando o método de Heaviside.

---

## 2.2.6. Método do Desenvolvimento em Frações Parciais

A transformação de Laplace, como já foi citada anteriormente, tem a importante propriedade de transformar equações diferenciais complexas em simples equações algébricas cuja solução é bem mais facilitada.
Um dos métodos de manipulação de tais equações algébricas é o chamado método de desenvolvimento em frações parciais, método esse que emprega algumas propriedades do conceito de transformada de Laplace associado ao processo de decomposição de tais equações em frações parciais tal como é observado na teoria de polinômios.
Esse método se baseia nos conhecidos teoremas de Heaviside que serão aqui agrupados num conceito único que retrata a aplicação de tais teoremas.
Para que o raciocínio seja desenvolvido, o esquema mostrado na figura 2.9 será adotado. Trata-se de um sistema com realimentação que pode facilmente representar o processo de controle e regulação de um determinado sistema de controle.
O interessante desse sistema de controle é que ele representa um sistema de controle com realimentação negativa, um tipo específico de implementação bastante utilizada tanto na área de regulação de velocidade de turbinas hidráulicas quanto na área de regulação de tensão de máquinas síncronas.

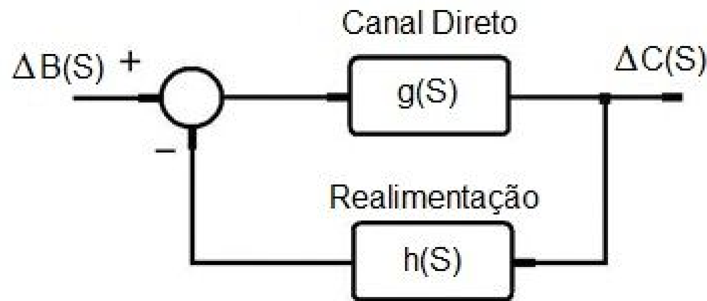



***Figura 2.9 – Sistema de Controle com Realimentação***

Na figura 2.9 considerar:

$$g(S) = K_G \frac{\pi_{i=1}^{q}(S - Z_{Gi})}{\pi_{i=1}^{p}(S - P_{Gi})} \tag{2.76}$$

$$h(S) = K_H \frac{\pi_{i=1}^{w}(S - Z_{Hi})}{\pi_{i=1}^{r}(S - P_{Hi})} \tag{2.77}$$

onde *p,q,r,w* são números inteiros e *p,q,r,w* > *1*.

Nas equações 2.76 e 2.77, considerar $Z_{Gi}$ e $Z_{Hi}$ os respectivos zeros das funções $g(S)$ e $h(S)$; e $Z_{Gi}$ e $P_{Gi}$ os respectivos pólos.

A função de transferência em malha fechada do sistema mostrado na figura 2.9 é a seguinte:

$$\frac{\Delta C(S)}{\Delta B(S)} = \frac{g(S)}{1 + g(S)h(S)} \tag{2.78}$$

A resposta do sistema a uma excitação $\Delta B(S) = \frac{1}{S}$ na forma de um degrau unitário será dada pela expressão seguinte:

$$\Delta C(S) = \frac{g(S)}{1 + g(S)h(S)} \Delta B(S) = \frac{g(S)}{1 + g(S)h(S)} \tag{2.79}$$

$$\Delta C(S) =$$

$$= \frac{K_G \Pi_{i=1}^{q} (S - Z_{Gi}) \, \Pi_{i=1}^{r} (S - P_{Hi})}{[\Pi_{i=1}^{p} (S - P_{Gi}) \, \Pi_{i=1}^{r} (S - P_{Hi}) + K_G K_H \Pi_{i=1}^{q} (S - Z_{Gi}) \, \Pi_{i=1}^{w} (S - Z_{Hi})]S} \tag{2.80}$$

A equação 2.80 também pode ter a seguinte expressão:

$$\Delta C(S) = \frac{N(S)}{S D(S)} = \frac{K_G}{S} \frac{\Pi_{i=1}^{v} (S - Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t} (S - P_i)} = \frac{A_0}{S} + \frac{A_1}{S - P_1} + \frac{A_2}{S - P_2} + \dots + \frac{A_n}{S - P_n} \tag{2.81}$$

onde *t, v* são números inteiros e *t, v* > *1*.

Na equação 2.81 $Z_i$ e $P_i$ são, respectivamente, os zeros e os pólos da função de transferência do diagrama de blocos da figura 2.9, enquanto que $N(S)$ e $D(S)$ são, respectivamente, os polinômios numerador e denominador da função de transferência.
Os resíduos do desenvolvimento em frações parciais são dados pelo método de Heaviside sintetizado nas equações seguintes:

$$A_0 = \lim_{S \to 0} K_G \frac{\Pi_{i=1}^{v}(S - Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S - P_i)} = \frac{N(0)}{D(0)} \tag{2.82}$$

$$A_n = \lim_{S \to Pn} (S - P_n) \frac{K_G}{S} \frac{\Pi_{i=1}^{v}(S - Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S - P_i)} = \frac{N(P_n)}{P_n D(P_n)} \tag{2.83}$$

Existem três situações que podem ser verificadas na prática com relação aos pólos da função de transferência.

**Nota a respeito de função de transferência por transformada de Laplace:**

A equação da função de transferência, utilizando-se da técnica da transformada de Laplace, também é conhecida como função de transferência no plano complexo e resume todas as características do modelo do sistema enfocado.
Quando tal função de transferência é adotada, levando-se em conta o esquema de um sistema de controle conforme é mostrado na figura 2.9, um dos principais argumentos é a discussão acerca da estabilidade operativa desse tal modelo. Para isso torna-se importante a obtenção e análise da chamada equação característica do modelo, equação esta que nada mais é que o polinômio do denominador dessa mesma função de transferência trabalhando-se no plano complexo. Em outras palavras, a equação $1 + g(S)h(S)$, da equação 2.79 trata-se da equação característica do modelo aqui representado.
As raízes desse polinômio representam os chamados pólos da função de transferência do modelo e conforme os valores assumidos por esses pólos o sistema pode ser avaliado quanto a sua estabilidade operacional.

## 2.2.6.1. Sistema do Tipo Raízes Complexas

A primeira situação que pode ser verificada é o aparecimento de dois pólos complexos, conjugados e dominantes e, neste caso, a resposta no domínio do tempo do sistema mostrado na figura 2.9, a uma excitação na forma de um degrau unitário, será dada pela expressão seguinte em função dos parâmetros já conhecidos, ver referências 8 e 28.

$$\Delta C(t) = A_0 + 2Ae^{\sigma t}\cos(\omega_d t + \varphi_1) + \sum_{i=3}^{n} A_i e^{P_i t} \tag{2.84}$$

Na equação 2.84 considerar que:

$$P_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}\, e^{\pm j\theta}$$

$$\sigma = -\xi\,\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$P_1 P_2 = \sigma^2 + \omega_d^2$$

$$P_1 - P_2 = 2j\,\omega_d$$

$$A = |A_1| = |A_2|$$

$$\varphi_1 = arg(A_1) \text{ com } 0 \le \varphi_1 \le 2\pi$$

Nas expressões anteriores considerar o parâmetro $\xi$ como sendo o coeficiente de amortecimento e o parâmetro $\omega_d$ como sendo a freqüência natural amortecida, em *rad/s*, de um sistema padrão de segunda ordem, conforme discutido na referência 12. Lembrar que o parâmetro $\omega_n$, considerando-se a mesma referência, trata-se da freqüência natural não amortecida em *rad/s*.

Os coeficientes $A_1$ e $A_2$ são números complexos conjugados e juntamente com $A_0$ têm as seguintes expressões, já em se considerando as relações da equação 2.83:

$$A_0 = \lim_{S \to 0} K_G \frac{(S - Z_1)}{(S - P_1)(S - P_2)} = \frac{K_G(-Z_1)}{(-P_1)(-P_2)} = -\frac{K_G Z_1}{(\sigma^2 + \omega_d^2)} \qquad (2.85)$$

$$A_1 = \lim_{S \to P_1} K_G \frac{(S - Z_1)}{S(S - P_2)} = \frac{K_G(P_1 - Z_1)}{(P_1)(P_1 - P_2)} = \frac{K_G(\sigma - Z_1 + j\omega_d)}{(\sigma + j\omega_d)(2j\,\omega_d)} \qquad (2.86)$$

Para $(\sigma - Z_1) + j\omega_d = \sqrt{(\sigma - Z_1)^2 + \omega_d^2}\, e^{j\varphi}$, seguem as expressões para os coeficientes $A_1$ e $A_2$.

$$A_1 = \frac{K_G}{2j\,\omega_d} \frac{\sqrt{(\sigma - Z_1)^2 + \omega_d^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}} e^{+j\varphi} = \frac{K_G}{2\,\omega_d} \frac{\sqrt{(\sigma - Z_1)^2 + \omega_d^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}} e^{j(\varphi - \theta - \pi/2)}$$

$$A_2 = \frac{K_G}{2j\,\omega_d} \frac{\sqrt{(\sigma - Z_1)^2 + \omega_d^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}} e^{-j\varphi} = \frac{K_G}{2\,\omega_d} \frac{\sqrt{(\sigma - Z_1)^2 + \omega_d^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}} e^{-j(\varphi - \theta - \pi/2)}$$

(2.87)

Como o presente sistema sob análise, por suposição, apresenta dois pólos complexos, conjugados e dominantes, a resposta geral representada pela equação 2.81 poderá ser aproximada para a seguinte equação:

$$\Delta C(S) = \frac{A_0}{S} + \frac{|A_1| e^{j(\varphi-\theta-\pi/2)}}{S-(\sigma+j\omega_d)} + \frac{|A_2| e^{-j(\varphi-\theta-\pi/2)}}{S-(\sigma-j\omega_d)} \qquad (2.88)$$

Passando a equação 2.88 para o domínio do tempo vem que:

$$\Delta C(t) = A_0 + |A_1| e^{j(\sigma+j\omega_d)t} e^{j(\varphi-\theta-\pi/2)} + |A_2| e^{j(\sigma-j\omega_d)t} e^{j(\varphi-\theta-\pi/2)}$$

Como $A = |A_1| = |A_2|$, a equação anterior tomará a seguinte forma:

$$\Delta C(t) = A_0 + A\, e^{j(\sigma+j\omega_d)} e^{j(\varphi-\theta-\pi/2)} + A\, e^{j(\sigma-j\omega_d)} e^{-j(\varphi-\theta-\pi/2)} =$$

$$= A_0 + 2A\, e^{j\sigma t} \frac{e^{j(\omega_d t+\varphi-\theta-\pi/2)} + e^{-j(\omega_d t+\varphi-\theta-\pi/2)}}{2}$$

Das equações de Euler, sabe-se, para um argumento $\theta\cdot$, que:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

O que permite ainda que a equação anterior de $\Delta C(t)$ tome a nova forma mais compacta seguinte:

$$\Delta C(t) = A_0 + 2A e^{j\sigma t} \cos(\omega_d t + \varphi - \theta - \pi/2)$$

E ainda, sendo $arg(A_1) = (\varphi - \theta - \pi/2)$ implica que:

$$\Delta C(t) = A_0 + 2A\, e^{j\sigma t} \cos[\omega_d t + arg(A_1)] \qquad (2.89)$$

A equação 2.89, trata-se da resposta ao degrau do sistema montado na figura 2.9 cujas funções de transferência estão representadas por $g(S)$ e $h(S)$.

Evidentemente que a polaridade do parâmetro $\sigma$ ditará a situação operativa do sistema em termos de estabilidade. Para $\sigma > 0$ o sistema será instável, porém para $\sigma < 0$ o sistema será estável. Caso $\sigma = 0$ o sistema será do tipo oscilante contínuo.
Eis a importância do conhecimento do valor desse parâmetro para efeito de condicionamento operacional do sistema de controle.

## 2.2.6.2. Sistema do Tipo Raízes Reais Distintas

A segunda situação que pode ser verificada é aquela que vem associada ao aparecimento de raízes reais distintas caracterizando o aparecimento de pólos reais e não repetidos na função de transferência de malha fechada do sistema. Neste caso, a fórmula de Heaviside fornece, diretamente, a solução sem maiores problemas para a resposta do sistema a um sinal de excitação na forma de um degrau unitário.

$$\Delta C(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{P_i t} \tag{2.90}$$

O resultado é obtido a partir da aplicação direta da equação 2.81 anteriormente descrita.

## 2.2.6.3. Sistema do Tipo Raízes Reais Repetidas

No caso da existência de pólos com certo número de repetição, a fórmula recursiva será:

$$P_{m+1} = P_{m+2} = P_{m+3} = \ldots = P \tag{2.91}$$

A resposta do sistema que admite a presença de pólos repetidos, segundo a equação 2.91, a um sinal de excitação na forma de um degrau unitário, será dada pela equação seguinte:

$$\Delta C(S) = \frac{K_G}{S} \frac{\Pi_{i=1}^{v}(S-Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S-P_i)} =$$

$$= \frac{A_0}{S} + \frac{A_1}{S-P_1} + \frac{A_2}{S-P_2} + \ldots + \frac{A_m}{S-P_m} + \frac{A_{m+1}}{(S-P)} + \frac{A_{m+2}}{(S-P)^2} + \frac{A_{m+3}}{(S-P)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(S-P)^{n-m}}$$

(2.92)

$$A_{m+1} = \frac{1}{(r-i)!}\left\{ \lim_{S \to P} \left[ \frac{d^{r-i}}{dS^{r-i}} \frac{K_G}{S} \frac{\Pi_{i=1}^{v}(S-Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S-P_i)} (S-P)^r \right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{(r-i)!}\left\{ \frac{d^{r-i}}{dS^{r-i}} \left[ \frac{N(S)}{S\,D(S)} (S-P)^r \right]\right\}_{S=P}$$

(2.93)

$$i = 1,2,3,\ldots,(n-m)$$
$$r = n-m$$

No domínio do tempo, finalmente, tem-se para a resposta do sistema:

$$\Delta C(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i e^{P_i t} + e^{P t} \sum_{i=1}^{n-m} A_{m+1} \frac{t^{(i-1)}}{(i-1)!} \qquad (2.94)$$

---

**<u>EXEMPLO 2.17</u>**

Seja a seguinte função de transferência de um sistema de controle do tipo segunda ordem:

$$F(S) = \frac{S}{S^2 + S + 1}$$

onde $S$ é a variável complexa de Laplace cuja dimensão é $[s]^{-1}$.

A partir do que já foi estudado, pedem-se:

a) o coeficiente de amortecimento, as freqüências amortecida e não amortecida
desse mesmo sistema;

b) a resposta do sistema a uma entrada na forma de um degrau unitário;

c) o gráfico dessa função no domínio do tempo observando se ela é estável ou instável.

**Solução:**

a)

Fatorando-se o polinômio do denominador da função de transferência original vem que:

$$F(S) = \frac{S}{S^2 + S + 1} = \frac{S}{(S - P_1)(S - P_2)}$$

A equação característica desta função de transferência permite a obtenção das raízes que são os pólos, ou seja:

$$(S - P_1)(S - P_2) \equiv [S - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})]\,[S - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})]$$

Assim, os pólos serão:

$$P_{1,2} \equiv S-(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1{,}0\, e^{\pm j120^o} = \sigma \pm j\,\omega_d = \sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}\; e^{j\theta}$$

O modelo padrão para a equação característica de uma função de transferência, considerando-se um sistema do tipo segunda ordem, é dado pela seguinte equação:

$$Q(S) \equiv S^2 + 2\xi\,\omega_n\, S + \omega_n^2 \qquad (2.95)$$

Comparando cada parcela da equação característica padrão 2.95 com a equação característica dada pela função de transferência do problema, obtêm-se os valores do coeficiente de amortecimento $\xi$ e da freqüência natural não amortecida $\omega_n$ do sistema:

$$\omega_n^2 = 1 \;\;\therefore\;\; \omega_n = 1 \;\; rad/s$$

$$2\xi\,\omega_n = 1 \;\;\therefore\;\; \xi = \frac{1}{2} \; [sem\ dimensão]$$

Quanto à freqüência natural amortecida $\omega_d$, pode-se utilizar da equação 2.84 ou então obter diretamente o valor a partir do próprio pólo tomando-se a parte imaginária da raiz. Assim vem que:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1{,}0\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; rad/s$$

b)

A resposta ao degrau do sistema, cuja função de transferência foi dada, pode ser obtida através da equação 2.89 que será aqui repetida por comodidade.

$$\Delta C(t) = A_0 + 2A\; e^{j\sigma t} \cos[\omega_d\, t + arg(A_1)]$$

Da equação 2.87, sabe-se que o argumento de $A_1$ é dado por:

$$arg(A_1) = \varphi - \theta - \pi/2\,.$$

Onde

$$(\sigma - Z_1) + j\omega_d = \sqrt{(\sigma - Z_1)^2 + \omega_d^2}\; e^{j\varphi} \;\;\therefore\;\; arg[(\sigma - Z_1) + j\omega_d] = \varphi$$

$$\sigma + j\omega_d = \sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}\; e^{j\theta} \;\;\therefore\;\; arg(\sigma + j\omega_d) = \theta$$

Como no presente problema, não existem zeros na função de transferência, tem-se que $Z_1 = 0$ com $\varphi = \theta \;\therefore\; \varphi - \theta = 0$.

Logo

$$arg(A_1) = -\pi/2 \text{ rad}$$

Deste modo, a equação da resposta do sistema ao degrau, sistema representado pela função de transferência dada no enunciado, tomará a seguinte forma:

$$\Delta C(t) = 2\,A\,e^{j\sigma t}\cos(\omega_d t - \frac{\pi}{2}) = 2\,A\,e^{j\sigma t}\,sen(\omega_d t)$$

Calculando o valor de $A$ a partir da equação 2.86 de $A_1$ aqui repetida.

$$A = |A_1| = \left|\frac{K_G(P_1 - Z_1)}{(P_1)(P_1 - P_2)}\right| = \frac{K_G(\sigma - Z_1 + j\omega_d)}{(\sigma + j\omega_d)(2j\,\omega_d)}$$

Para $Z_1 = 0$ e $K_G = 1$ vem que:

$$A = |A_1| = \left|\frac{(P_1 - 0)}{(P_1)(P_1 - P_2)}\right| = \left|\frac{(\sigma + j\omega_d)}{(\sigma + j\omega_d)(2j\,\omega_d)}\right| = \frac{1}{2\,\omega_d}$$

Assim, a equação da resposta ao degrau será agora:

$$\Delta C(t) = 2\frac{1}{2\,\omega_d}\,e^{j\sigma t}\,sen(\omega_d t) = \frac{1}{\omega_d}\,e^{j\sigma t}\,sen(\omega_d t)$$

Colocando as expressões de $\sigma$ e $\omega_d$ já conhecidas finalmente vem que:

$$\Delta C(t) = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-j\,\xi\,\omega_n t}\,sen(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t)$$

c)

Para o traçado do gráfico da resposta no domínio do tempo será utilizado o recurso da simulação.

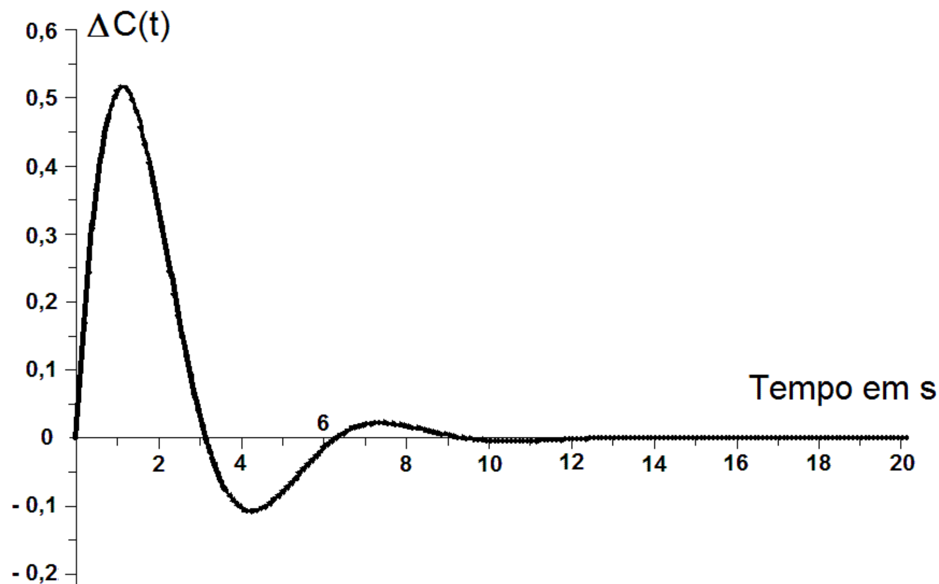



***Figura 2.10 – Resposta no Tempo do Sistema do Exemplo 2.17***

Quanto à estabilidade geral dessa função, pode-se dizer que a resposta do sistema é estável.

**Nota sobre estabilidade de sistemas de controle**

Um sistema linear será definido como estável, no sentido clássico, se, e somente se, todos os pólos associados à equação característica da função de transferência do sistema de malha fechada forem negativos ou, para o caso de incidência de pólos complexos, estes apresentarem suas partes reais negativas. Caso contrário, se pelo menos um desses pólos for positivo ou, no caso de pólos complexos, apresentar sua parte real positiva o sistema será declarado instável.

Nota-se que esta definição é bem rigorosa, uma vez que ela não admite pólo simples no eixo imaginário, em outras palavras, pólos cuja parte real seja nula.

A idéia de estabilidade vem associada ao fato de que todos os componentes da resposta do sistema decrescerão ao longo do tempo para zero ou para outro valor finito e possível.

Quando o sistema admitir pólos cuja parte real seja nula ele será dito sistema marginalmente estável.

---

**<u>EXEMPLO 2.18</u>**

Encontrar a anti-transformada de Laplace da seguinte função de transferência de um determinado sistema de controle:

$$F(S)=\frac{1}{S(S+1)^3}$$

onde $S$ é a variável complexa de Laplace cuja dimensão é $[s]^{-1}$.

**Solução:**

Numa primeira vista, trata-se de uma condição em que o polinômio do numerador apresenta pólos com repetição.

Analisando por comparação com a equação 2.92, tem-se o seguinte:

$$\Delta C(S)=\frac{K_G}{S}\frac{\Pi_{i=1}^{v}(S-Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S-P_i)}=\frac{1}{S}\frac{1}{\Pi_{i=1}^{3}(S-P)^3}=$$

$$=\frac{A_0}{S}+\frac{A_1}{S-P_1}+\frac{A_2}{S-P_2}+...+\frac{A_m}{S-P_m}+\frac{A_{m+1}}{(S-P)}+\frac{A_{m+2}}{(S-P)^2}+\frac{A_{m+3}}{(S-P)^3}+...+\frac{A_n}{(S-P)^{n-m}}$$

Os termos em $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$ da equação anterior são nulos, pois não existem nesta função de transferência raízes reais do tipo $P_i \neq 0$ para $i=1,2,3,...,m$.

Deste modo, a função de transferência em questão toma a seguinte forma mais simplificada:

$$\Delta C(S)=\frac{K_G}{S}\frac{\Pi_{i=1}^{v}(S-Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S-P_i)}=\frac{1}{S}\frac{1}{\Pi_{i=1}^{3}(S-P)^3}=$$

$$=\frac{A_0}{S}+\frac{A_m}{S-P_m}+\frac{A_{m+1}}{(S-P)}+\frac{A_{m+2}}{(S-P)^2}+\frac{A_{m+3}}{(S-P)^3}+...+\frac{A_n}{(S-P)^{n-m}}$$

Assim, nota-se que para $(n-m)=3 \ e \ sendo \ m=0 \ \therefore \ n=3$.

Reescrevendo a função de transferência em questão para $P=-1$, vem:

$$\Delta C(S)=\frac{K_G}{S}\frac{\Pi_{i=1}^{v}(S-Z_i)}{\Pi_{i=1}^{t}(S-P_i)}=\frac{1}{S}\frac{1}{\Pi_{i=1}^{3}(S-P)^3}=\frac{A_0}{S}+\frac{A_1}{(S-P)}+\frac{A_2}{(S-P)^2}+\frac{A_3}{(S-P)^3}$$

Cálculo de $A_0$:

$$A_0=\lim_{S\to 0} S[\frac{1}{S}\frac{1}{\Pi_{i=1}^{3}(S-P)^3}]=\frac{1}{(-P)^3}=-\frac{1}{P^3}=-\frac{1}{(-1)^3}=1$$

a) Cálculo de $A_1$ da nova função de transferência decomposta em frações parciais utilizando-se da equação 2.93 com $r=(n-m)=3$ e $P=-1$:

$$i=1$$
$$r-i=3-1=2$$
$$m+1=1$$

$$A_1=\frac{1}{(2)!}\{\frac{d^2}{dS^2}[\frac{N(S)}{SD(S)}(S-P)^3]\}_{S=P}=\frac{1}{2}\{\frac{d^2}{dS^2}[\frac{1}{S(S-P)^3}(S-P)^3]\}_{S=-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\{\frac{d^2}{dS^2}[\frac{1}{S}]\}_{S=-1}=\frac{1}{2}\{\frac{d}{dS}[-\frac{1}{S^2}]\}_{S=-1}=-\frac{1}{2}\{\frac{-2S}{S^4}\}_{S=-1}=-1$$

b) Cálculo de $A_2$ da nova função de transferência decomposta em frações parciais utilizando-se da equação 2.93 com $r=(n-m)=3$ e $P=-1$:

$$i=2$$
$$r-i=3-2=1$$
$$m+2=2$$

$$A_2=\frac{1}{(1)!}\{\frac{d}{dS}[\frac{N(S)}{SD(S)}(S-P)^3]\}_{S=P}=\{\frac{d}{dS}[\frac{1}{S(S-P)^3}(S-P)^3]\}_{S=-1}=$$
$$=\{\frac{d}{dS}[\frac{1}{S}]\}_{S=-1}=\{[-\frac{1}{S^2}]\}_{S=-1}=-1$$

c) Cálculo de $A_3$ da nova função de transferência decomposta em frações parciais utilizando-se da equação 2.93 com $r=(n-m)=3$ e $P=-1$:

$$i=3$$
$$r-i=3-3=0$$
$$m+3=3$$

$$A_1=\frac{1}{(0)!}\{[\frac{N(S)}{SD(S)}(S-P)^3]\}_{S=P}=\{[\frac{1}{S(S-P)^3}(S-P)^3]\}_{S=-1}=$$
$$=\{[\frac{1}{S}]\}_{S=-1}=-1$$

Agora será possível, a partir da equação 2.94, compor a resposta pedida. A equação 2.94, de maneira geral é a seguinte, eliminando-se a parcela relativa às raízes reais do tipo $P_i \neq 0$ para $i=1,2,3,...,m$. :

$$\Delta C(t) = A_0 + e^{Pt}\sum_{i=1}^{3} A_{m+1}\,\frac{t^{(i-1)}}{(i-1)!} = A_0 + e^{Pt}[A_1\frac{t^0}{(0)!} + A_2\frac{t^1}{(1)!} + A_3\frac{t^2}{(2)!}] =$$

$$= 1 + e^{-t}[-1 - t - \frac{t^2}{2}] = 1 - e^{-t} - t\,e^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t}$$

Finalmente a resposta procurada será:

$$\Delta C(t) = 1 - e^{-t} - t\,e^{-t} - \frac{t^2}{2}e^{-t}$$

---

**EXEMPLO 2.19**

Determinar a anti-transformada de Laplace da função de transferência $F(S)$, definida pela seguinte equação:

$$F(S) = \frac{S}{(S-b)(S-c)}$$

onde $c \neq b$. Considerar como sendo $e$ a base dos logaritmos neperianos ou naturais.

**Solução:**

Para a solução deste problema será utilizado o método de Heaviside que consiste na decomposição da função de transferência dada em frações parciais.

Assim, pela utilização da equação 2.81 considerando os seguintes parâmetros $P_1 = b$ e $P_2 = c$ vem que:

$$F(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{S}{\prod_{i=1}^{2}(S-P_i)} = \frac{A_1}{S-P_1} + \frac{A_2}{S-P_2} = \frac{A_1}{S-b} + \frac{A_2}{S-c}$$

Os resíduos, ou os coeficientes da decomposição em frações parciais relativos à função de transferência em questão serão dados pela equação 2.83 já simplificada:

$$A_n = \lim_{S \to P_n}(S-P_n)\frac{S}{\prod_{i=1}^{2}(S-P_i)}$$

Assim, com $P_1 = b$ e $P_2 = c$ vem que:

$$A_1 = \lim_{S \to b} (S-b) \frac{S}{(S-b)(S-c)} = \frac{b}{(b-c)}$$

$$A_2 = \lim_{S \to c} (S-c) \frac{S}{(S-b)(S-c)} = \frac{c}{(c-b)}$$

Logo, a função de transferência já decomposta segundo o método de Heaviside será:

$$F(S) = \frac{S}{(S-b)(S-c)} \equiv \frac{b}{(b-c)} \frac{1}{(S-b)} + \frac{c}{(c-b)} \frac{1}{(S-c)}$$

Pela utilização da equação 2.90 é possível a obtenção direta a anti-transformada de Laplace da função $F(S)$ dada. Senão veja-se:

$$\pounds^{-1}[F(S)] = \sum_{i=1}^{2} A_i e^{P_i t} \text{ com } P_1 = b \text{ e } P_2 = c$$

Logo, a anti-transformada de Laplace da função dada será:

$$\pounds^{-1}[F(S)] = \frac{b e^{bt}}{b-c} - \frac{c e^{ct}}{b-c} = \frac{b e^{bt} - c e^{ct}}{b-c}$$

Comparar essa resposta com a resposta do exemplo 2.15 anterior.

---

## 2.2.7. Servomecanismo

### 2.2.7.1. Diagrama de Blocos

Servomecanismo é o nome dado a determinados sistemas de controle que são destinados a alcançar um comando ou ação através de dispositivos mecânicos de maneira segura, precisa e confiável.
O controle de ação desses dispositivos normalmente é dotado de sistemas eletrônicos dedicados cuja essência se compõe de elementos de englobam tecnologias tanto de eletrônica analógica quanto de eletrônica digital. Os elementos digitais podem ainda pertencer à ordem de eletrônica combinacional quanto da ordem de eletrônica seqüencial.

No servomecanismo, uma das ferramentas básicas de análise e estudo é caracterizada pela utilização dos diagramas em blocos com funções de transferência específicas no plano complexo, ou seja, funções de transferência na forma de transformada de Laplace.
A figura 2.11 seguinte mostra um exemplo simples de um diagrama de blocos com suas funções de transferência.

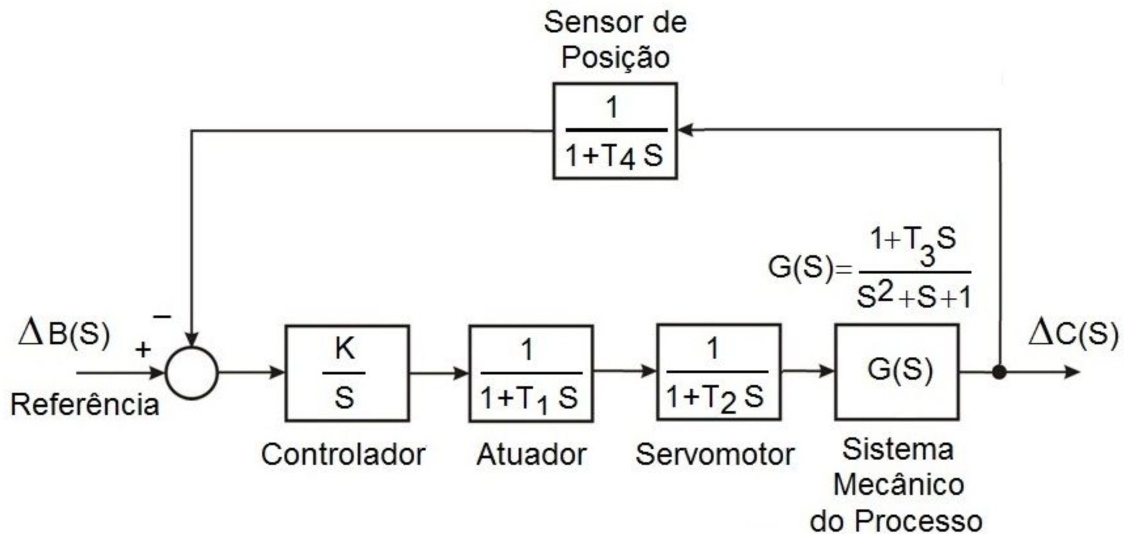



***Figura 2.11 – Sistema de Controle e Servomecanismo***

Na figura 2.11 considerar a seguinte legenda:

$\Delta B(S)$: sinal de entrada ou comando

$\Delta C(S)$: sinal de saída

$G(S)$: função de transferência do processo

$K$: ganho do controlador

$T_1$: constante de tempo do atuador

$T_2$: constante de tempo do servomotor

$T_3$: constante de tempo associada ao processo

$T_4$: constante de tempo do sensor de posição

$S$: variável da transformada de Laplace

No sistema mostrado na figura anterior, notam-se elementos tais como o controlador cuja função é deliberar um sinal de comando em função de um sinal de erro gerado pela comparação entre o sinal de posição da referência pedida e aquele sinal referente à atual posição de um determinado dispositivo pertencente ao processo em questão. Os elementos seguintes são o atuador, geralmente um dispositivo eletro-hidráulico ou eletrônico-hidráulico que converte sinais elétricos em sinais de movimento de um *spool*. O servomotor, que se trata de um dispositivo mecânico que promove a amplificação mecânica ou hidromecânica. Já o processo, trata-se daquilo que é posto sob a ação do

sistema de controle. O sensor de posição representa a realimentação e é o elemento que promove a conversão do sinal mecânico ou de movimento para um sinal elétrico apropriado a fim de se promover a devida comparação.
Notadamente, a referência será sempre um sinal elétrico.
Esse exemplo de mecanismo também é conhecido como servomecanismo com automatismo de controle.
Para que esse servomecanismo possa desempenhar seu papel de maneira segura, precisa e confiável é muito importante a escolha adequada dos valores dos parâmetros do controlador e do sensor de posição, bem dos parâmetros dos demais componentes, por exemplo, o atuador e o servomotor. Eis aí a importância do estudo e da análise sobre o projeto desse sistema de controle.
Por fim, notar que o sinal do sensor de posição dá entrada no somador do controlador com o sinal invertido em relação àquele sinal da referência. Tem-se aqui aquilo que na teoria de controle é chamado de realimentação negativa.

## 2.2.7.2. Equacionamento em Servomecanismo

Seja um diagrama de blocos tal como foi apresentado na figura 2.10 anterior e aqui reproduzido por conveniência na figura 2.12.
A partir desse diagrama será mostrada a forma de se efetuar o equacionamento para a obtenção da função de transferência de malha fechada como função dos elementos internos do sistema.

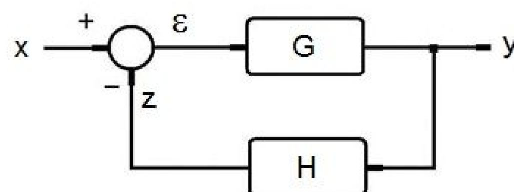



***Figura 2.12 – Sistema Geral de Controle e Servomecanismo***

Na figura 2.12 considerar a seguinte legenda:

$x$: sinal de entrada ou comando
$y$: sinal de saída
$z$: sinal auxiliar
$\varepsilon$: sinal de erro de controle
$G$: função de transferência do processo
$H$: função de transferência da realimentação
$S$: variável da transformada de Laplace

Do diagrama de blocos da figura 2.12, podem-se escrever as seguintes equações:

$$\varepsilon = x - z \qquad (2.96)$$

$$z = H\,y \qquad (2.97)$$

$$y = G\,\varepsilon \qquad (2.98)$$

Da equação 2.96 tem-se que:

$$\varepsilon = \frac{1}{G}y \qquad (2.99)$$

Levando os valores de $\varepsilon$, da equação 2.99, e de $z$, da equação 2.97, na equação 2.96, tem-se:

$$\frac{1}{G}y = x - H\,y \qquad (2.100)$$

Ou melhor:

$$\frac{1}{G}y + H\,y = x \qquad \text{e} \qquad y\left(\frac{1}{G} + H\right) = x$$

$$y\left(\frac{1+GH}{G}\right) = x \qquad \text{e} \qquad \frac{y}{x} = \frac{G}{1+GH}$$

Logo, a função de transferência do sistema da figura 2.12 será:

$$F(S) = \frac{y}{x} = \frac{G}{1+GH} \qquad (2.101)$$

Conclui-se então que a função de transferência de qualquer sistema pode perfeitamente representar a relação entre o sinal de saída, deste sistema, e o sinal de entrada aplicado.
Notar que se as funções $x$ e $y$ variam no domínio complexo, ou da variável freqüência, a função de transferência também variará nesse domínio.

A função de transferência da equação 2.101 pode ser generalizada na seguinte regra:

a) se a realimentação for negativa $\Rightarrow F(S) = \frac{y}{x} = \frac{G}{1+GH}$

(2.102)

b) se a realimentação for positiva $\Rightarrow F(S) = \frac{y}{x} = \frac{G}{1-GH}$

Como observação, vale lembrar que a forma de representação *F(S)* apresentada na equação 2.102 é também conhecida como função de transferência de malha fechada do sistema em contraposição a outra forma de representação chamada de função de transferência de malha aberta que pode ser vista na seguinte equação:

$$F(S) = GH \quad (2.103)$$

Notar também que para efeito de estabilidade, a função de transferência de malha aberta tem importância já que será pela inspeção das raízes do polinômio $D(S) = 1 + GH$, na equação 2.81 referente à forma geral, que se definirá se o sistema vai ser estável ou instável ou ainda marginalmente estável.

Outra observação interessante que deve ser bem compreendida diz respeito à forma como a função de transferência de malha fechada do sistema é apresentada em termos do polinômio numerador e do polinômio denominador. Sempre que possível, a função de transferência deve estar na forma de uma fração própria, ou seja, uma fração na variável $S$ de Laplace onde o grau do polinômio numerador $N(S)$ seja sempre menor que o grau do polinômio denominador $D(S)$ na equação 2.81 referente à forma geral da função de transferência de malha fechada.

---

**EXEMPLO 2.20**

Encontrar a função de transferência global de malha fechada do sistema cujo diagrama de blocos no plano complexo de Laplace é descrito pela figura 2.11 anterior.

**Solução:**

A idéia é transformar o diagrama de blocos visto na figura 2.11, mais complexo, no diagrama de blocos mostrado na figura 2.12, mais simplificado.

A função de transferência a ser obtida de maneira analítica será dada pela relação seguinte:

$$F(S) = \frac{\Delta C(S)}{\Delta B(S)} = \frac{G}{1+GH}$$

Desmembrando as funções de transferência do chamado canal direto ou $G(S)$ e da realimentação ou $H(S)$ vem que:

$$G(S) = \frac{K}{S}\left(\frac{1}{1+T_1S}\right)\left(\frac{1}{1+T_2S}\right)\left(\frac{1+T_3S}{1+S+S^2}\right)$$

$$H(S) = \frac{1}{1+T_4S}$$

$$F(S) = \frac{\Delta C(S)}{\Delta B(S)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{K}{S}\left(\frac{1}{1+T_1S}\right)\left(\frac{1}{1+T_2S}\right)\left(\frac{1+T_3S}{1+S+S^2}\right)}{1+\left(\frac{1}{1+T_1S}\right)\left(\frac{1}{1+T_2S}\right)\left(\frac{1+T_3S}{1+S+S^2}\right)\left(\frac{1}{1+T_4S}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{K(1+T_3S)}{S(1+T_1S)(1+T_2S)(1+S+S^2)}}{\dfrac{S(1+T_1S)(1+T_2S)(1+S+S^2)(1+T_4S)+K(1+T_3S)}{S(1+T_1S)(1+T_2S)(1+S+S^2)(1+T_4S)}}$$

Promovendo as devidas manipulações algébricas e simplificações, obtém-se a seguinte função de transferência de malha fechada do sistema:

$$F(S) = \frac{K(1+\alpha S+\beta S^2)}{K+\gamma S+\delta S^2+\eta S^3+\lambda S^4+\rho S^5+\zeta S^6}$$

Onde

$\alpha = T_3 + T_4$

$\beta = T_3T_4$

$\gamma = 1 + KT_3$

$\delta = 1 + T_1 + T_2 + T_4$

$\eta = 1 + T_1 + T_2 + T_4 + T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4$

$\lambda = T_1 + T_2 + T_4 + T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4 + T_1T_2T_4$

$\rho = T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4 + T_1T_2T_4$

$\zeta = T_1T_2T_4$

$S$: variável da transformada de Laplace

## EXEMPLO 2.21

De posse da função de transferência global de malha fechada, determinada no exemplo 2.20 anterior, levantar a resposta desse sistema a uma função do tipo impulso unitário de entrada, considerando-se os seguintes parâmetros:

$K = 0{,}8$

$T_1 = 1s$

$T_2 = 1s$

$T_3 = 1s$

$T_4 = 0{,}01s$

Verificar a condição de estabilidade desse sistema considerando-se os valores adotados para os parâmetros.

**Solução:**

A função de transferência encontrada no exemplo 2.20 e os correspondentes coeficientes, tanto do numerador quanto do denominador da função de transferência, em função dos valores adotados para os parâmetros, serão os seguintes:

$$\alpha = T_3 + T_4 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$$

$$\beta = T_3 T_4 = 1x0{,}01 = 0{,}01$$

$$\gamma = 1 + KT_3 = 1 + 0{,}6 = 1{,}6$$

$$\delta = 1 + T_1 + T_2 + T_4 = 1 + 1 + 1 + 0{,}01 = 3{,}01$$

$$\eta = 1 + T_1 + T_2 + T_4 + T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4 = 3{,}01 + 1x1 + 1x0{,}01 + 1x0{,}01 = 4{,}03$$

$$\lambda = T_1 + T_2 + T_4 + T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4 + T_1T_2T_4 =$$

$$= (1 + 1 + 0{,}01) + (1x1 + 1x0{,}01 + 1x0{,}01) + (1x1x0{,}01) = 3{,}04$$

$$\rho = T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4 + T_1T_2T_4 = (1x1 + 1x0{,}01 + 1x0{,}01) + (1x1x0{,}01) = 1{,}03$$

$$\zeta = T_1T_2T_4 = 1x1x0{,}01 = 0{,}01$$

$$\Delta C(S) = \frac{0{,}6(1 + 1{,}01S + 0{,}01S^2)}{0{,}6 + 1{,}6S + 3{,}01S^2 + 4{,}03S^3 + 3{,}04S^4 + 1{,}03S^5 + 0{,}01S^6}$$

Assim, a resposta ao impulso unitário, $\Delta B(S) = 1$, calculada em função dos parâmetros que foram fornecidos, será a seguinte:

$$\Delta C(S) = F(S)\Delta B(S) = F(S)1 = \frac{K(1 + \alpha S + \beta S^2)}{K + \gamma S + \delta S^2 + \eta S^3 + \lambda S^4 + \rho S^5 + \zeta S^6}$$

A verificação do estado de estabilidade experimentado por esse sistema, considerando-se os dados numéricos apresentados, poderá ser obtida a partir

de algumas ferramentas básicas, porém um método de peso será mesmo inspecionar as raízes do polinômio denominador conforme já fora mencionado antes.
Deve-se verificar se as partes reais das raízes complexas são negativas e se as raízes reais também são negativas.
Utilizando-se do recurso da simulação, são obtidas as seguintes raízes para o polinômio denominador da função de transferência do sistema em questão.

Raízes encontradas para o sistema em questão:

$P_1 = -0.0558247 + j\,0.6662665$

$P_2 = -0.0558247 - j\,0.6662665$

$P_3 = -1$

$P_4 = -0.9441750 + j0.6713665$

$P_5 = -0.9441750 - j0.6713665$

$P_6 = -100$

Nota-se que as raízes reais são todas negativas e que as raízes complexas apresentam suas partes reais também negativas o que, pela regra clássica de estabilidade, confirma ser o sistema plenamente estável.

---

**EXEMPLO 2.22**

Calcular os valores inicial e final da resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na figura 2.10 anterior.

**Solução:**

A resposta ao degrau unitário, $\Delta B(S) = \frac{1}{S}$, calculada em função dos parâmetros que foram fornecidos, será a seguinte:

$$\Delta C(S) = F(S)\Delta B(S) = F(S)\frac{1}{S} = \frac{1}{S}\left(\frac{K(1+\alpha S+\beta S^2)}{K+\gamma S+\delta S^2+\eta S^3+\lambda S^4+\rho S^5+\zeta S^6}\right)$$

a) Valor inicial:

Aplicando diretamente a propriedade 8 referente ao cálculo do valor inicial, equação 2.68, vem que:

$$\lim_{t \to 0^+} C(t) = \lim_{S\to\infty} S\left[\frac{1}{S}\left(\frac{K(1+\alpha S+\beta S^2)}{K+\gamma S+\delta S^2+\eta S^3+\lambda S^4+\rho S^5+\zeta S^6}\right)\right] = \left[\frac{K\beta S^2}{\zeta S^6}\right]_{S\to\infty} = 0$$

b) Valor final:

Aplicando diretamente a propriedade 9 referente ao cálculo do valor final, equação 2.69, vem que:

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = \lim_{S \to 0} S \, [\frac{1}{S} (\frac{K(1+\alpha S+\beta S^2)}{K+\gamma S+\delta S^2+\eta S^3+\lambda S^4+\rho S^5+\zeta S^6})] = [\frac{K}{K}]_{S \to 0} = 1$$

Observa-se que o sistema parte da origem com o par $[t, \Delta C(t)] = [5,0]$ e vai dar em $[t, \Delta C(t)] = (\infty, 1]$.

**Nota a respeito do exemplo 2.22:**

Para confirmar os resultados, foi promovida uma simulação da resposta do sistema da figura 2.10 a uma entrada na forma de um degrau unitário, aplicado no instante $t = 5s$, para os dados fornecidos, e o resultado pode ser visto na figura 2.13 seguinte.
Para o traçado do gráfico da resposta no domínio do tempo também foi utilizado do recurso da simulação.

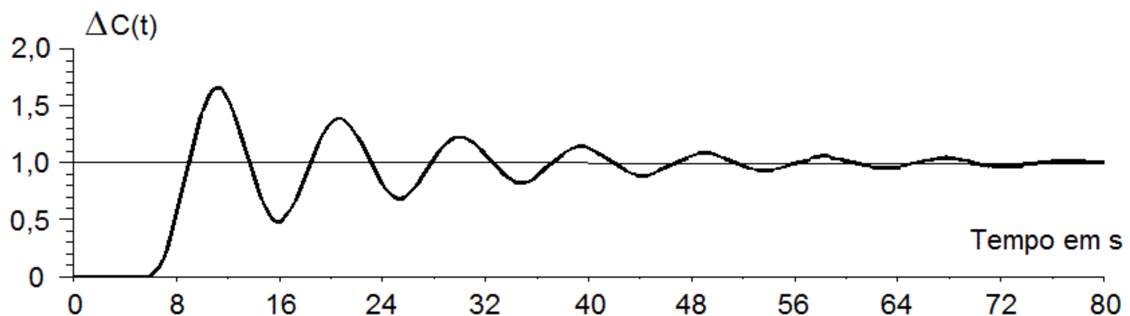



***Figura 2.13 – Resposta do Sistema da Figura 2.10 ao Degrau Unitário***

---

## 2.2.8. Aplicação Prática da Função de Transferência na Solução de Equações Diferenciais em Sistemas Lineares

### 2.2.8.1. Circuito RLC-Série

As representações de modelos na forma de diagramas de blocos, com suas funções de transferência no domínio da transformada de Laplace, permitem o conhecimento e a identificação de todas as características operacionais de um dado sistema físico.
A questão primordial então passa a ser a determinação da equação diferencial que rege a ação motriz desse determinado sistema.

Como se sabe, os procedimentos para a solução de uma equação diferencial podem seguir os seguintes critérios:

a) usando o método de Heaviside (funções polinomiais);

b) usando a transformação de Laplace (funções polinomiais);

c) usando técnicas notáveis (método analítico);

d) usando do cálculo numérico (método computacional).

O critério visto no tópico anterior foi aquele ligado ao método de Heaviside ou método da decomposição em frações polinomiais parciais.
Na realidade, o método de Heaviside e o método de Laplace são os mesmos nas conclusões finais, pois em suas aplicações sempre se utiliza do conceito operacional.
Notar que, pelo critério de Laplace, a variável-operador é identificada pela letra *S* enquanto que pelo critério de Heaviside a variável-operador é a letra *D*.
Na realidade, o problema é bem mais complexo que uma simples escolha de letras uma vez que a comprovação de Laplace apresenta um cunho caracterizado pelo rigor matemático enquanto que a solução de Heaviside apresenta uma característica heurística, ou seja, de fraca comprovação matemática. Apesar disto, as conclusões são as mesmas.
Sobre os outros dois processos mencionados, pode-se afirmar que o método clássico, utilizando técnicas notáveis, não resolve todas as equações enquanto que o método numérico é utilizado com o suporte na computação digital.
Atualmente este último método vem sendo utilizado de modo exaustivo devido à difusão da informática aplicada a problemas reais.
Convém lembrar que as técnicas de solução das equações diferenciais apresentadas nesta pequena obra se referem a equações diferenciais lineares de coeficientes constantes.
Será apresentado aqui nesse item, um exemplo de cálculo de uma função de transferência veiculada a um sistema elétrico, um circuito RLC-Série, caracterizado por uma equação diferencial de segunda ordem, portanto admitindo na sua solução de sua equação característica a presença de duas raízes.
A extrapolação da técnica de operadores é facilmente entendida no nível da transformação de Laplace.

O circuito da figura 2.14 é um circuito RLC-Série porque os três elementos passivos, o resistor *R*, o indutor *L* e o capacitor *C* estão ligados em série, pois, ao se fechar a chave *Ch*, no instante $t = 0$, circulará uma corrente $i(t)$, variável no domínio do tempo, que passa a existir devido à ação da fonte $v(t)$, também variável no domínio do tempo.
Para equacionar o circuito, deve-se, primeiramente, conhecer o que se quer do problema e do que se dispõe.
Quer-se a relação $v_L(t) / v_E(t)$, ou seja, a função de transferência que relaciona a tensão de saída do indutor, ou resposta do sistema, a uma entrada, ou

excitação externa, aplicada através de uma fonte de tensão. Dispõe-se de um sistema básico de somatórias em tensões, ou melhor, somatória das quedas de tensões nos elementos passivos conforme a segunda lei de Kirchhoff.

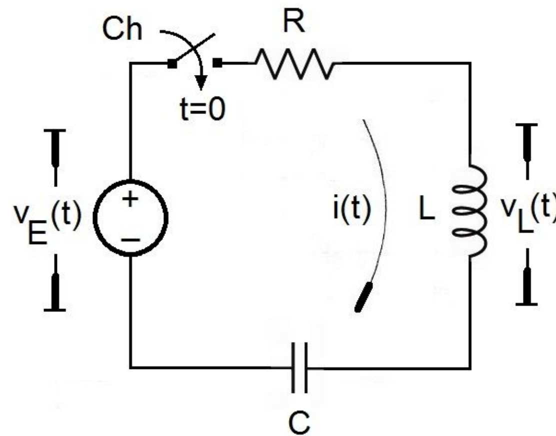



***Figura 2.14 – Circuito RLC - Série***

Considerando-se não haver perdas, a tensão aplicada pela fonte, o elemento ativo do circuito, deverá ser igual à soma das quedas de tensão nos três elementos passivos do circuito.
Prova-se que a queda em cada um dos elementos passivos em função da corrente circulante é dada por:

$$\text{resistor} \qquad R \rightarrow v_R(t) = R\,i(t) \tag{2.104}$$

$$\text{indutor} \qquad L \rightarrow v_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \tag{2.105}$$

$$\text{capacitor } C \rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \tag{2.106}$$

A primeira equação para o circuito RLC-Série será relativa à soma das quedas de tensões como já foi mencionado.

Assim, tem-se que:

$$v_E(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt \tag{2.107}$$

Pode-se perguntar, de onde vieram estas equações? Elas, na realidade, foram o resultado de um número grande de pesquisas.

A primeira parcela, $v_R(t) = R\ i(t)$ nada mais é que a Lei de Ohm; a segunda $v_L(t) = L\ \frac{di(t)}{dt}$ nada mais é que a Lei de Lenz enquanto que a terceira parcela $v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\ dt$ vem associada aos estudos da eletrostática.

Vê-se, claramente, que a equação 38 está definida de modo que todas as suas variáveis dependam da variável tempo.
Logo, diz-se que a equação 2.107 encontra-se no domínio do tempo, ou seja, na forma $f(t)$.

Aplicando a técnica de Heaviside via operador $\mathcal{D}$, tem-se:

$$v_E(\mathcal{D}) = R\ i(\mathcal{D}) + L\ D\ i(\mathcal{D}) + \frac{1}{C}\frac{1}{\mathcal{D}}\ i(\mathcal{D}) \qquad (2.108)$$

Lembrando-se que:

a) $\frac{df}{dt} = \mathcal{D} f$

b) $\int f\ dt = \frac{1}{\mathcal{D}} f$

Assim, multiplicando-se a equação 2.108 por $\mathcal{D}$, vem que:

$$\mathcal{D} v_E(\mathcal{D}) = R\ \mathcal{D}\ i(\mathcal{D}) + L\ \mathcal{D}^2\ i(\mathcal{D}) + \frac{1}{C}\ i(\mathcal{D})$$

ou melhor:

$$\mathcal{D} v_E(\mathcal{D}) = (L\mathcal{D}^2 + R\mathcal{D} + \frac{1}{C})\ i(\mathcal{D}) \qquad (2.109)$$

Isolando as variáveis em corrente e em tensão, dentro da equação 2.109, tem-se:

$$\frac{i(\mathcal{D})}{v_E(\mathcal{D})} = \frac{\mathcal{D}}{L\mathcal{D}^2 + R\mathcal{D} + \frac{1}{C}}$$

Ou então:

$$\frac{i(\mathcal{D})}{v_E(\mathcal{D})} = \frac{C\mathcal{D}}{LC\mathcal{D}^2 + RC\mathcal{D} + 1} \qquad (2.110)$$

Uma importante observação: a equação 107 consiste na equação diferencial que amarra as variáveis tensão $v_E$ e corrente circulante $i$, porém ambas como função do tempo $t$.
Já a equação 108 é a mesma equação, porém transformada para o domínio complexo na variável $\mathcal{D}$.

A analogia entre as variáveis e parâmetros nos planos temporal e complexo, considerando-se o sistema do circuito RLC-Série, poderá ser vista na tabela 2.2.

***Tabela 2.2 – Analogia Planos Temporal e Complexo RLC-Série***

| Domínio do Tempo | Domínio Complexo |
|---|---|
| $v_E(t)$ | $v_E(\mathcal{D})$ |
| $i(t)$ | $i(\mathcal{D})$ |
| $R$ | $R$ |
| $L$ | $L\mathcal{D}$ |
| $C$ | $1/CD$ |
| $\frac{df}{dt}$ | $(\mathcal{D})f$ |
| $\int f\,dt$ | $(\frac{1}{\mathcal{D}})f$ |
| | |

Do circuito RLC-Série, sabe-se que a queda de tensão no indutor tem a seguinte expressão, considerando-se a equação 2.105, no domínio do tempo:

$$v_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \tag{2.111}$$

Passando, também, a equação 2.111 para o domínio do complexo tem-se:

$$v_L(\mathcal{D}) = L\mathcal{D}\,i(\mathcal{D})$$

ou melhor:

$$i(\mathcal{D}) = \frac{1}{L\mathcal{D}}v_L(\mathcal{D}) \tag{2.112}$$

As equações transformadas para o domínio complexo, 2.110 e 2.112, resolvem o problema; bastando levar o valor da expressão de $i(\mathcal{D})$, da equação 2.112, na equação 2.110. Senão, veja-se:

$$\frac{1}{L\mathcal{D}}\frac{v_L(\mathcal{D})}{v_E(\mathcal{D})} = \frac{C\mathcal{D}}{LC\mathcal{D}^2 + RC\mathcal{D} + 1}$$

ou melhor:

$$\frac{v_L(\mathcal{D})}{v_E(\mathcal{D})} = \frac{LC\mathcal{D}^2}{LC\mathcal{D}^2 + RC\mathcal{D} + 1} \qquad (2.113)$$

Assim, a função de transferência procurada, no domínio complexo, ou no domínio da transformada $\mathcal{D}$, ou no domínio da transformada de Laplace, nada mais é que a relação $v_L(t) / v_E(t)$ da expressão 2.113.

Na literatura também é utilizado o símbolo $S$ para a variável-operador. Assim a função de transferência, que tem como saída à tensão aplicada ao elemento indutor, em função da tensão aplicada pela fonte, será:

$$F(S) = \frac{v_L(S)}{v_E(S)} = \frac{LCS^2}{LCS^2 + RCS + 1} \qquad (2.114)$$

O circuito da figura 2.14 está representado no domínio do tempo. Caso se queira representá-lo no domínio complexo, o seguinte circuito seria obtido:

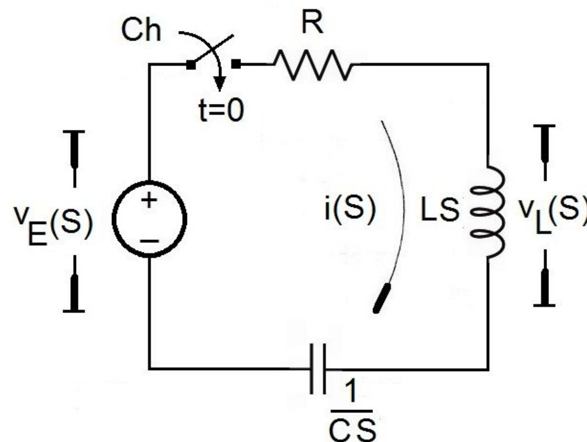



***Figura 2.15 – Circuito RLC-Série no Domínio Complexo***

A grande vantagem da análise complexa é verificar, por exemplo, o comportamento da tensão aplicada ao indutor quando se varia a tensão de entrada aplicada pela fonte.

Outra conclusão importante que se pode tirar refere-se às definições de ganho e de fase de uma função de transferência.

Observando bem a equação transformada 2.114, nota-se que a função de transferência é uma função que possui um módulo e uma fase. O que determinará a variação do ganho ou da fase na equação da função de transferência do sistema será o valor assumido pela variável complexa $S$.

O operador complexo poderá ser substituído pelo número complexo puro $j\omega$ onde $\omega = 2\pi f$, sendo $f$ a freqüência em $Hz$ e $j = \sqrt{-1}$.

Deste modo, tem-se para a equação 2.114 em termos de $j\omega$:

$$F(j\omega) = \frac{v_L(j\omega)}{v_E(j\omega)} = \frac{LC(j\omega)^2}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}$$

Como $j^2 -1$, tem-se:

$$F(j\omega) = \frac{v_L(j\omega)}{v_E(j\omega)} = \frac{-LC\omega^2}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}$$

ou melhor

$$\frac{v_L(j\omega)}{v_E(j\omega)} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \qquad (2.115)$$

Como se pode ver pela equação 2.115, a função de transferência obtida é também um número complexo garantindo o que foi dito antes sobre a existência de um ganho e de uma fase para a função.
Deste modo, a um determinado sinal de entrada $v_E(j\omega)$ corresponderá um sinal de saída que deverá ser proporcional a este primeiro, porém com defasamento de argumento.
Pela equação 2.115, pode-se, também, concluir que o ganho e a fase da função de transferência variam dentro de um espectro de freqüência que é chamado, na teoria de controle, de banda de freqüência.
Assim, percebe-se, claramente, sob que faixas de freqüência do sinal de entrada o sinal de saída aparecerá.
Conforme os valores assumidos pela freqüência do sinal de entrada, mesmo que sua amplitude seja alta, poderá o sinal de saída ser amplificado ou atenuado.
Através destas características é que são projetados os filtros e dispositivos, quer sejam atenuantes ou amplificadores, na área de Engenharia de Controle automático.

## 2.2.8.2. Ganho e Fase de uma Função de Transferência

Como foi visto anteriormente, sabe-se que toda função de transferência nada mais é que um número complexo apresentando, com isto, um ganho e uma fase.
Sabendo-se também que esta função de transferência é uma função linear, o cálculo do ganho e da fase desta função é possível utilizando-se da matemática.
Seja, por exemplo, a determinação do ganho e da fase de um sistema caracterizado por um circuito RC-Série a partir do cálculo de sua função de transferência, conforme está desenhado na figura 2.16.

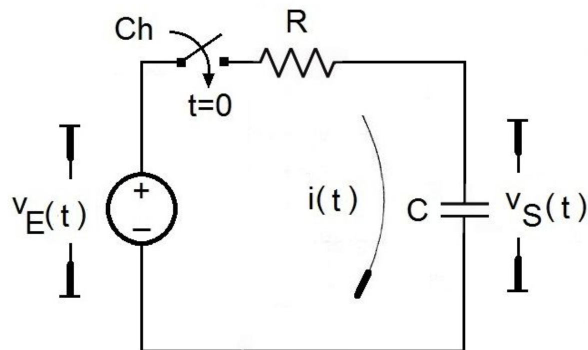



***Figura 2.16 – Circuito RC-Série no Domínio do Tempo***

Na figura 2.15, a tensão $v_E(t)$, no domínio do tempo, é aplicada ao circuito pelo fechamento da chave $Ch$, no instante $t = 0$. Isto significa que o circuito encontra-se desenergizado no instante $t = 0$ e que a contagem, no eixo do tempo, se iniciará a partir do fechamento da chave.
Para o caso, é suposto que se queira conhecer qual a tensão de saída sobre o capacitor $C$ quando se aplica um sinal de tensão $v_E(t)$ sobre o circuito na forma como está descrito na figura 2.15.

**Cálculo da FT do circuito RC-Série**

Seja a construção do circuito transformado *D* ou *S*.

A analogia entre as variáveis e parâmetros nos planos temporal e complexo, considerando-se o sistema do circuito RC-Série, poderá ser vista na tabela 2.3.

***Tabela 2.3 – Analogia Planos Temporal e Complexo RC-Série***

| Domínio do Tempo | Domínio Complexo |
|---|---|
| $v_E(t)$ | $v_E(S)$ |
| $v_S(t)$ | $v_S(S)$ |
| $i(t)$ | $i(S)$ |
| $R$ | $R$ |
| $C$ | $1/CS$ |
| $\frac{d}{dt}$ | $S$ |
| | |

O circuito transformado para o plano complexo será:

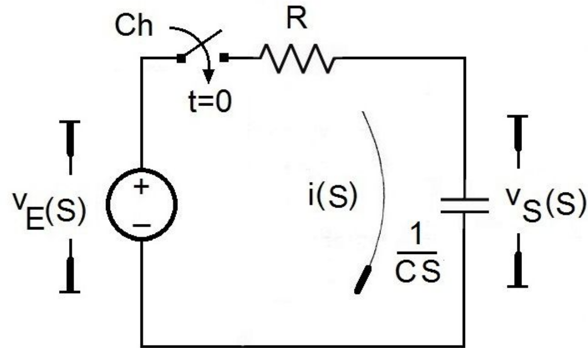



***Figura 2.17 – Circuito RC-Série no Domínio Complexo***

As equações envolvidas, após o instante de fechamento da chave $Ch$, serão:

$$v_E(S) = (R + \frac{1}{CS})\ i(S) \tag{2.116}$$

e

$$v_S(S) = \frac{1}{CS} i(S) \tag{2.117}$$

As duas equações anteriores, 2.116 e 2.117, resolvem o problema. Senão, veja-se:

Da equação 2.117 tira-se $i(S) = CS\ v_S(S)$ que levada na equação 2.116 fornece:

$$v_E(S) = (R + \frac{1}{CS})CS\ v_S(S) = \frac{RCS + 1}{CS}\ CS\ v_S(S)$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{v_S(S)}{v_E(S)} = \frac{1}{1 + RCS} \tag{2.118}$$

Deste modo, fica determinada a função de transferência do sistema RC-Série da figura 2.17, no domínio complexo ou do operador *S* (ou *D*).
Notar que o produto *RC* tem a dimensão física de tempo, por exemplo:

$$R[K\Omega]\,x\,C[\mu F] = RC[ms] \tag{2.119}$$

Prova-se que *RC* nada mais é que a constante de tempo do circuito.
Notar também que o denominador da função de transferência é originário de uma equação diferencial, no domínio do tempo, de primeira ordem, apresentando, por tal, uma raiz solução e, portanto, uma constante de tempo.

Para se voltar ao domínio do tempo é só efetuar as operações inversas, senão veja:

$$v_S(S) = \frac{1}{1+TS}\, v_E(S) \quad \text{com} \quad T = RC \tag{2.120}$$

$$v_S(S)\,(1+TS) = v_E(S)$$

$$v_S(S) + v_S(S)\,TS = v_E(S)$$

$$TS\; v_S(S) + v_S(S) - v_E(S) = 0 \tag{2.121}$$

Fazendo $v_S(S) = Y(S)$ e $v_E(S) = Z(S)$ tem-se, para equação 2.121, que:

$$TS\; Y(S) + Y(S) - Z(S) = 0 \tag{2.122}$$

A analogia entre as variáveis e parâmetros nos planos temporal e complexo, considerando-se o sistema do circuito RC-Série, poderá ser vista na tabela 2.4.

***Tabela 2.4 – Analogia Planos Temporal e Complexo RC-Série***

| Domínio Complexo | Domínio do Tempo |
|---|---|
| $S$ | $\frac{d}{dt}$ |
| $v_S(t)$ | $v_S(S)$ |
| $T$ | $T$ |
| $Y(S)$ | $Y(t)$ |
| $Z(S)$ | $Z(t)$ |
| | |

Logo, a equação 2.122, no domínio do tempo, será:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + Y(t) - Z(t) = 0 \qquad (2.123)$$

Para o caso em que $Z(t) = 0$ tem-se que:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + Y(t) = 0 \qquad (2.124)$$

Notar que a equação 2.124 nada mais é que uma equação diferencial de primeira ordem caracterizada por possuir uma derivada e cuja solução fornece via operador:

$$(TS + 1)Y = 0$$

A raiz solução vale $S = \frac{-1}{T}$, ou seja, o inverso da constante de tempo.

Voltando-se à equação 2.120, para o cálculo do ganho é só considerar a função de transferência na seguinte forma:

$$\frac{v_S(S)}{v_E(S)} = \frac{1}{1 + TS} \qquad (2.125)$$

Fazendo o operador $S$ igual a um número complexo puro $j\omega$, dependente da freqüência complexa $j\omega$, tem-se que:

$$G = Módulo\left[\frac{V_S(S)}{V_E(S)}\right]_{S = j\omega} = \left|\frac{V_S(j\omega)}{V_E(j\omega)}\right| = \left|\frac{1}{1 + T(j\omega)}\right|$$

$$G = \left|\frac{1}{1 + jT\omega}\right| \qquad (2.126)$$

Lembrando-se que, dado um número complexo na forma cartesiana, $z = a + jb$ onde $j = \sqrt{-1}$, como já sabemos, sua forma polar será:

$$z = a + jb \rightarrow \text{cartesiana} \qquad (2.127)$$

$$z = \rho e^{j\theta} \rightarrow polar \qquad (2.128)$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2.129)$$

$$tan\,\theta = \frac{b}{a} \tag{2.130}$$

A representação do número complexo será a seguinte:

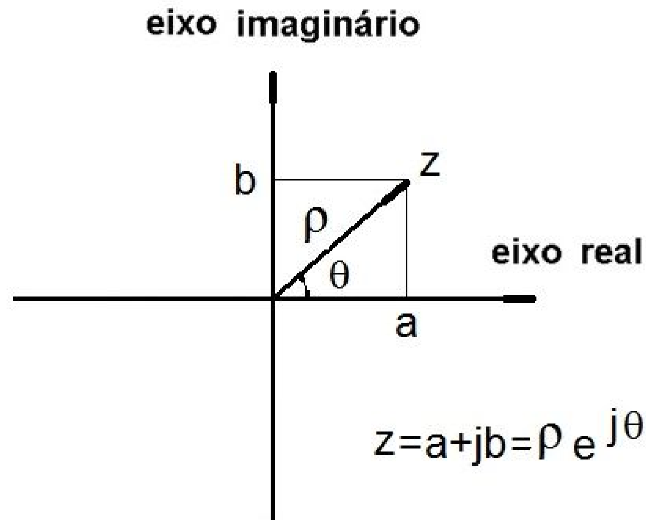



***Figura 2.18 – Digrama para o Número Complexo***

Sendo *G* o módulo do número complexo, equação 2.126, pode-se escrever:

$$G = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (T\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

E em *db* (decibel), tem-se:

$$G = -20\,log\,(\sqrt{1 + T^2\omega^2}) \quad [dB] \tag{2.131}$$

Para a fase *θ*, tem-se que deixar a equação 2.126, que está na forma $\frac{1}{a + jb}$, na forma $a + jb$, conforme o seguinte artifício:

$$z = \frac{1}{a + jb}\left(\frac{a - jb}{a - jb}\right) = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$$

ou seja:

$$z = \frac{a}{a^2 + b^2} - j\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Assim

$$z = A + jB \tag{2.132}$$

onde $A = \frac{a}{a+jb}$ e $B = \frac{-b}{a^2+b^2}$

Logo

$$\frac{1}{a+jb} \equiv \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2} \tag{2.133}$$

Aplicando o desenvolvimento da equação 2.133 na equação 2.126 tem-se que:

$$G = \left| \frac{1}{1+jT\omega} \right| = \left| \frac{1}{1+T^2\omega^2} - j\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} \right|$$

e

$$G = \sqrt{\left(\frac{1}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} \rightarrow Ganho \tag{2.134}$$

com

$$tan\theta = -\frac{\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}}{\frac{1}{1+T^2\omega^2}} = -T\omega$$

Ou seja

$$\theta = arc\ tan(-T\omega) \rightarrow Fase \tag{2.135}$$

Logo, as equações 2.134 e 2.135 representam o ganho e a fase do sinal de tensão de saída do capacitor, $v_S$, com relação ao sinal de tensão de entrada, $V_E$, ambas em função da freqüência complexa.

Pode-se, portanto, explicar porque motivo certos sistemas respondem bem a determinados sinais numa freqüência e não respondem nada a esses mesmos sinais em outras freqüências.

A questão tem tudo a ver com o valor puntual do ganho do sistema que pode ser elevado em certa banda de freqüência e ser baixo noutra banda.

**Resposta no domínio do tempo**

Considerando-se a figura 16, anterior, se for aplicado, como sinal de entrada $V_E$, um sinal qualquer, por ser este um sistema linear, a saída será proporcional dando como resultado um sinal também qualquer.
Caso seja aplicado um degrau de tensão, sinal especial pertencente ao grupo das funções singulares, o sinal de saída sofrerá uma distorção, transitória, porém o acompanhará.

Assim, para o caso de um sinal de entrada do tipo degrau conforme a descrição seguinte, tem-se que:

$$v_E(t) = K \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \leq 0 \\ K & \text{para} \quad t > 0 \end{cases}$$

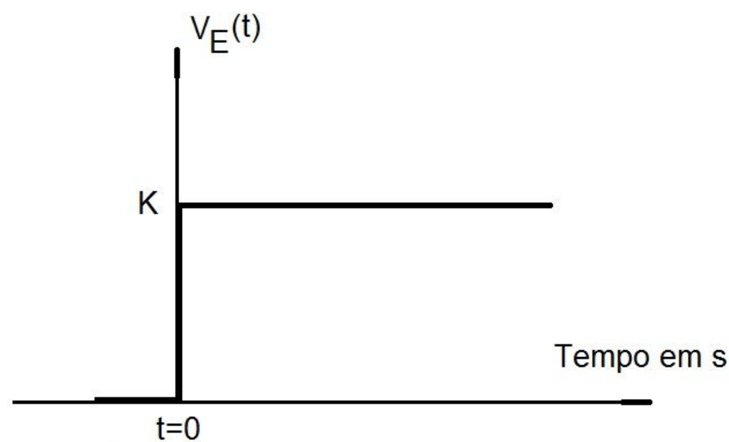



***Figura 2.19 – Gráfico da Função Degrau no Domínio do Tempo***

A função $v_E(t) = K$ no domínio do tempo apresenta a função $v_E(S) = \dfrac{K}{S}$ no domínio complexo.
A equação 2.120, com o valor $v_E(S) = \dfrac{K}{S}$, torna-se:

$$v_S(S) = \left(\frac{1}{1+TS}\right)\frac{K}{S}$$

ou melhor

$$v_S(S) = \frac{K}{S(1+TS)} \qquad (2.136)$$

Deste modo, obtém-se a resposta da tensão de saída do capacitor $C$ quando é aplicado um degrau de tensão de entrada $v_E$.
A resposta da equação 2.136 não dá para analisar nada de modo visual, pois esta equação se encontra no domínio complexo. Para se voltar ao domínio do tempo bastará, em termos práticos, consultar uma tabela de transformação de Laplace. Nesta tabela encontra-se o seguinte:

***Tabela 2.5 – Transformada de Laplace de Funções Temporais***

| Domínio Complexo | Domínio do Tempo |
|---|---|
| $F(S) = \frac{a}{S(S+a)}$ | $f(t) = 1 - e^{at}$ |
| | |

Observando os dados da tabela 2.5, obtém-se que:

$$v_S(S) = \frac{K/T}{S(S - \frac{1}{T})} \quad (2.137)$$

Deste modo, o sinal da tensão de resposta de saída do capacitor *C*, do circuito RC-Série da figura 15, será dado por:

$$v_S(T) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (2.138)$$

Caso se queira plotar o gráfico da tensão $v_S(T) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$, como resposta ao degrau da tensão, $v_E(S) = \frac{K}{S}$, proceder à simulação com qualquer *software* matemático. Ver o resultado da simulação na figura 20.

Na equação 2.138, quando $t = T$, tem-se que:

$$v_S(T) = K(1 - e^{-\frac{T}{T}}) = K(1 - e^{-1}) = K(1 - 0,37) = 0,63K$$

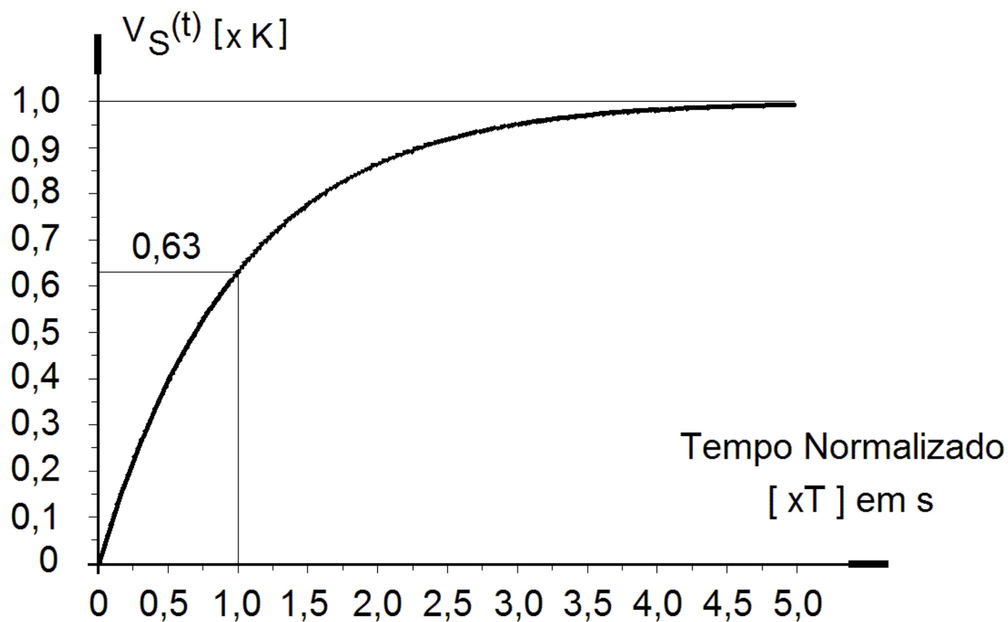



***Figura 2.20 – Resposta do Circuito RC-Série ao Degrau***

Assim, conhecendo-se o nível do sinal de tensão de entrada $v_E(t)$, mede-se o sinal de tensão de saída $v_S(t)$. A relação $v_S(t)/v_E(t)$, após estabilização do sinal, fornece o ganho da função de transferência.
Do gráfico da figura 20, a tensão de saída $v_S(t)$, para um valor igual a *63%* do valor final de estabilização, permite que extraia o valor da constante de tempo *T* do circuito RC-Série.

**Curvas de Bode**

Chamam-se curvas de Bode os gráficos representativos do ganho e da fase em função da variação da freqüência complexa na função de transferência de um sistema linear qualquer.

Da equação 2.131, por exemplo, extrai-se a expressão do ganho *dB* aqui reescrita por comodidade:

$$G = -20 \log \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

Da equação 2.135, extrai-se, do mesmo modo, a expressão da fase em *rad,* também aqui reescrita:

$$\theta = \arctan(-T\omega)$$

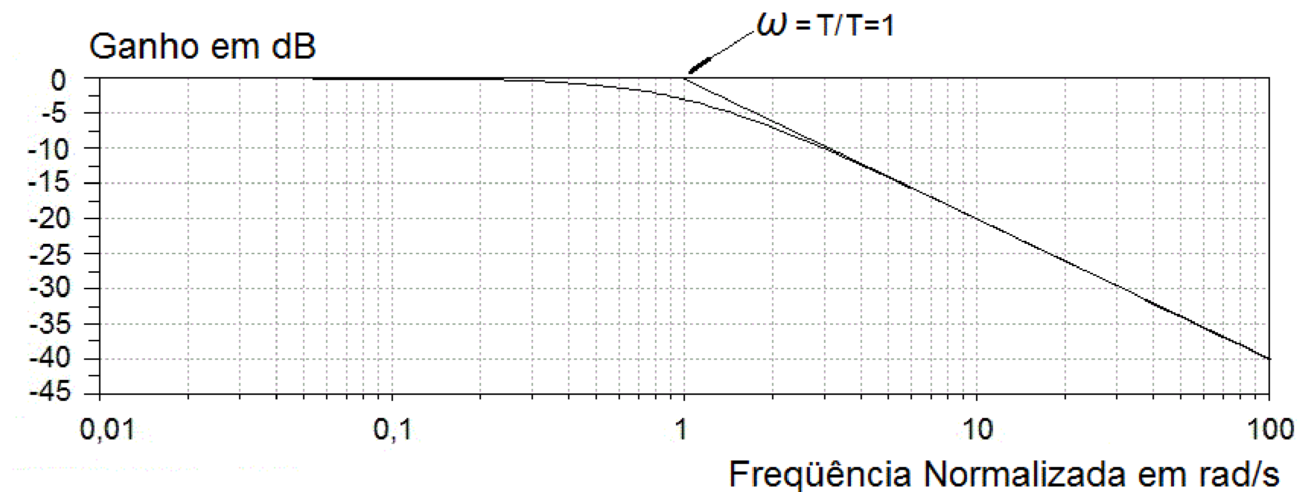



***Figura 2.21 – Curva de Ganho e Fase do Circuito RC-Série***

Utilizando um gráfico tipo mono-logarítmico, traçam-se as curvas de ganho e de fase em função da freqüência complexa conforme pode ser visto nas figuras 2.21 e 2.22.

Notar que, num circuito RC-Série do tipo mostrado na figura 2.15, no caso de a tensão de entrada, aplicada ao circuito, ser uma função que varie com a freqüência e se esta freqüência atingir valores elevados praticamente não sairá sinal algum de tensão no capacitor. A esse fenômeno se dá o nome atenuação de sinal.

Na curva da figura 2.21, vê-se que nas altas freqüências o ganho do circuito RC-Série cai a valores inferiores a *–20 dB*.

Ainda na curva do ganho da figura 2.21, nota-se também que foi assinalada uma reta a partir do ponto onde a freqüência normalizada é a unidade, ou seja, ponto em que $\omega = T\,( 1/T )$, ponto de cruzamento com o eixo das abscissas.

Percebe-se que esse ponto se encontra relacionado com a raiz única da equação característica do sistema RC-Série, o que era de se esperar uma vez que esse sistema é de primeira ordem. A essa reta dá-se o nome de assíntota e, se observada, é notado que a sua taxa de decaimento encontra-se em $-20\,dB/década$.

A década de freqüência, num gráfico cuja abscissa é dada em escala logarítmica, corresponde ao intervalo de $10[Hz]$ ou $10[rad/s]$.

Já a oitava de freqüência, no mesmo gráfico cuja abscissa também é dada em escala logarítmica, corresponde ao intervalo de $2[Hz]$ ou $2[rad/s]$.

Na figura 2.22 é mostrado o gráfico da fase do sistema em questão e pode-se notar que, num sistema do tipo RC-Série, a variação de fase vai de $0$ a $-90\ graus$.

São essas as duas características de variação de ganho e de fase, típicas de um sistema simples formado por uma função de transferência e composta de uma fração própria de primeira ordem na forma de um binômio.

Na decomposição por frações parciais, uma determinada função de transferência pode apresentar tantos zeros e tantos pólos quanto forem necessários em sua representação. Como se trata de polinômios, cada binômio do tipo $(1+TS)$ que aparecer como pólo da função de transferência conferirá ao conjunto uma assíntota de $-20\,dB/\,década$, do mesmo modo que a cada binômio do tipo $(1+TS)$ que aparecer como zero, uma assíntota de $+20\,dB/\,década$ será adicionada a função de transferência.

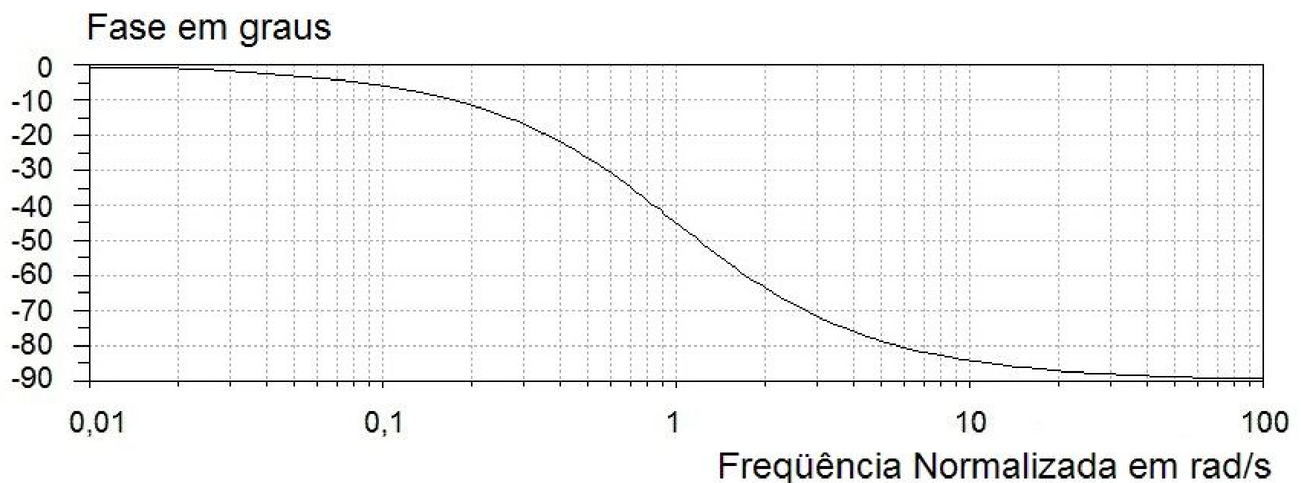



***Figura 2.22 – Curva da Fase do Circuito RC-Série***

Por fim, lembra-se que, na teoria de controle clássico, a análise do comportamento operativo e desempenho de sistemas utilizando-se da inspeção por intermédio das curvas de ganho e fase, ligadas à função de transferência no plano complexo do conjunto, conforme foi explanado anteriormente, é conhecida como análise de Bode.

## 2.2.8.3. Sistemas Análogos

Muitas vezes acontece de dois ou mais sistemas, de natureza física diferente, terem equações diferenciais semelhantes.
É o caso de um circuito elétrico RC-Série e um sistema mecânico amortecedor do tipo *Spring-Dashpot*, muito comum em dispositivos móveis de suspensão.
Um sistema é puramente elétrico enquanto o outro é puramente mecânico, porém a equação diferencial que rege a variação da tensão e da corrente no primeiro é semelhante àquela que rege a variação da força e da velocidade no segundo.
Por essa razão, tais sistemas físicos são ditos sistemas análogos.

Seja a figura seguinte, onde ambos os sistemas análogos se encontram representados.
Para o exemplo mostrado na figura 2.23, tem-se o caso da chamada analogia V-F ou tensão-força pelas características dos sistemas apresentados.

Segue a tabela relativa ao processo de analogia entre os dois sistemas, inclusive com a identificação dos símbolos adotados para o sistema mecânico de translação da figura 2.23(b).

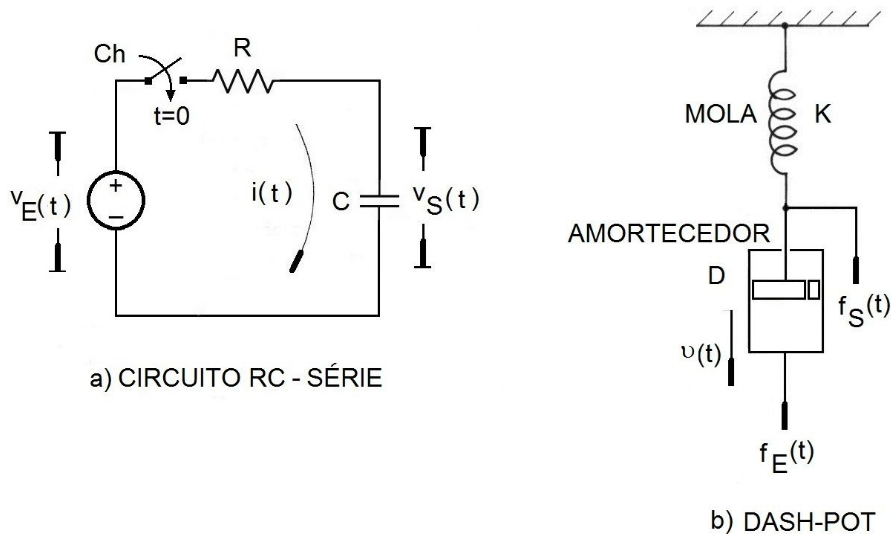



***Figura 2.23 – Circuitos Análogos RC-Série e Spring-Dashpot***

***Tabela 2.6 – Circuitos Análogos RC-Série e Spring-Dashpot***

| [illegible] | Circuito Spring - Dashpot |
|---|---|
| $v_E(t)$ | $f_E(t)$ [força] |
| $v_S(t)$ | $f_S(t)$ [força] |
| $i(t)$ | $\upsilon\ t$ [velocidade] |
| $R$ | $D$ [viscosidade] |
| $C$ | $K$ [compliância] |
| | |

Para o circuito elétrico, tem-se a função de transferência seguinte no domínio complexo:

$$\frac{v_S(S)}{v_E(S)} = \frac{1}{1+TS} \quad \text{com } T = RC \tag{2.139}$$

Para o sistema mecânico de translação, tem-se a função de transferência seguinte no domínio complexo:

$$\frac{f_S(S)}{f_E(S)} = \frac{1}{1+TS} \quad \text{com } T = DK \tag{2.140}$$

Para resumir a analogia entre sistemas físicos, serão considerados apenas os três mais conhecidos sistemas que são vistos no processo de regulação e controle automático de usinas de energia elétrica, quais sejam, o sistema elétrico, o sistema mecânico de translação e o sistema mecânico de rotação. As tabelas 2.7, 2.8 e 2.9 mostram a analogia existente entre as principais variáveis e os principais parâmetros envolvendo sistemas elétricos e mecânicos.

**Tabela 2.7 – Analogia entre Sistemas: Elétrico Tensão e Elétrico Corrente**

| Sistema Elétrico Tensão | Símbolo Usual | Unidade MKS | Sistema Elétrico Corrente | Símbolo Usual | Unidade MKS |
|---|---|---|---|---|---|
| Tensão | $v$ | $V$ | Corrente | $i$ | $A$ |
| Corrente | $i$ | $A$ | Tensão | $v$ | $V$ |
| Resistência | $R$ | *ohm* | Condutância | $G$ | *mho* |
| Capacitância | $C$ | $F$ | Indutância | $L$ | $H$ |
| Indutância | $L$ | $H$ | Capacitância | $C$ | $F$ |
| Fonte de Tensão | $v_F$ | $V$ | Fonte de Corrente | $i_F$ | $A$ |
| Transformador de Tensão | $\frac{v_{prim}}{v_{sec}}$ | $\frac{V}{V}$ | Transformador de Corrente | $\frac{i_{prim}}{i_{sec}}$ | $\frac{A}{A}$ |
| Relação de Transformação Transformador | $\frac{v_{prim}}{v_{sec}}$ | $\frac{V}{V}$ | Relação de Transformação Transformador | $\frac{i_{prim}}{i_{sec}}$ | $\frac{A}{A}$ |

*Tabela 2.8 – Analogia entre Sistemas: Elétrico e Mecânico de Translação*

| Sistema Elétrico | Símbolo Usual | Unidade MKS | Sistema Mecânico de Translação | Símbolo Usual | Unidade MKS |
|---|---|---|---|---|---|
| Tensão | $v$ | $V$ | Força | $f$ | $N$ |
| Corrente | $i$ | $A$ | Velocidade | $\upsilon$ | $\frac{m}{s}$ |
| Resistência | $R$ | $ohm$ | Atrito Viscoso | $D$ | $\frac{N s}{m}$ |
| Capacitância | $C$ | $F$ | Compliância de Mola | $K$ | $\frac{m}{N}$ |
| Indutância | $L$ | $H$ | Massa | $M$ | $Kg$ |
| Relação de Transformação Transformador | $\frac{v_{prim}}{v_{sec}}$ | $\frac{V}{V}$ | Relação Braço de Alavanca | $\frac{f_1}{f_2}$ | $\frac{N}{N}$ |

*Tabela 2.9 – Analogia entre Sistemas: Elétrico e Mecânico de Rotação*

| Sistema Elétrico | Símbolo Usual | Unidade MKS | Sistema Mecânico de Rotação | Símbolo Usual | Unidade MKS |
|---|---|---|---|---|---|
| Tensão | $v$ | $V$ | Torque | $\tau$ | $N.m$ |
| Corrente | $i$ | $A$ | Velocidade Angular | $\omega$ | $\frac{rad}{s}$ |
| Resistência | $R$ | $ohm$ | Atrito Viscoso de Rotação | $D$ | $\frac{N m s}{rad}$ |
| Capacitância | $C$ | $F$ | Compliância Torcional | $K$ | $\frac{rad}{N m}$ |
| Indutância | $L$ | $H$ | Momento de Inércia | $J$ | $Kgm^2$ |
| Relação de Transformação Transformador | $\frac{v_{prim}}{v_{sec}}$ | $\frac{V}{V}$ | Relação de Engrenagem | $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ | $\frac{N m}{N m}$ |

Os elementos tais como tensão e corrente, no sistema elétrico; força e velocidade, no sistema mecânico de translação; torque e velocidade angular, no sistema mecânico de rotação, são aquilo que na teoria de servomecanismo chamam-se elementos ativos.
Entretanto, os elementos tais como resistor, indutor e capacitor, no sistema elétrico; massa, mola e amortecedor, no sistema mecânico de translação; inércia, compliância de mola e atrito viscoso, no sistema mecânico de rotação, são aquilo que na teoria de servomecanismo chamam-se elementos passivos.

---

**EXEMPLO 2.23**

Encontrar a função de transferência representada pela relação entre a força $f_S(S)$, atuante sobre a mola *K*, e uma força externa $f_E(S)$ aplicada sobre a massa *M* do sistema mecânico de translação representado na figura 2.24 seguinte.
Depois, encontrar a função de transferência entre o deslocamento $x(S)$ e a força externa $f_E(S)$.

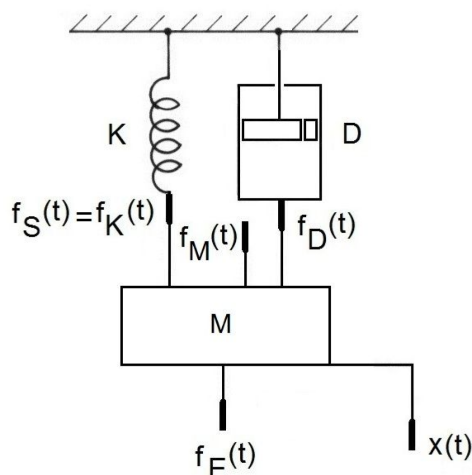



***Figura 2.24 – Sistema Mecânico de Translação***

Na figura 2.24 considerar a seguinte legenda:

$f_E(t)$: força externa aplicada sobre o conjunto
$f_S(t) = f_K(t)$: força na mola ou sinal de saída
$f_D(t)$: força no amortecedor
$f_M(t)$: força da massa *M*
$x(t)$: deslocamento da massa *M*
$M$: massa
$K$: compliância de mola
$D$: coeficiente de viscosidade cinemática
$t$: variável independente tempo

**Solução:**

Para solucionar o presente problema, será preciso obter a equação diferencial geral para o sistema. A equação geral pode ser obtida através da aplicação da segunda lei de Newton ao movimento do sistema mecânico de translação cujas bases dos elementos ativos e passivos já foram estudadas anteriormente.

As forças atuantes sobre a massa $M$ podem ser agrupadas da mesma forma como foram agrupadas as tensões no circuito RLC-Série da equação 2.107.

Assim, tem-se que:

$$f_E(t) = f_D(t) + f_M(t) + f_K(t)$$

$$f_E(t) = D\upsilon(t) + M\,\frac{d\upsilon(t)}{dt} + \frac{1}{K}\int_0^t \upsilon(t)\,dt$$

No plano complexo de Laplace, tem-se que:

$$f_E(S) = f_D(S) + f_M(S) + f_K(S)$$

Ou ainda:

$$f_E(S) = D\,\upsilon(S) + M\,S\,\upsilon(S) + \frac{1}{K}\,\frac{1}{S}\,\upsilon(S)$$

A equação anterior permite a obtenção da expressão da velocidade $\upsilon(S)$. Senão, veja-se:

$$\upsilon(S) = \frac{KS}{1 + KD\,S + KM\,S^2}\,f_E(S)$$

Deste modo, a expressão de $f_E(S)$ anterior toma a seguinte forma, substituindo-se a expressão de $\upsilon(S)$:

$$f_S(S) = f_K(S) = \frac{1}{K\,S}\left(\frac{KS}{1 + KD\,S + KM\,S^2}\right) f_E(S)$$

A função de transferência pedida no problema será dada pela seguinte relação $\frac{f_S(S)}{f_E(S)}$:

$$\frac{f_S(S)}{f_E(S)} = \frac{f_K(S)}{f_E(S)} = \frac{1}{1 + KD\,S + KM\,S^2} = \frac{1/KM}{1/KM + D/M\,S + S^2}$$

Para encontrar a função de transferência entre o deslocamento $x(S)$ e a força externa $f_E(S)$, será utilizada a equação seguinte, já deduzida anteriormente no plano complexo:

$$f_E(S) = D\ \upsilon(S) + \frac{1}{K}\frac{1}{S}\upsilon(S) + M\ S\ \upsilon(S)$$

Mas sabe-se que:

$$\upsilon(S) = S\ x(S)$$

Assim, tem-se que:

$$f_E(S) = D\ S\ x(S) + \frac{1}{K}\frac{1}{S}S\ x(S) + M\ S\ S\ x(S) = (D\ S + \frac{1}{K}\ x(S) + M\ S^2)x(S)$$

A função de transferência procurada será então:

$$\frac{x(S)}{f_E(S)} = \frac{1}{\frac{1}{K} + D\ S + M\ S^2} = \frac{1/M}{1/KM + D/M\ S + S^2}$$

---

**EXEMPLO 2.24**

Seja encontrar o circuito análogo de corrente-tensão do circuito elétrico análogo de tensão-corrente mostrado na figura 2.25.

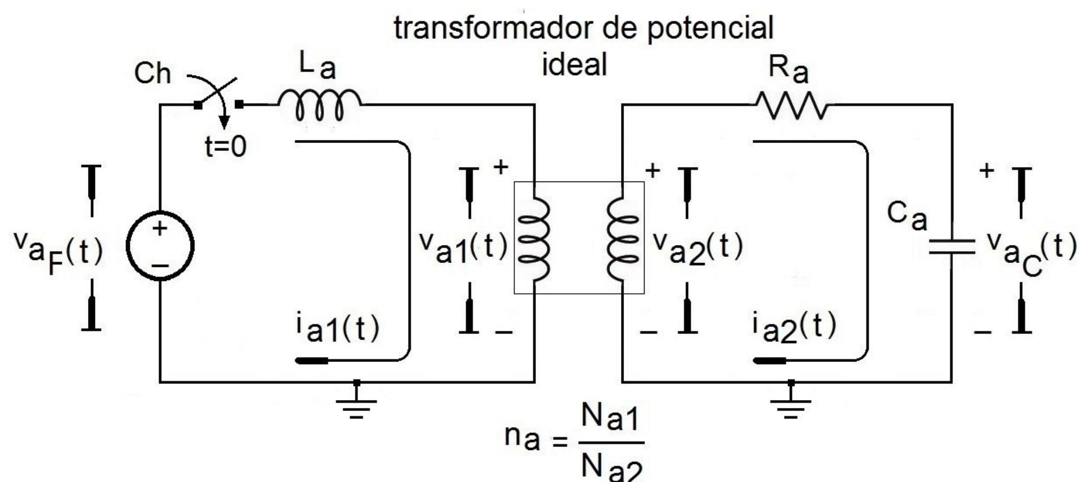


*Figura 2.25 – Circuito Elétrico com Fonte de Tensão*

Na figura 2.25 considerar a seguinte legenda:

$v_{aF}(t)$: tensão externa aplicada ao circuito
$v_{a1}(t)$: tensão no primário do transformador de potencial
$v_{a2}(t)$: tensão no secundário do transformador de potencial
$v_{aC}(t)$: tensão de saída no capacitor
$i_{a1}(t)$ : corrente no primário do transformador de potencial
$i_{a2}(t)$: corrente no secundário do transformador de potencial
$L_a$ : indutância no primário
$R_a$ : resistência no primário
$C_a$ : capacitância no secundário
$N_{a1}/N_{a2} = v_{a1}/v_{a2} = n_a$ :relação entre o número de espiras primário - secundário
$t$: variável independente tempo

**Solução:**

Para solucionar o presente problema, é importante saber que, considerando-se a tabela 2.7 anterior, as relações de analogia deverão obedecer à condição de que a fonte de tensão do primeiro circuito será substituída por uma fonte de corrente em proporções análogas no segundo circuito. Fica claro que ambos os circuitos serão duais no sentido estrito. Aqui, o primeiro circuito se refere ao circuito que apresenta a fonte de tensão como o elemento ativo enquanto que por segundo circuito entende-se ser aquele que apresenta a fonte de corrente como o elemento ativo.
Também é importante lembrar que a expressão transformador ideal tem a ver com um dispositivo teórico de transformação onde não haja qualquer tipo de perdas.
Nesse caso, o ideal será obter a equação diferencial referente às quedas de tensão de cada elemento do circuito no domínio do tempo da figura 2.25.

Assim, podem-se escrever as seguintes equações para o primeiro circuito:

$$v_{aF}(t) = L_a \frac{di_{a1}(t)}{dt} + v_{a1}(t)$$

$$v_{aC}(t) = -R_a \; i_{a2}(t) + v_{a2}(t)$$

Para a figura 2.26, podem-se escrever as seguintes equações equivalentes, considerando a dualidade entre ambos os circuitos elétricos:

$$i_{bF}(t) = C_b \frac{dv_{b1}(t)}{dt} + i_{b1}(t)$$

$$i_{bL}(t) = -G_b\, v_{b2}(t) + i_{b2}(t)$$

Outras restringências a serem observadas é que os elementos que se encontram ligados em série, em tensão, deverão ser ligados agora em paralelo no circuito dual de corrente e vice-versa, do mesmo modo que as chaves de controle que se encontram na posição *off* , no tempo $t = 0$, no circuito de tensão, deverão ser invertidas, ou seja, deverão estar na posição *on* , no tempo $t = 0$, no circuito de corrente. Ver figuras 2.25 e 2.26.

A partir das duas equações do circuito em corrente, anteriores, pode-se traçar o seguinte circuito dual que pode ser visto na figura seguinte.

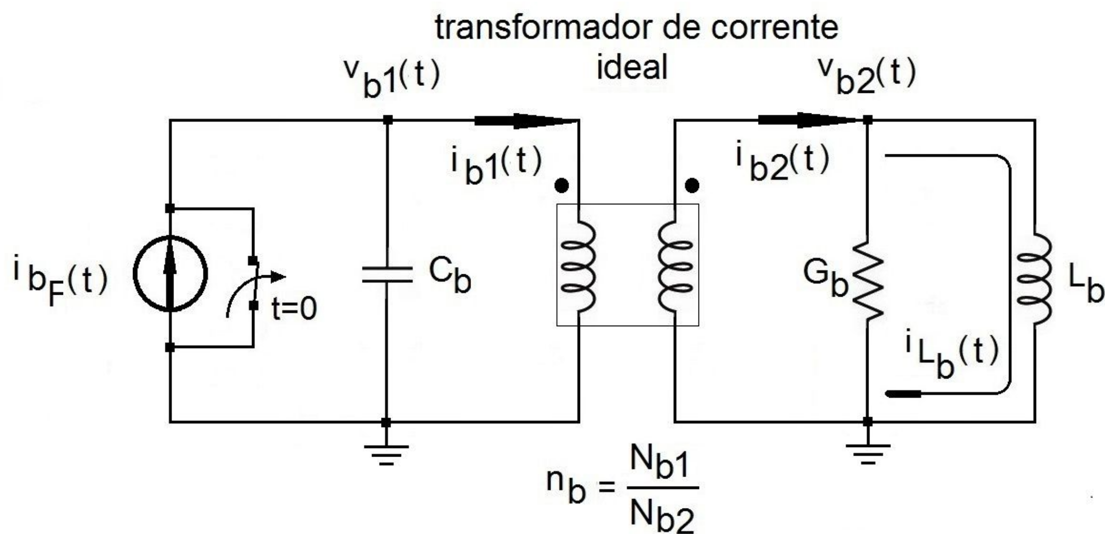



***Figura 2.26 – Circuito Elétrico com Fonte de Corrente***

Na figura 2.26 considerar a seguinte legenda:

$i_{bF}(t)$: corrente externa aplicada ao circuito
$i_{b1}(t)$: corrente no primário do transformador de corrente
$i_{b2}(t)$: corrente no secundário do transformador de corrente
$i_{bL}(t)$: corrente na indutância
$v_{b1}(t)$ : tensão no circuito primário
$v_{b2}(t)$: tensão no circuito secundário
$L_b$ : indutância no secundário
$G_b$ : condutância no secundário
$C_b$ : capacitância no primário
$N_{b1}/N_{b2} = i_{b2}/i_{b1} = n_b$ :relação entre o número de espiras primário - secundário
$t$ : variável independente tempo

**Nota a respeito do exemplo 2.24:**

Na solução desse exemplo 2.24, foi introduzido o conceito de dualidade entre dois circuitos elétricos, sendo um do tipo fonte de tensão e o outro do tipo fonte de corrente.
No geral, dois circuitos físicos são ditos duais quando as equações de malha, que caracterizam as quedas de potencial nos elementos passivos, de um dos circuitos, apresentam a mesma disposição matemática que as equações nodais que representam o outro circuito. Isso é válido tanto para os circuitos elétricos quanto para os circuitos mecânicos, térmicos, químicos, etc.
Agora, dois circuitos físicos são ditos duais exatos se cada equação de malha de um circuito é numericamente idêntica a sua correspondente no grupo de equações nodais do outro circuito.

Se fossem consideradas as equações do exemplo 2.24, os dois sistemas duais exatos seriam assim representados, dando valores numéricos aos parâmetros e funções no tempo:

Primeiro circuito, tensão-corrente:

$$v_{aF}(t) = 10\ \frac{di_{a1}(t)}{dt} + 5\cos(20\,t)$$

$$v_{aC}(t) = -30\ i_{a2}(t) + 10\,sen(20t)$$

Segundo circuito, corrente-tensão:

$$i_{bF}(t) = 10\ \frac{dv_{b1}(t)}{dt} + 5\cos(20\,t)$$

$$i_{bL}(t) = -30\ v_{b2}(t) + 10\cos(20\,t)$$

E vice-versa.

## 2.2.9. Leis Físicas Aplicadas em Servomecanismo

Como pode ser constatado em itens anteriores, de fato, tanto no desenvolvimento teórico quanto na solução de exemplos práticos, a necessidade do equacionamento básico inicial, visando à formulação do problema, é tarefa imprescindível no campo do estudo e da análise de sistemas de controle e servomecanismo.

Para a obtenção desse primeiro passo, o do equacionamento, deve-se lançar mão de determinadas leis físicas que são regulamentadas por equacionamento matemático rigoroso.

Os métodos disponíveis hoje em dia variam desde a observação simples e pura, passando pela utilização de modelos teóricos até a realização de ensaios especiais no sentido de obtenção das funções de transferência do modelo na condição real. Evidentemente que a preferência deve recair sobre a utilização de um modelo amparado por levantamento de campo, do contrário a análise não será tão efetiva assim. Modelos teóricos têm a virtude de resultar em boas simulações, porém algumas vezes podem muito bem não retratar a dinâmica real do processo. Podem-se citar vários exemplos que corroboram essa assertiva.

Uma das causas da não fidelidade de uma determinada modelagem tem a ver com o desconhecimento das leis da física que regem o sistema físico envolvido. Outras vezes, e isso tem sido bastante observado, o problema tem a ver com a representação de modelos pseudo-linearidades, uma grande dor de cabeça para quem irá fazer a análise posterior e tomar decisões.

### 2.2.9.1. Principais Leis Físicas

São as seguintes as principais leis de física que podem ser utilizadas com sucesso em sistemas de controle e servomecanismo:

a) segunda lei de Newton [lei de Newton-Euler];

b) lei das malhas de Kirchhoff;

c) lei dos nós de Kirchhoff;

d) lei da invariância;

d) lei da conservação da energia;

e) lei da conservação da massa e da continuidade;

f) lei da continuidade dos fluidos;

g) lei de Ohm.

**a) Segunda lei de Newton**

Enunciado:
A aceleração adquirida por um corpo é proporcional à resultante das forças que atuam sobre este mesmo corpo e inversamente proporcional a sua massa tendo a mesma direção e sentido da força resultante.

A segunda lei de Newton tem a ver com a parte da física chamada de dinâmica. O enunciado da segunda lei de Newton pressupõe que, independente da forma e do estado físico desse corpo, a massa que o representa esteja confinada a um só ponto chamado de centro de massa. Na mecânica clássica, pode-se considerar que o centro de massa de um corpo seja o ponto onde toda sua massa fica concentrada. Este ponto pode ser o centro geométrico do corpo, também chamado de centróide. O centro de massa irá sempre coincidir com o centro geométrico no caso em que o corpo for considerado homogêneo. Porém, se o corpo não for homogêneo, o centro de massa pode estar em qualquer outro ponto não coincidente com o centro geométrico. Se o sistema, por exemplo, for constituído por duas ou mais massas, definidas por seus limites físicos, há casos em que o centro de massa do conjunto poderá estar localizado fora do limite físico e tangível dessas massas. Isso pode ocorrer em sistemas mecânicos de rotação.

Deste modo, pode-se escrever o seguinte:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{R}}{m} \tag{2.141}$$

onde

$\vec{a}$ : vetor aceleração agindo sobre o corpo
$\vec{R} = \sum F$ : vetor da resultante do somatório das forças atuantes sobre o corpo
$m$ : massa do corpo

Notar que a aceleração pode ser representada em função da velocidade $\vec{v}(t)$ que, por sua vez, poderá ser também representada pelo deslocamento $\vec{x}(t)$ do corpo em movimento.

Assim, é possível que se escreva a equação 2.141 da seguinte forma:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{v} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{x} = \frac{\vec{R}}{m} \tag{2.142}$$

Notar que o sentido do vetor aceleração é o mesmo que aquele da resultante das forças atuante sobre o corpo em movimento e que também tem o mesmo sentido do movimento ou do deslocamento dado pelos vetores unitários $\hat{v}$ e $\hat{x}$.

**b) Lei das malhas de Kirchhoff**

Enunciado:

A lei de Kirchhoff para as tensões, também conhecida como lei das malhas, estabelece que a soma dos aumentos e das quedas de potencial, ao longo de qualquer circuito elétrico fechado, é nula.
Como se pode notar, trata-se de uma lei desenvolvida para o tratamento das tensões elétricas em circuitos. Ela dá preferência para uma topologia na forma em série dos circuitos.

***Circuito RLC-Série: Elétrico com Fonte de Tensão***

Imaginando um circuito elétrico em serie, do tipo RLC, conforme figura 2.14 anterior, cujo equacionamento utilizou a lei das malhas, repete-se aqui por conveniência a equação geral, no domínio do tempo, na forma de somatório dos potenciais envolvidos.

$$v_E(t) - R\ i(t) - L\ \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\ dt = 0 \qquad (2.143)$$

Cada um dos elementos passivos do circuito RLC-Série apresenta uma queda de tensão que obedece a regra seguinte, lembrando-se que a fonte é o elemento ativo:

$$\text{resistor} \qquad R \rightarrow v_R(t) = R\,i(t) \qquad (2.144)$$

$$\text{indutor} \qquad L \rightarrow v_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad (2.145)$$

$$\text{capacitor C} \rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\ dt \qquad (2.146)$$

A lei das malhas de Kirchhoff pode ser utilizada de maneira análoga em circuitos mecânicos tanto de translação quanto de rotação.

***Circuito DMK-Série: Mecânico de Translação***

A figura 2.27, seguinte, mostra um circuito do tipo DMK-Série, ou seja, um circuito do tipo amortecedor-massa-mola, um sistema mecânico de translação,

cujos elementos passivos encontram-se ligados em série, considerando-se a analogia entre potencial elétrico e força mecânica.

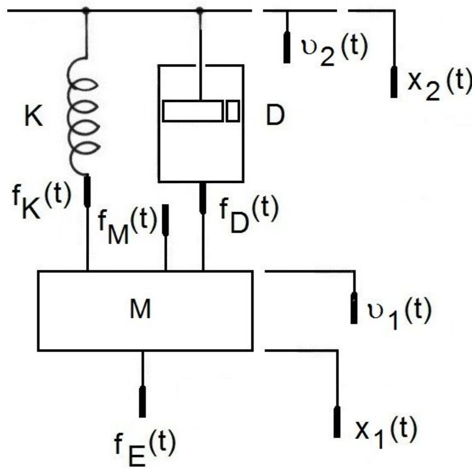



***Figura 2.27 – Circuito DMK - Série***

A legenda da figura 2.27 é a mesma da figura 2.24, anterior, sendo $\upsilon_1(t)$ e $\upsilon_2(t)$ as velocidades envolvidas no processo.

Assim, tem-se, para o somatório de potencial, que:

$$f_E(t) - f_D(t) - f_M(t) - f_K(t) = 0 \qquad (2.147)$$

Considerando-se as leis físicas para cada um dos elementos passivos, a seguinte equação geral relacionada ao circuito DMK-Série da figura 2.27 é obtida, onde a força externa aplicada é o elemento ativo:

$$f_E(t) - D\,[\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)] - M\,\frac{d\,[\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)]}{dt} - \frac{1}{K}\int_0^t [\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)]\;dt = 0 \qquad (2.148)$$

$$\text{amortecedor D} \;\rightarrow\; f_D(t) = D\,[\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)] \qquad (2.149)$$

$$\text{massa M} \;\rightarrow\; f_M(t) = M\,\frac{d\,[\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)]}{dt} \qquad (2.150)$$

$$\text{mola K} \;\rightarrow\; f_K(t) = \frac{1}{K}\int_0^t [\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)]\;dt \qquad (2.151)$$

**Nota a respeito do exemplo 2.23:**

Observar que para o equacionamento do sistema mecânico referente à figura 2.24, anterior, o valor da velocidade $\upsilon_2(t) = 0$, pois a barra de apoio estava fixa, portanto com descolamento nulo, ou $x_2(t) = 0$, uma condição particular do problema.

---

***Circuito DJK-Série: Mecânico de Rotação***

A figura 2.28, seguinte, mostra um circuito do tipo DJK-Série, ou seja, um circuito do tipo fricção-inércia-torção de mola, um sistema mecânico de rotação, cujos elementos passivos encontram-se ligados em série, considerando-se a analogia entre potencial elétrico e torque mecânico.

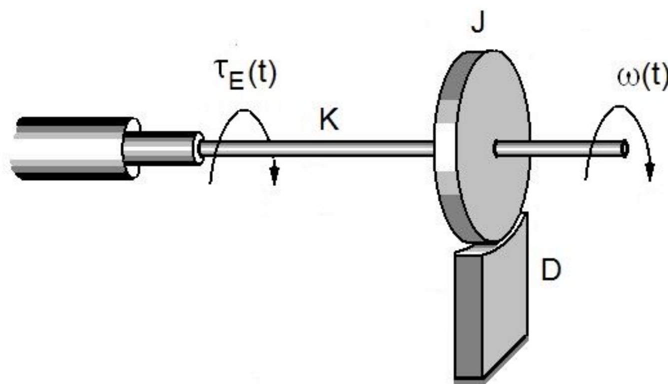



***Figura 2.28 – Circuito DJK - Série***

Na figura 2.28 considerar a seguinte legenda:

$\tau_E(t)$: torque externo aplicado ao conjunto
$\tau_K(t)$: torque de torção do eixo [efeito de mola]
$\tau_D(t)$: torque de fricção entre a massa e o mancal [efeito de amortecedor]
$\tau_M(t)$: torque de inércia do conjunto girante [efeito de massa girante]
$\omega(t)$: velocidade angular de giro
$J$: momento de inércia do conjunto girante
$K$: compliância torcional do eixo de transmissão
$D$: coeficiente de viscosidade cinemática do mancal
$t$: variável independente tempo

Assim, tem-se, para o somatório de potencial, no caso o torque, que:

$$\tau_E(t) - \tau_D(t) - \tau_M(t) - \tau_K(t) = 0 \tag{2.152}$$

Considerando-se as leis físicas para cada um dos elementos passivos, a seguinte equação geral relacionada ao circuito DJK-Série da figura 2.28 é obtida, onde o torque externo aplicado é o elemento ativo:

$$\tau_E(t) - D\,\omega(t) - J\,\frac{d\,\omega(t)}{dt} - \frac{1}{K}\int_0^t \omega(t)\,dt = 0 \qquad (2.153)$$

$$\text{fricção} \qquad D \rightarrow f_D(t) = D\,\omega(t) \qquad (2.154)$$

$$\text{inércia J} \rightarrow f_J(t) = M\,\frac{d\,\omega(t)}{dt} \qquad (2.155)$$

$$\text{torção de mola K} \rightarrow f_K(t) = \frac{1}{K}\int_0^t \omega(t)\,dt \qquad (2.156)$$

**c) Lei dos nós de Kirchhoff**

Enunciado:
A lei de Kirchhoff para as correntes, também conhecida como lei dos nós, estabelece que a soma das correntes que chegam e as correntes que saem de qualquer nó, em um circuito elétrico, é nula.

Como se pode notar aqui também, trata-se de uma lei desenvolvida para o tratamento das correntes elétricas em circuitos. Ela dá preferência para uma topologia na forma em paralelo dos circuitos.

***Circuito RLC-Paralelo: Elétrico com Fonte de Corrente***

Imaginando um circuito elétrico em paralelo, do tipo RLC, conforme figura 2.29 seguinte, a equação geral no domínio do tempo, pela a lei dos nós, na forma de somatório das correntes, será:

$$i_E(t) - i_R(t) - i_L(t) - i_C(t) = 0 \qquad (2.157)$$

Considerando-se as leis físicas para cada um dos elementos passivos, a seguinte equação geral relacionada ao circuito RLC-Paralelo da figura 2.29 é obtida, onde a corrente externa aplicada é o elemento ativo:

$$i_E(t) - \frac{1}{R}v(t) - \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\, dt - C\frac{dv(t)}{dt} = 0 \qquad (2.158)$$

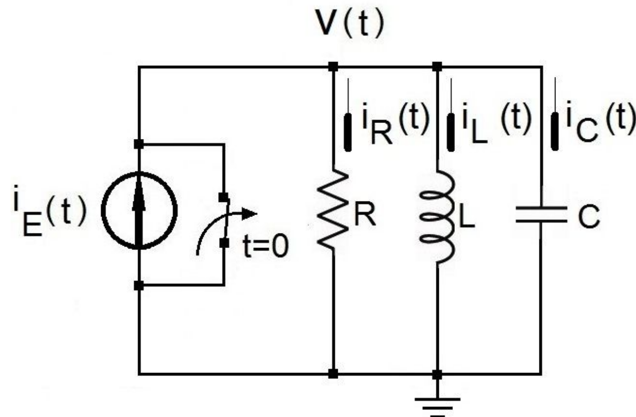



***Figura 2.29 – Circuito RLC - Paralelo***

Cada um dos elementos passivos do circuito RLC-Paralelo apresenta uma queda de tensão que obedece a regra seguinte, lembrando-se que a fonte é o elemento ativo:

$$\text{resistor} \qquad R \rightarrow \; i_R(t) = \frac{v(t)}{R} \qquad (2.159)$$

$$\text{indutor} \qquad L \rightarrow \; i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\, dt \qquad (2.160)$$

$$\text{capacitor C} \rightarrow \; i_C(t) = C\frac{d\,v(t)}{dt} \qquad (2.161)$$

**d) Lei da invariância**

O conceito de invariância, em associação ao que aqui se está chamado de lei da invariância, tem a ver com o que na física é chamado de invariante.
A invariância é uma propriedade da matemática onde determinadas grandezas, em função do sistema de coordenadas aplicado, se mantém inalteradas, em outras palavras, são grandezas ou valores que se apresentam invariáveis diante de uma determinada transformação de coordenadas.

Numa conceituação mais rigorosa, pode-se dizer o seguinte:

Seja $A$ um agrupamento de transformações atuando sobre um conjunto qualquer $B$ existente dentro de um espaço previamente definido. Dada uma função qualquer $f(x)$, se existirem dois elementos do conjunto $B$, elementos

chamados de $x$ e $y$ que se inter-relacionem por intermédio de uma transformação $T$, específica e pertencente ao agrupamento $A$ de transformações possíveis, se $y = f(xT) = f(x)$, para todo $T \in A$ e todo $x \in B$, então pode-se dizer que $f(x)$ é um invariante.

Para a simples análise do processo de controle e servomecanismo, citam-se como invariantes grandezas tais como a potência, o torque de translação, o torque de rotação entre outros.

## ***Circuito Elétrico com Transformador Ideal***

Imaginando um circuito elétrico, dotado de um processo de transformação elétrica, assim como é mostrado na figura 2.30, onde apenas aparece a ligação do transformador, pode-se escrever a seguinte equação de potência aparente instantânea transferida entre primário e secundário em função da invariância desta:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) = v_2(t)i_2(t) \tag{2.162}$$

Também é sabido que, num transformador, em função até da equação anterior de invariância de potência, a transformação entre as tensões e correntes guarda a seguinte relação:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{i_2(t)}{i_1(t)} = \frac{N_1}{N_2} = n \tag{2.163}$$

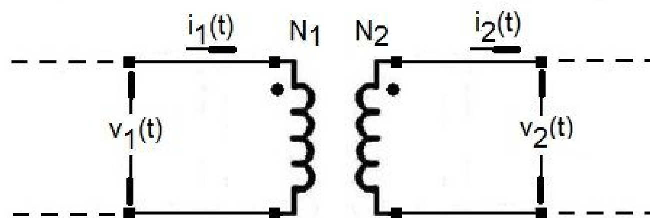



***Figura 2.30 – Transformador Ideal***

Na figura 2.30 considerar a seguinte legenda:

$v_1(t)$: tensão no primário do transformador
$v_2(t)$: tensão no secundário do transformador
$i_1(t)$: corrente no primário do transformador
$i_2(t)$: corrente no secundário do transformador
$N_1$ : número de espiras do enrolamento primário
$N_2$ : número de espiras do enrolamento secundário
$t$ : variável independente tempo

Da forma como está posto na equação 2.163, é possível se trabalhar com o que é chamado de circuito referido. O equacionamento, quando o circuito encontra-se carregado, ou seja, em carga, pode ser referido ao primário ou ao secundário conforme a necessidade assim o exigir.
A figura 2.31, mostra um circuito de transformador de potencial ideal em situação de carregamento com uma carga $z_2$ colocada no secundário, como é mais usual se verificar. Notam-se as correntes circulantes pelos enrolamentos primário e secundário no circuito original na figura 2.31(a). Na figura 2.31(b), o mesmo circuito é representado, somente que referido ao primário do transformador. Na figura 2.31(c), o mesmo circuito é representado, agora de modo simplificado. Todos os três circuitos são equivalentes.

Notar que as impedâncias $z_1$, do primário, e $z_2$, do secundário, guardam entre si a seguinte relação que pode ser extraída da equação 2.163 com a aplicação da primeira lei de Kirchhoff:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{v_1(t)}{i_1(t)}\frac{i_2(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}\frac{N_1}{N_2} = (\frac{N_1}{N_2})^2 = n^2$$

Logo, ao se querer referir um valor de impedância do secundário, por exemplo, a impedância $z_2$, a seguinte expressão deverá ser usada:

$$z_1 = (\frac{N_1}{N_2})^2 z_2 = n^2 z_2 \quad \therefore \quad z'_2 = n^2 z_2 \qquad (2.164)$$

onde $z'_2$ é o valor da impedância $z_2$ referida ao primário do transformador cuja relação de transformação é agora $n$ .

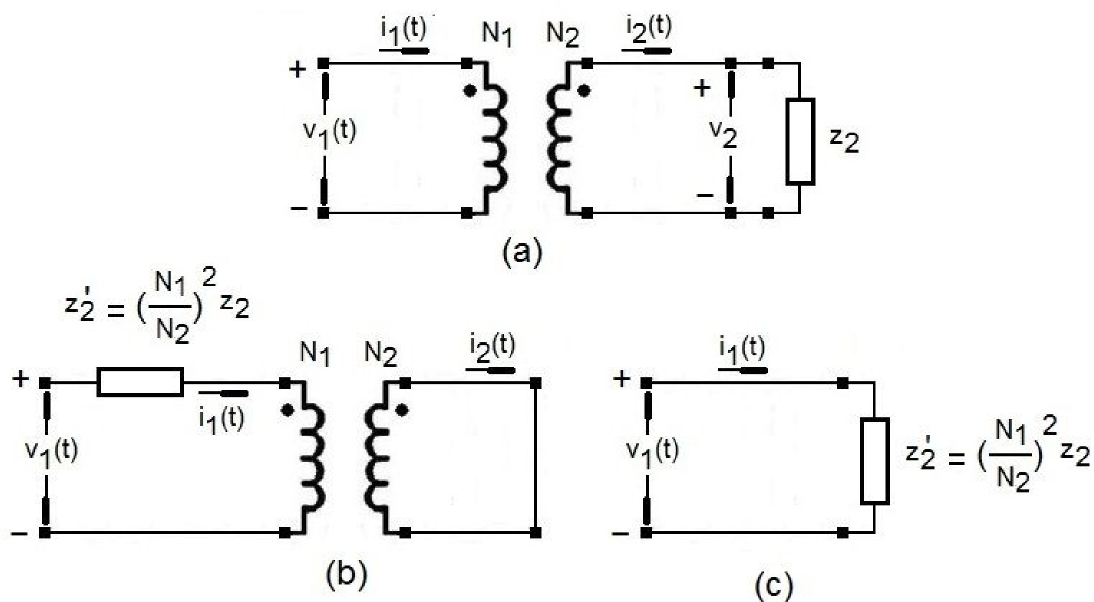



*Figura 2.31 – Circuitos Equivalentes de um Transformador Ideal*

**Nota a respeito do circuito equivalentes de um transformador ideal:**

Como pode ser observado nas figuras 2.30 e 2.31, o transformador apresentado aqui se refere ao um transformador ideal, ou seja, uma máquina elétrica sem perdas nem de origem magnetizante nem perdas Joule oriundas do cobre devido aos enrolamentos. Deste modo, num transformador ideal, a fmm que age no núcleo de ferro é nula o que confirma a não existência de fluxo de excitação.
Isso conduz a uma representação conhecida como equivalente *T* do transformador onde o ramo magnetizante não é representado.

Notar também que o circuito que se utiliza do transformador ideal pode ser aplicado tanto ao transformador de potencial quanto ao transformador de corrente.

***Sistema Mecânico de Translação com Alavanca Ideal***

Imaginando um sistema mecânico de translação, representado por um sistema de alavanca ideal, assim como é mostrado na figura 2.32, pode-se escrever a seguinte equação de potência instantânea transmitida entre os braços em função da invariância desta:

$$p(t) = f_1(t)\upsilon_1(t) = f_2(t)\upsilon_2(t) \tag{2.165}$$

Também é sabido que, numa alavanca ideal, em função da equação anterior de invariância da potência transmitida, a transformação entre as forças e velocidades tangenciais guarda a seguinte relação:

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{\upsilon_2(t)}{\upsilon_1(t)} = n \qquad (2.166)$$

Considerando que os movimentos da alavanca em torno do fulcro, ponto *0* da figura 2.32, sejam pequenos, o que realmente ocorre nos sistemas hidromecânicos conhecidos, pode-se considerar a existência de certa linearidade no processo de modo que os triângulos *A0C* e *B0D* são triângulos retângulos e semelhantes. Daí resulta que:

$$\frac{\upsilon_1(t)}{\upsilon_2(t)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{n} \qquad (2.167)$$

Unindo as equações 2.166 e 2.167, obtém-se a relação de transformação do sistema de alavanca da figura 2.32 conforme a seguinte equação:

$$\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{d_1}{d_2} \quad \therefore \quad \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{d_2}{d_1} = n \qquad (2.168)$$

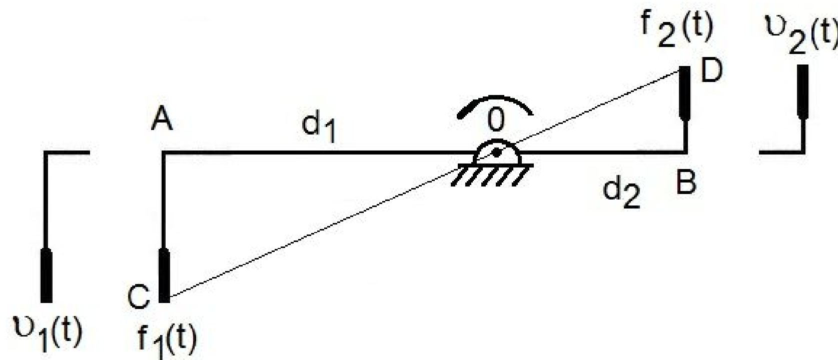



***Figura 2.32 – Alavanca Ideal***

Na figura 2.32 considerar a seguinte legenda:

$f_1(t)$: força no braço primário da alavanca
$f_2(t)$: força no braço secundário da alavanca
$\upsilon_1(t)$: velocidade no braço primário da alavanca
$\upsilon_2(t)$: velocidade no braço secundário da alavanca
$d_1$ : comprimento do braço primário
$d_2$ : comprimento do braço secundário
$t$: variável independente tempo

Da forma como está posto nas equações 2.166 e 2.168, também aqui é possível se trabalhar com o que é chamado de circuito referido. O equacionamento, quando o sistema encontra-se carregado, ou seja, em carga, pode ser referido ao primário ou ao secundário da alavanca conforme a necessidade assim o exigir.
A figura 2.33, mostra um sistema de alavanca ideal em situação de carregamento com uma carga $z_2$, composta por uma associação de um amortecedor e uma massa, na configuração série, colocada no braço secundário. Não há perdas no sistema da alavanca ideal nem envergamento dos braços. Notam-se as forças e as velocidades tangenciais pelos braços primário e secundário no dispositivo original na figura 2.33(a). Na figura 2.33(b), o mesmo sistema é representado, somente que se encontra referido ao braço primário da alavanca. Na figura 2.33(c), o mesmo sistema é representado agora de modo simplificado. Todas as três representações são equivalentes. Notar a analogia com o caso anterior que foi aplicado ao transformador ideal.

Notar também que as impedâncias mecânicas $z_1$, do primário, e $z_2$, do secundário, guardam entre si a seguinte relação que pode ser extraída das equações 2.166 e 2.168 em analogia à aplicação da primeira lei de Kirchhoff:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{f_1(t)}{\upsilon_1(t)} \frac{\upsilon_2(t)}{f_2(t)} = \frac{d_2}{d_1} \frac{d_2}{d_1} = (\frac{d_2}{d_1})^2 = n^2$$

Logo, ao se querer referir um valor de impedância do secundário, por exemplo, a impedância $z_2$, a seguinte expressão deverá ser usada:

$$z_1 = (\frac{d_2}{d_1})^2 z_2 = n^2 z_2 \quad \therefore \quad z'_2 = n^2 z_2 \qquad (2.169)$$

onde $z'_2$ é o valor da impedância $z_2$ referida ao braço primário da alavanca em questão cuja relação de transformação é agora $n$.

Pode-se também representar a impedância mecânica, referida ao braço primário da alavanca ideal, em termos de números complexos, da seguinte forma:

$$z'_2 = D'_2 + j\omega M'_2 = n^2 (D_2 + j\omega M_2) \qquad (2.170)$$

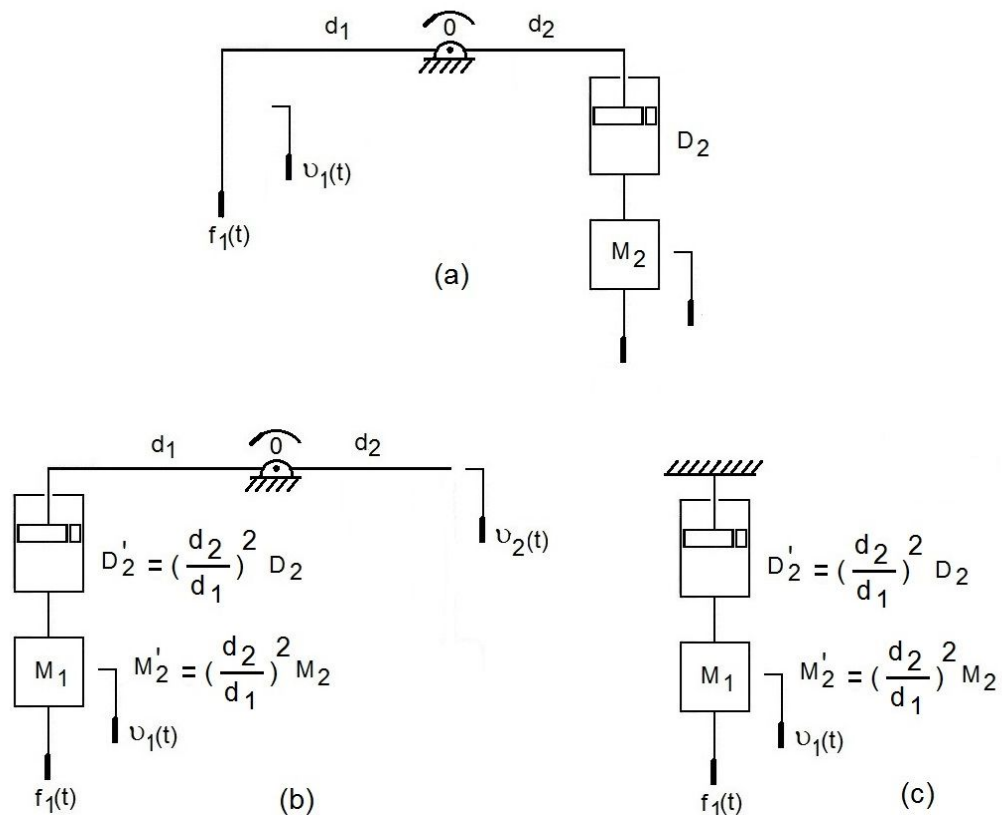



*Figura 2.33 – Circuitos Equivalentes do Sistema de Alavanca Ideal*

**Nota a respeito do circuito equivalente de uma alavanca ideal:**

É interessante observar que a idéia de impedância mecânica aqui desenvolvida em nada invalida a utilização desta concepção para efeito de análise. Assim como ocorre nos sistemas de natureza elétrica, aqui também existirá a necessidade do conhecimento dos efeitos da freqüência complexa de operação para se conhecer o perfeito funcionamento do sistema.

***<u>Sistema Mecânico de Rotação com Engrenagem de Transmissão Ideal</u>***

Imaginando um sistema mecânico de rotação, representado por um sistema de engrenagens ideal, assim como é mostrado na figura 2.34, pode-se escrever a seguinte equação de potência instantânea transmitida entre os eixos em função da invariância desta:

$$p(t) = \tau_1(t)\,\omega_1(t) = \tau_2(t)\,\omega_2(t)$$

Também é sabido que, num jogo de engrenagens ideal, em função da equação anterior de invariância da potência transmitida, a transformação entre os torques e velocidades angulares guarda a seguinte relação:

$$\frac{\tau_1(t)}{\tau_2(t)} = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = n \qquad (2.171)$$

Considerando que a velocidade tangencial entre o jogo de engrenagens é um invariante, isso resulta que:

$$\upsilon(t) = \omega_1(t) r_1 = \omega_2(t) r_2 \quad \therefore \quad \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{n} \qquad (2.172)$$

Deve-se saber também que, em função do encaixe necessário ao perfeito funcionamento da transmissão, os dentes das duas engrenagens têm ser iguais. Outra conclusão importante é que as velocidades tangenciais desenvolvidas nas engrenagens são iguais, deste modo, os dentes de ambas apresentam o mesmo comprimento de arco em radianos o que faz com que a velocidade angular possa ser dada também em função do número de dentes por segundo, isso resulta que:

$$\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n} \quad \therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \qquad (2.173)$$

Unindo as equações 2.171, 2.172 e 2.173, obtém-se a relação de transformação do sistema de engrenagens ideal da figura 2.34 conforme a seguinte equação:

$$\frac{\tau_1(t)}{\tau_2(t)} = \frac{r_1}{r_2} \quad \therefore \quad \frac{\tau_1(t)}{\tau_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = n \qquad (2.174)$$

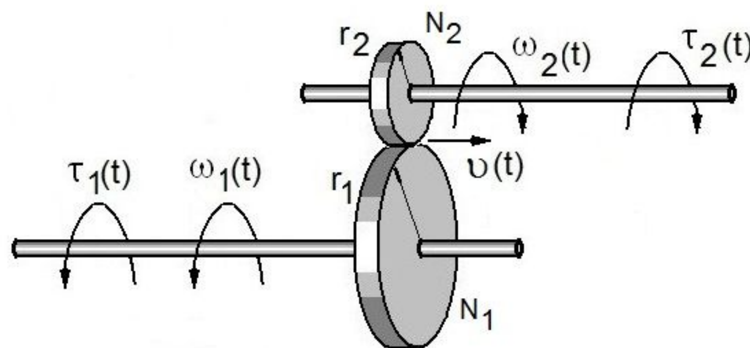



***Figura 2.34 – Jogo de Engrenagens Ideal***

Na figura 2.34 considerar a seguinte legenda:

$\tau_1(t)$: torque no eixo primário do jogo de engrenagens
$\tau_2(t)$: torque no eixo secundário do jogo de engrenagens
$\omega_1(t)$: velocidade angular da engrenagem primária
$\omega_2(t)$: velocidade angular da engrenagem secundária
$r_1$ : raio da engrenagem primária
$r_2$ : raio da engrenagem secundária
$N_1$ : número de dentes da engrenagem primária
$N_2$ : número de dentes da engrenagem secundária
$t$ : variável independente tempo

Da forma como está posto nas equações 2.171, 2.172 e 2.173, também aqui é possível se trabalhar com o que é chamado de circuito referido. O equacionamento, quando o sistema se encontra carregado, ou seja, em carga, pode ser referido ao primário ou ao secundário do conjunto de engrenagens conforme a necessidade assim o exigir.
A figura 2.35 mostra um sistema de engrenagens ideal em situação de carregamento com uma carga $z_2$, composta por uma associação dos efeitos passivos de um mancal e de uma inércia, em rotação, na configuração série, acoplada ao eixo secundário do conjunto girante. Notam-se os torques e as velocidades angulares pelos eixos primário e secundário no dispositivo original na figura 2.35(a). Na figura 2.35(b), o mesmo sistema é representado, somente que se encontra referido ao eixo primário do sistema de engrenagens. Na figura 2.35(c), o mesmo sistema é representado agora de modo simplificado. Todas as três representações são equivalentes. Notar a analogia com o caso anterior que foi aplicado ao transformador ideal.

Notar também que as impedâncias mecânicas $z_1$, do primário, e $z_2$, do secundário, guardam entre si a seguinte relação que pode ser extraída das equações 2.171, 2.172 e 2.173 em analogia à aplicação da primeira lei de Kirchhoff:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\tau_1(t)}{\omega_1(t)} \frac{\omega_2(t)}{\tau_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \frac{N_1}{N_2} = (\frac{N_1}{N_2})^2 = n^2$$

Logo, ao se querer referir um valor de impedância do secundário, por exemplo, a impedância $z_2$, a seguinte expressão deverá ser usada:

$$z_1 = (\frac{N_1}{N_2})^2 z_2 = n^2 z_2 \quad \therefore \quad z'_2 = n^2 z_2 \qquad (2.175)$$

onde $z'_2$ é o valor da impedância $z_2$ referida ao eixo primário do sistema de engrenagens ideal em questão cuja relação de transformação é agora $n$.

Pode-se também representar a impedância mecânica, referida ao eixo primário do sistema de engrenagens ideal, em termos de números complexos, da seguinte forma:

$$z'_2 = D'_2 + j\omega J'_2 = n^2 (D_2 + j\omega J_2) \qquad (2.176)$$

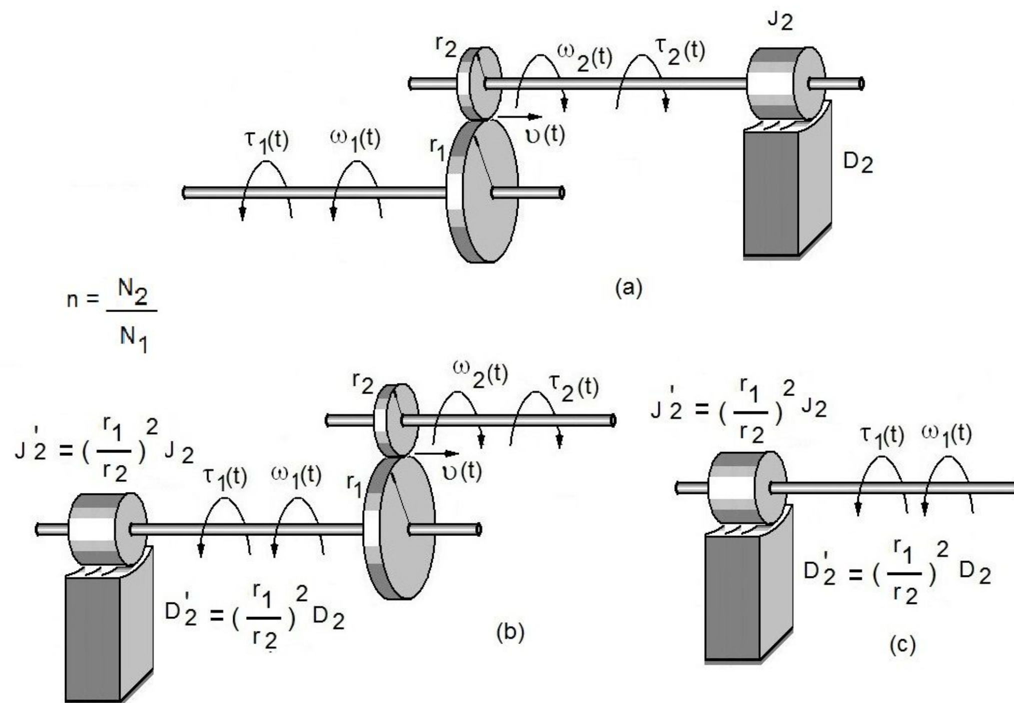



***Figura 2.35 – Circuitos Equivalentes do Sistema de Engrenagens Ideal***

---

<u>**EXEMPLO 2.25**</u>

Seja encontrar os circuitos análogos de torque-tensão e de troque-corrente do sistema mecânico de rotação mostrado na figura 2.36.
Apresentar os resultados dos circuitos referidos ao primário do circuito principal.
Desprezar as massas dos eixos de transmissão.

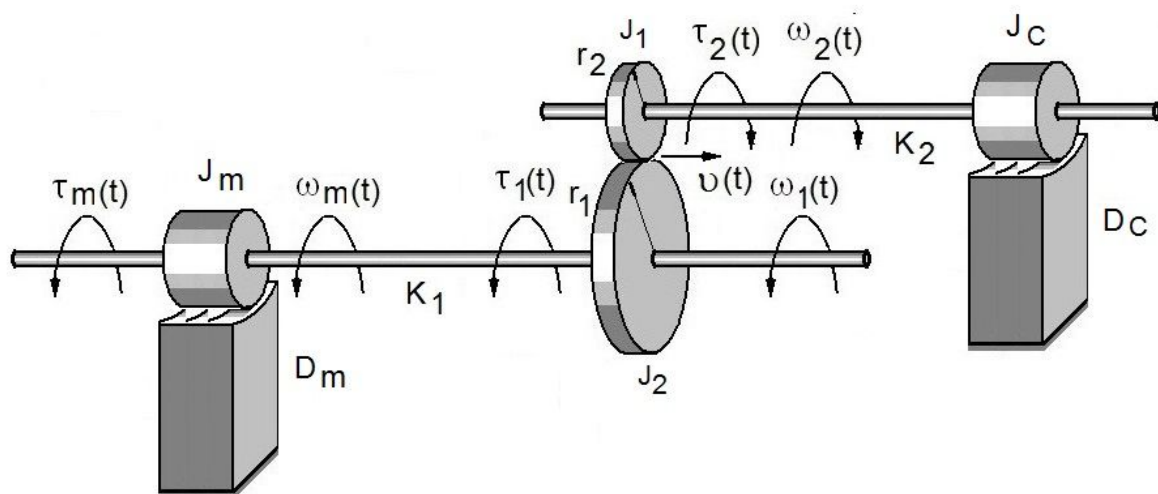



***Figura 2.36 – Sistema Mecânico Duplo de Rotação***

Na figura 2.36 considerar a seguinte legenda:

$\tau_m(t)$: torque do motor externo em *[Nm]*
$\omega_m(t)$: velocidade angular do motor externo em *[rad/s]*
$\tau_1(t)$: torque aplicado no eixo primário do jogo de engrenagens em *[Nm]*
$\tau_2(t)$: torque aplicado no eixo secundário do jogo de engrenagens em *[Nm]*
$\omega_1(t)$: velocidade angular da engrenagem primária em *[rad/s]*
$\omega_2(t)$: velocidade angular da engrenagem secundária em *[rad/s]*
$J_m$ : momento de inércia do conjunto motor em $[Kg\, m^2]$
$K_1$ : compliância torcional do eixo de transmissão do lado primário em [*rad/Nm*]
$D_m$ : coeficiente de viscosidade cinemática do mancal do conjunto motor em [*Nms/rad*]
$J_c$ : momento de inércia da carga em $[Kg\, m^2]$
$K_2$ : compliância torcional do eixo de transmissão do lado secundário em [*rad/Nm*]
$D_c$ : coeficiente de viscosidade cinemática do mancal da carga em [*Nms/rad*]
$r_1$ : raio da engrenagem primária
$r_2$ : raio da engrenagem secundária
$t$ : variável independente tempo

**Solução:**

O presente problema pede que se monte um circuito elétrico, do tipo fonte de tensão, análogo ao sistema mecânico de rotação da figura 2.36 que apresenta um jogo de engrenagens do tipo ideal. No eixo primário se encontra ligado o motor responsável pelo torque de ação e sendo este, portanto, o elemento ativo. No eixo secundário encontra-se acoplada a carga. A transmissão do

torque motor à carga se dá por meio das engrenagens. São considerados os três elementos passivos, a saber, os momentos de inércia, tanto do motor quanto da carga, o efeito das compliâncias torcionais, de ambos os eixos de transmissão, e os efeitos de fricção e amortecimento associados aos mancais de encosto e guia dos dois lados dos eixos. Na realidade, os elementos passivos representados em cada um dos eixos da figura 2.36 compõem a carga do sistema e estão dispostos de maneira concentrada.

Considerando-se as leis físicas aplicáveis a cada um dos elementos passivos do sistema mostrado na figura 2.36, as seguintes equações, relacionadas ao sistema DJK-Série da figura 2.28, são obtidas onde o torque motor de entrada é o elemento ativo:

Do lado primário, tem-se que:

$$\tau_m(t) - D_m\,\omega_1(t) - J_m\,\frac{d\,\omega_1(t)}{dt} - \frac{1}{K_1}\int_0^t [\omega_m(t) - \omega_1(t)]\,dt - J_1\,\frac{d\,\omega_1(t)}{dt} - \tau_1(t) = 0 \tag{2.177}$$

Do lado secundário, tem-se que:

$$\tau_2(t) - J_2\,\frac{d\,\omega_2(t)}{dt} - \frac{1}{K_2}\int_0^t \omega_2(t)\,dt - D_c\,\omega_2(t) - J_c\,\frac{d\,\omega_2(t)}{dt} = 0 \tag{2.178}$$

Análogo Torque-Tensão

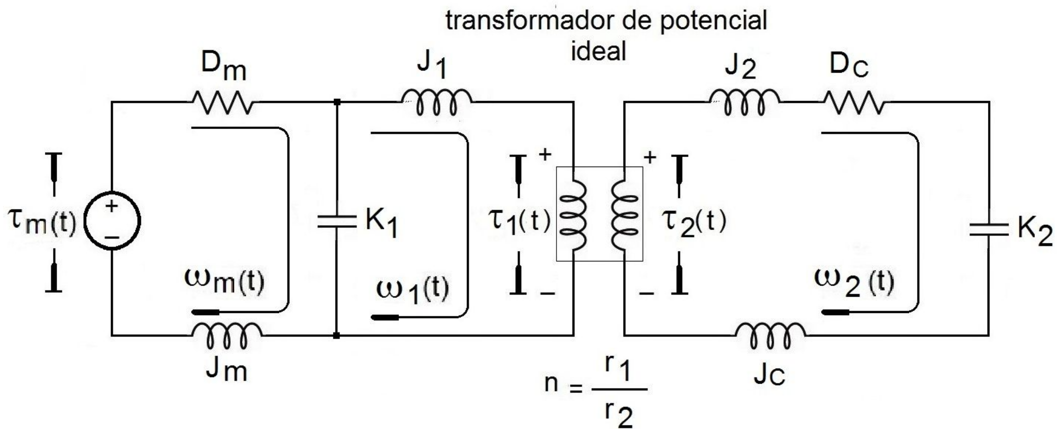



*Figura 2.37 – Análogo em Tensão do Sistema da Figura 2.36*

Análogo Torque-Corrente

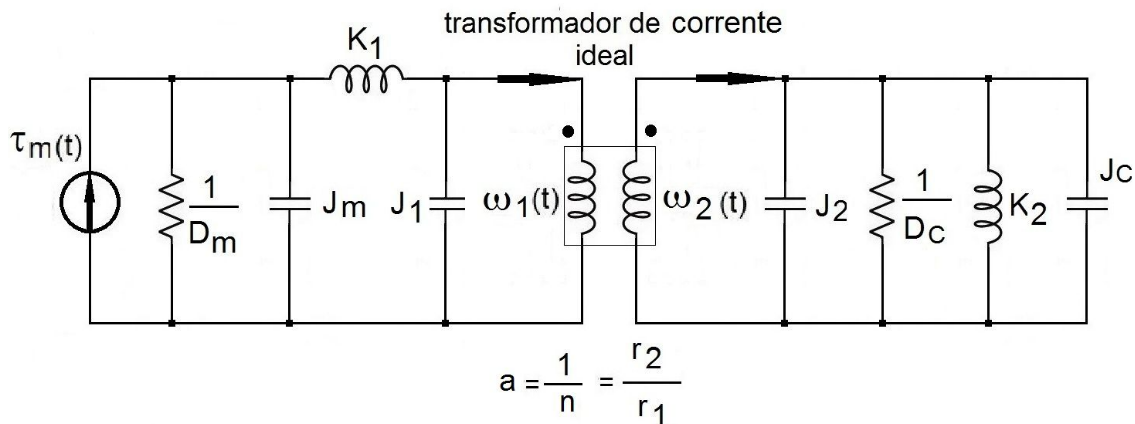



***Figura 2.38 – Análogo em Corrente do Sistema da Figura 2.36***

As figuras 2.37 e 2.38 mostram os dois circuitos pedidos pelo problema, ou seja, os análogos torque-tensão e torque-corrente, porém com os elementos referidos a cada um de seus lados originais, primário e secundário.

Para representar ambos os sistemas referidos agora ao primário de cada um dos circuitos, conforme pedido pelo problema, há necessidade de se promover a conversão pelo fator $n$ ou $n' = {}^{1}\!/_{n}$ ora associado com a relação dos raios das engrenagens envolvidas ora associado com a relação de tensão ora associado com a relação de corrente, essas duas últimas ligadas ao primário e secundário de transformadores.

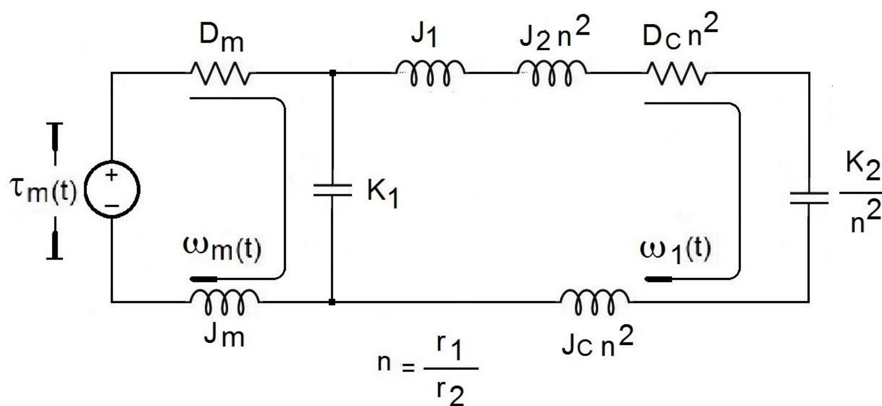



***Figura 2.39 – Análogo em Tensão do Sistema da Figura 2.36 Referido ao Primário***

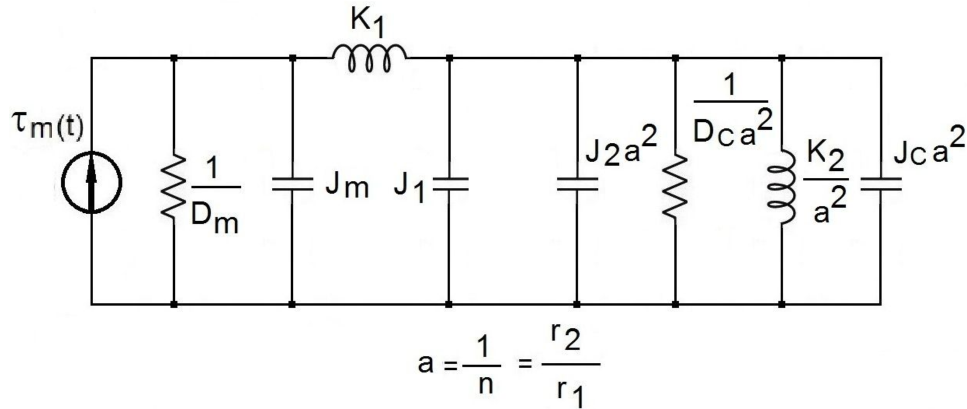



***Figura 2.40 – Análogo em Corrente do Sistema da Figura 2.36 Referido ao Primário***

---

**Explicação Sobre Dualidade entre Sistemas**

A analogia torque-corrente do sistema mecânico de rotação, mostrado na figura 2.36, deverá ser encontrada a partir da obtenção do circuito dual elétrico tensão-corrente do circuito tipo fonte de tensão deduzido e apresentado na figura 2.37.
Para tal, algumas regras deverão ser obedecidas no processo de conversão dos parâmetros, ou seja, a simples conversão geralmente não é válida quando se quer obter a dualidade de circuitos, pois há que se levar em conta a dimensionalidade das equações.
Em se tratando do exemplo 2.24, foi apresentada a questão da dualidade tensão-corrente considerando-se um circuito RL-Série tipo fonte de tensão e um circuito RC-Paralelo do tipo fonte de corrente. Os parâmetros do sistema RLC-Série da figura 2.14, por exemplo, puderam ser equacionados segundo a equação 2.107 anterior, aqui reescrita:

$$v_E(t) = R\ i(t) + L\ \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\ dt$$

Para efeito de análise, fica mais fácil trabalhar no plano complexo de modo que a seguinte equação é possível:

$$v_E(S) = R\ i(S) + LS\ i(S) + \frac{1}{CS} i(S) \qquad (2.179)$$

O equacionamento dual é mostrado a seguir:

$$i_E(S) = \frac{1}{R}\ v(S) + LSv(S) + \frac{1}{CS} v(S)$$

$$i_E(t) = \frac{1}{R}v(t) + L\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t v(t)\, dt \qquad (2.180)$$

As equações anteriores foram redesenhadas na forma de quatro circuitos mostrados na figura 2.41, pela ordem (a), (b), (c), (d).

O que se pode observar é que a resistência $R$, em ohms, no circuito original da figura 2.41(a), foi convertida no seu dual, uma condutância $G = 1/R$, em mho, no circuito final da figura 2.41(d), enquanto que a indutância $L$, em henries, foi convertida numa capacitância de igual valor $L$, em farad. Do mesmo modo, a capacitância $C$, em farad, foi convertida numa indutância de igual valor $C$, em henries.

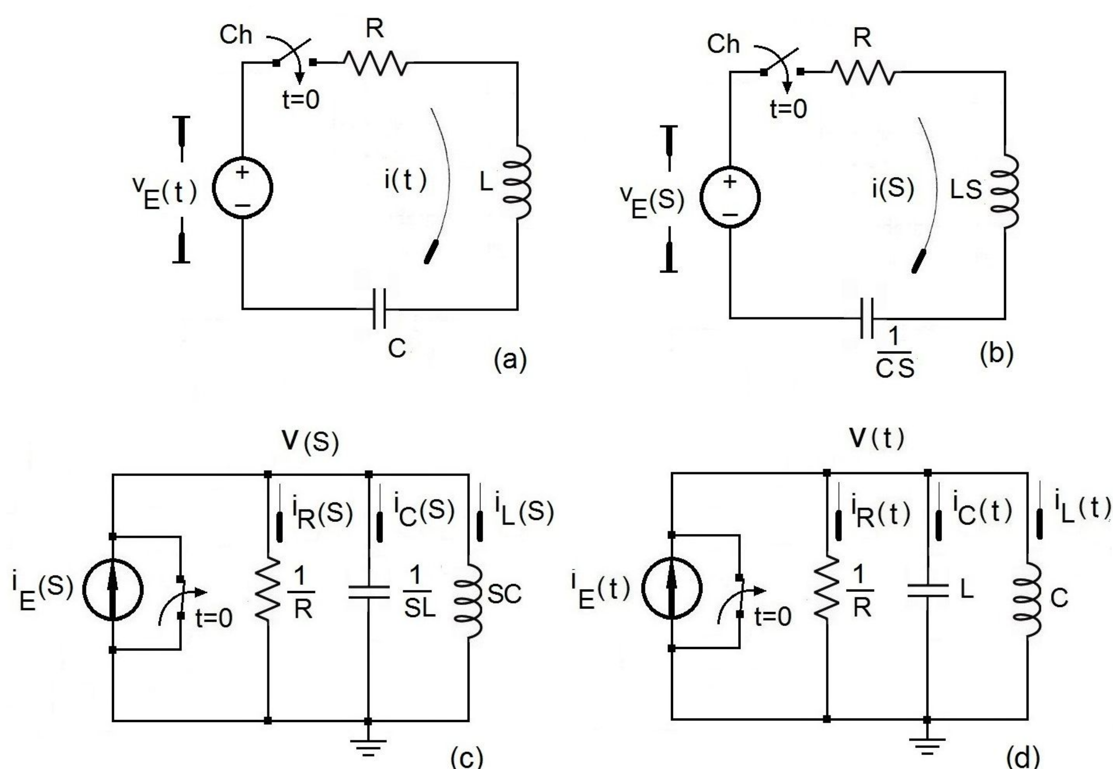



***Figura 2.41 – Análogo em Corrente do Sistema da Figura 2.36***
***(a)Circuito RLC- Série no Domínio do Tempo***
***(b) Circuito RLC- Série no Domínio Complexo***
***(c) Circuito RLC- Paralelo no Domínio Complexo***
***(d) Circuito RLC- Paralelo no Domínio do Tempo***

---

**EXEMPLO 2.26**

Seja encontrar o circuito análogo de força-tensão do sistema mecânico de translação mostrado na figura 2.42.
Desprezar a massa da barra de transmissão de comprimento $\ell$ onde $\ell = \ell_1 + \ell_2$, portanto um sistema de alavanca ideal.

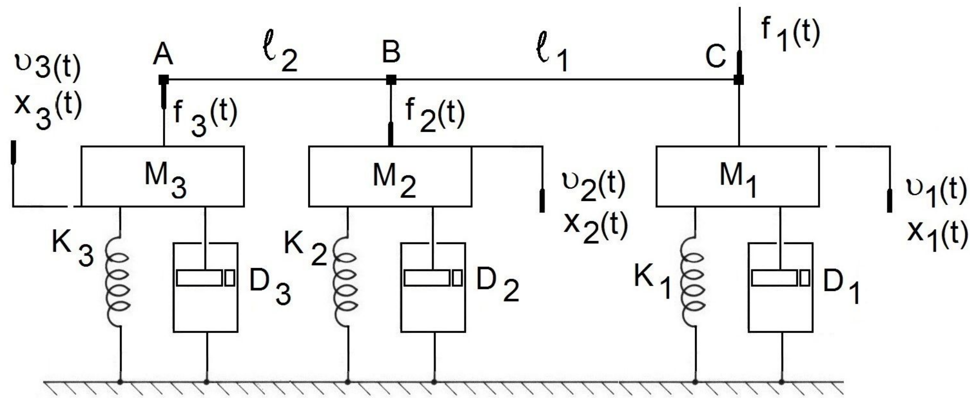



***Figura 2.42 – Sistema Mecânico de Translação***

Na figura 2.42 considerar a seguinte legenda:

$f_1(t)$: força externa aplicada sobre o conjunto DMK(1) - Série
$f_2(t)$: força transmitida ao conjunto DMK(2) - Série
$f_3(t)$: força transmitida ao conjunto DMK(3) - Série
$\upsilon_1(t)$: velocidade do deslocamento da massa $M_1$
$\upsilon_2(t)$: velocidade do deslocamento da massa $M_2$
$\upsilon_3(t)$: velocidade do deslocamento da massa $M_3$
$x_1(t)$: deslocamento da massa $M_1$
$x_2(t)$: deslocamento da massa $M_2$
$x_3(t)$: deslocamento da massa $M_3$
$M_{1,2,3}$: massas
$K_{1,2,3}$: compliâncias de mola
$D_{1,2,3}$ : coeficientes de viscosidade cinemática
$\ell_{1,2}$: comprimentos dos braços da alavanca
$t$: variável independente tempo

**Solução:**

No esquema mostrado na figura 2.42, notam-se três circuitos mecânicos que se encontram acoplados por uma alavanca, na forma de uma viga rígida, ideal. A força $f_1$ é então aplicada a partir de um dos extremos da alavanca, ponto $C$, e

transmitida aos dois outros pontos *B* e *A* através das forças $f_2$ e $f_3$, respectivamente. Para a obtenção da lei de transferência de forças entre esses pontos da alavanca, será utilizada a lei de invariância da potência instantânea transmitida entre os braços que foi aplicada ao sistema mecânico de translação da figura 2.32 anterior. Naquela oportunidade foi desenvolvida a equação 2.167 que mostrava a relação entre as velocidades para o caso de uma alavanca simples.
No presente exemplo, o sistema apresenta uma alavanca com um ponto de aplicação de uma força externa e dois pontos de reação de forças internas, todos os três conjuntos formados por três sistemas mecânicos de translação, semelhantes.

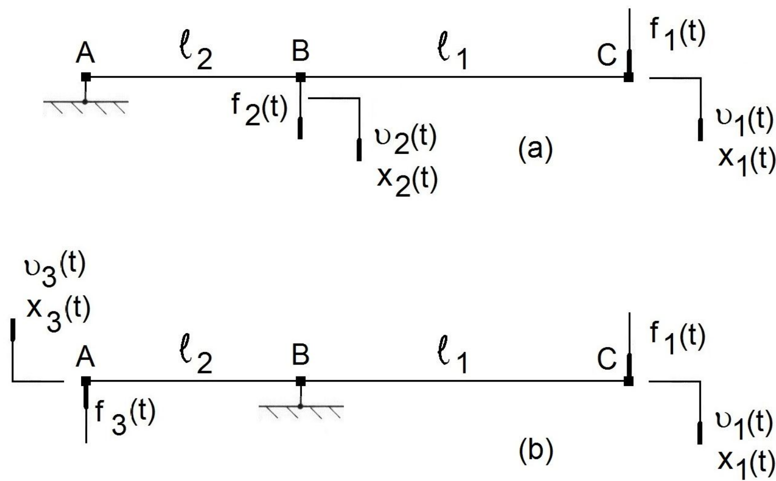



***Figura 2.43 – Sistema Mecânico de Translação do Exemplo 2.26***
***(a) Fulcro no Ponto B***

***(b) Fulcro no Ponto A***

Para a obtenção da primeira relação entre as forças $f_1$ e $f_2$ tem-se, com base na figura 2.43(a), tomando o fulcro no ponto *A*, que:

$$\frac{\upsilon_1(t)}{\upsilon_2(t)} = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2}$$

Deste modo, seguindo a equação 2.168 anterior, vem que:

$$\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{\upsilon_1(t)}{\upsilon_2(t)} \quad \therefore \quad \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2} \quad \therefore \quad \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} = n_{1,2}$$

Para a obtenção da segunda relação entre as forças $f_1$ e $f_3$ tem-se, com base na figura 2.43(b), tomando o fulcro no ponto *B,* que:

$$\frac{\upsilon_1(t)}{\upsilon_3(t)} = \frac{x_1(t)}{x_3(t)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

Deste modo, seguindo a equação 2.168 anterior, vem que:

$$\frac{f_3(t)}{f_1(t)} = \frac{\upsilon_1(t)}{\upsilon_3(t)} \quad \therefore \quad \frac{f_3(t)}{f_1(t)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad \therefore \quad \frac{f_1(t)}{f_3(t)} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = n_{1,3}$$

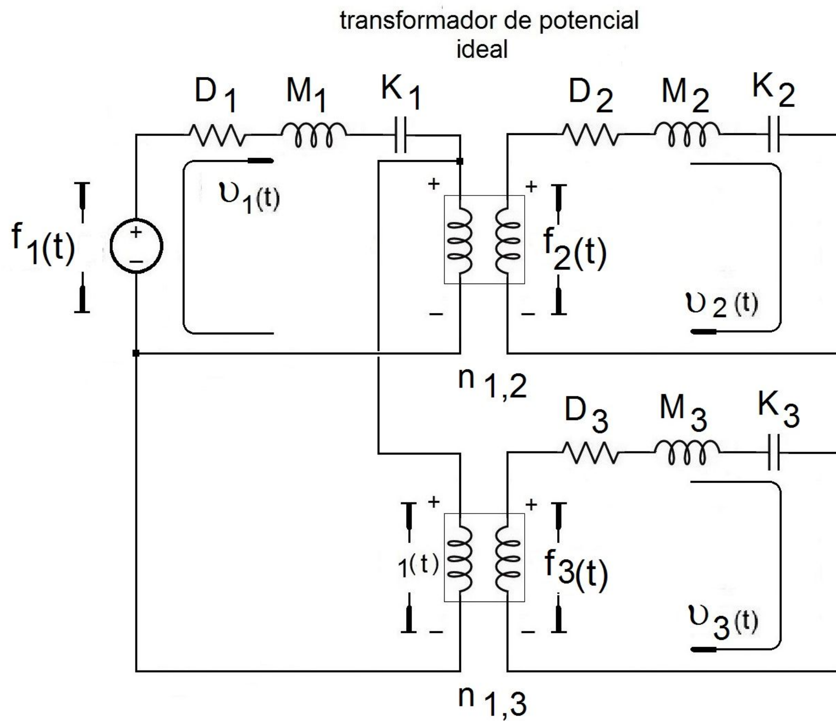



***Figura 2.44 – Análogo Força-Tensão do Sistema Mecânico de Translação do Exemplo 2.26***

---

## 2.2.10. Aspectos Específicos em Servomecanismo

### 2.2.10.1. Amplificadores Operacionais

***<u>Histórico</u>***

O circuito amplificador operacional, aqui identificado apenas por AO, nada mais é do que um dispositivo eletrônico-analógico, amplificador de tensão, com duas entradas e uma saída, cujo modelo mais simples consiste de uma fonte de tensão controlada com saída proporcional à diferença entre as tensões de entradas.

Internamente, o AO é formado por um amplificador dotado de elevado ganho que é obtido através de múltiplos estágios acoplados diretamente. As duas entradas do AO são conectadas a um amplificador diferencial.

Uma das principais características dos AOs é trabalhar com valores elevados de ganho em tensão, fato esse que permite a utilização da técnica da realimentação negativa em tensão, o que garante o trabalho dentro de uma faixa linear de operação. Com isso, o ganho geral do AO fica então definido em função do valor de sua realimentação.

O acoplamento direto entre os estágios internos do AO permite a sua utilização em circuitos envolvendo freqüências elevadas.

A origem do termo operacional tem tudo a ver com os computadores analógicos onde estes dispositivos eram utilizados como elemento-chave na efetivação de operações matemáticas associadas a aplicações várias.

Na década de 1930, os AOs compuseram aquilo que foi chamado de amplificadores diferenciais de tubo à vácuo. De dispositivos valvulados, os AOs passaram a ser confeccionados em circuitos integrados com componentes discretos, em estado sólido, o que se deu por volta dos anos 1960. Mais tarde, na década de 1970, apareceram os chamados AOs híbridos montados de maneira miniaturizada e impressa em encapsulamentos típicos.

O nome amplificador operacional foi cunhado pela primeira vez pelo professor norte-americano John Ragazzini em publicação de 1947.

O AO é um circuito integrado analógico ainda muito utilizado em função da existência de muitos reguladores e controladores automáticos em operação na indústria.

O interessante é que muitos arranjos eletrônicos específicos, desenvolvidos a partir dos AOs para a representação de determinadas funções de controle, acabaram sendo copiados pela eletrônica digital na elaboração de semelhantes circuitos de controle.

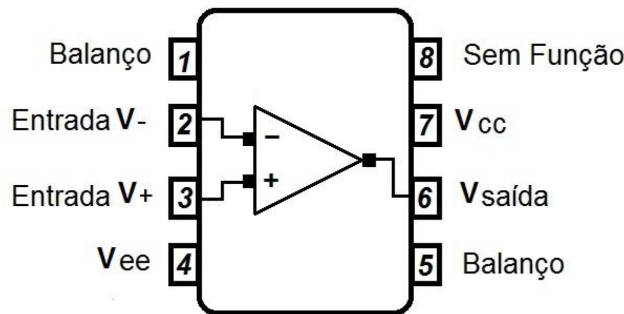



***Figura 2.45 – Esquema Básico de um Amplificador Operacional Real de Encapsulamento do Tipo DIP ou Dual In-Line Package***

Normalmente, num AO, existem três estágios de montagem; um estágio de entrada, um segundo estágio intermediário e um estágio de saída.

a) o estágio de entrada compara as tensões aplicadas, promovendo a amplificação e gerando um sinal de corrente proporcional à diferença entre as tensões de entrada. Este sinal pode receber ou fornecer um sinal decorrente para o próximo estágio

b) no segundo estágio, o sinal resultante do primeiro estágio é amplificado novamente. Desvios de freqüência que possam vir a ocorrer no processo de comparação e ganho são aqui corrigidos

c) no terceiro estágio, um amplificador com dois transistores atuam como fonte de corrente de alimentação ou como um dreno de corrente. A corrente na saída pode entrar ou sair do AO.

Em relação à figura 2.45, segue-se a correspondente pinologia:

a) os pinos 1 e 5 estão associados ao chamado balanço ou *off-set* e normalmente são conectados a um resistor variável, juntamente com a entrada negativa da alimentação, de modo a se equilibrar as tensões da entrada

b) no pino 2 é conectada a entrada inversora do AO

c) no pino 3 é conectada a entrada não inversora do AO

d) no pino 4 é conectada a alimentação negativa do AO

e) no pino 6 é conectada a saída do AO

f) no pino 7 é conectada a alimentação positiva do AO

g) no pino 8 não é conectado ou está sem função específica.

***O Amplificador Operacional Ideal***

É importante observar na figura 2.45 que existem duas tensões de alimentação, $V_{ee}$ e $V_{CC}$ , que devem ser simétricas e, via de regra, operando com tensões contínuas de +/- *15* $V_{CC}$ , na maior parte dos projetos. Os índices *e* e *c* se referem, historicamente, às tensões no emissor e no coletor, respetivamente. Como existe uma solicitação grande e variável de potência por parte do conjunto de transistores no interior do AO, é importante que as tensões envolvidas sejam estabilizadas através do acoplamento de capacitores entre a alimentação e o potencial de terra nas entradas de alimentação do dispositivo.
Os problemas principais verificados com a grande maioria dos dispositivos AOs têm muito a ver com questões ligadas tanto à freqüência quanto à dissipação. A questão da dissipação de calor também acaba sendo influenciada pelo regime operativo quando se trabalha com sinais alternados de alta freqüência, uma situação bem comum nesses casos.

As propriedades de um AO ideal são as seguintes:

a) ganho infinito de tensão diferencial

b) tensão de saída nula para tensão de entrada igual a zero

c) impedância de entrada infinita

d) impedância de saída igual a zero

e) faixa de passagem infinita

f) deslocamento de fase igual a zero

g) variação nula da tensão de saída para variações de temperatura.

Na prática, as limitações dos amplificadores operacionais são muitas assim como ocorre com qualquer dispositivo eletrônico, porém são as questões de temperatura e de freqüência que acabam se tornando os grandes limitadores.

O ganho de tensão de modo comum, sigla CMRR -- *Commom-Mode Rejection Ratio,* em Inglês – representa um importante dado quanto à definição entre o AO real e o AO ideal, ver equação 2.182. Na realidade, esse é um fator que determina a qualidade de o AO real ser considerado como um AO ideal.
Logicamente, um AO ideal não existe, porém conseguem-se aproximações que permitem se trabalhar próximo de um caso ideal.
Considerando-se na figura 2.46, o ganho ideal $A_d$, as tensões de entrada $V_1(t)$ e $V_2(t)$, e a tensão de saída $V_S(t)$, será possível obter o seguinte desenvolvimento:

$$V_S(t) = A_d\left[V_1(t) - V_2(t)\right] \quad \text{com} \quad A_d \to \text{negativo} \qquad (2.181)$$

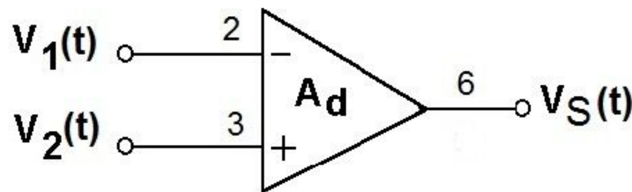



***Figura 2.46 – Amplificador Operacional Ideal***

Serão definidas mais duas variáveis, $V_c$ e $V_d$, com as seguintes expressões:

$$V_d(t) = \left[V_1(t) - V_2(t)\right] \quad \text{e} \quad V_c(t) = \left[\frac{V_1(t) + V_2(t)}{2}\right]$$

Calculando-se as expressões de $V_1$ e $V_2$, em função de $V_c$ e $V_d$, vem:

$$V_1(t) = \left[V_c(t) + \frac{1}{2}V_d(t)\right] \quad \text{e} \quad V_2(t) = \left[V_c(t) - \frac{1}{2}V_d(t)\right]$$

Considerando agora um valor de ganho para cada entrada, tem-se que:

$$V_S(t) = A_1V_1(t) + A_2V_2(t)$$

Colocando-se $V_S(t)$ em função de $V_c(t)$ e $V_d(t)$, vem que:

$$V_S(t) = A_cV_c(t) + A_dV_d(t) \quad \text{com} \quad A_c = A_1 + A_2 \quad \text{e} \quad A_d = \frac{A_1 - A_2}{2}$$

Como observação, vale a seguinte menção: no AO ideal tem-se que $A_1 = A_2 = A$, de modo que:

$$A_c = A - A = 0 \quad \text{e} \quad A_d = \frac{A - (-A)}{2} = A$$

No AO real, o valor CMRR é dado pela relação seguinte:

$$CMRR = \frac{A_d}{A_c} \qquad (2.182)$$

A partir da aplicação da equação 2.182, anterior, pode-se escrever que:

$$V_S(t) = A_d V_d(t) \left[ 1 + \frac{1}{CMRR} \frac{V_c(t)}{V_d(t)} \right]$$

Considerando-se então a dedução da equação anterior, os fabricantes acabaram tendo de construir AOs reais seguindo a orientação de apresentar elevados valores de CMRR, pois, assim sendo, a tensão de saída $V_S(t)$ ficaria aproximadamente igual a tensão de saída para o caso em que o AO fosse ideal.

Assim, para AO ideal, nessas condições, tem-se que:

$$CMRR \rightarrow \infty \quad \therefore \quad V_S(t) = A_d V_d(t) = A_d [V_1(t) - V_2(t)] \qquad (2.183)$$

Considerando a figura 2.46, anterior, as entradas numeradas com os algarismos 2, 3 e 6 representam os três principais pontos de contacto com um AO ideal, principalmente em termos matemáticos, quando se quer trabalhar apenas com a parte teórica das aplicações e não com o projeto físico em si.

A figura 2.47(b) mostra o esquema interno de um AO, porém com a entrada não inversora aterrada, um procedimento muito comum.

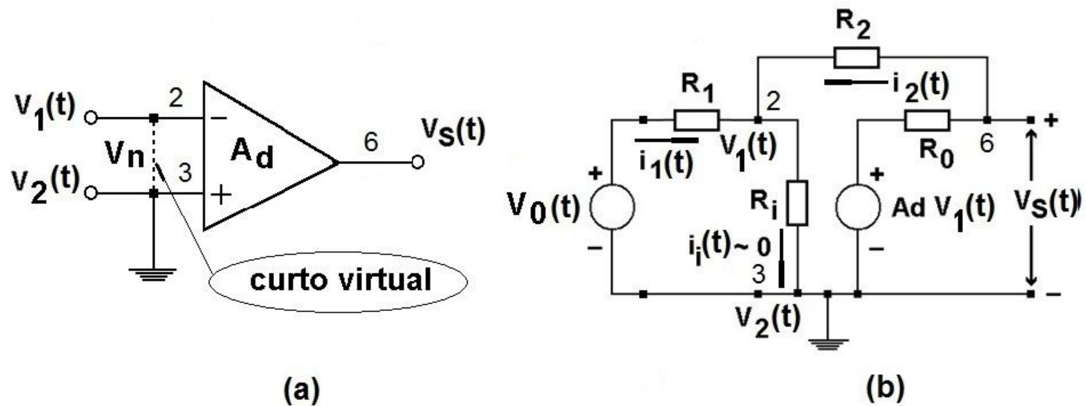



***Figura 2.47 – Partes Internas do Amplificador Operacional Ideal***
***(a) Representação Simplificada***

***(b) Representação Mais Detalhada***

Na figura 2.47 considerar a seguinte legenda:

$R_i$ : resistência interna de entrada
$R_0$ : resistência interna de saída
$R_1$ : resistência externa de entrada
$R_2$ : resistência externa de saída ou de realimentação
$V_0(t)$: tensão externa aplicada ao sistema
$V_S(t)$: tensão externa de saída
$V_1(t)$: tensão interna na resistência interna de entrada
$i_1(t)$: corrente na resistência externa $R_1$
$i_2(t)$: corrente na resistência externa $R_2$
$i_i(t)$: corrente na resistência interna de entrada
$A_d$ : ganho interno de amplificação do AO
$t$: variável independente tempo

Embora a figura 2.47 mostre um arranjo da parte interna do AO, o certo é que cada fabricante tem a sua própria topologia de projeto sendo que os arranjos internos variam até mesmo de versão para versão.

***Amplificador Operacional Implementado como Ganho Simples***

É importante observar na figura 2.47(b) que existem duas tensões internas, $V_1(t)$ e $A_dV_1(t)$, e duas tensões, $V_0(t)$ e $V_S(t)$, que devem ser utilizadas no equacionamento matemático do AO.

Pela própria concepção do AO, é como se existisse um curto virtual entre as entradas 2 e 3, entrada inversora e entrada não inversora, respectivamente. Considerando-se o curto virtual e aplicando a lei dos nós de Kirchhoff para o ponto 2 da entrada inversora do AO da figura 2.47(b), vem:

$$i_1(t)+i_2(t)=0 \quad \therefore \quad \frac{V_0(t)}{R_1}+\frac{V_S(t)}{R_2}=0 \quad \therefore \quad \frac{V_S(t)}{V_0(t)}=-\frac{R_2}{R_1}$$

Deste modo, fica estabelecida uma relação de ganho de tensão entre o módulo do sinal de entrada e o módulo do sinal de saída.

Portanto, a configuração montada e mostrada na figura 2.48 apresenta um arranjo para uma função do tipo ganho simples, invariante no tempo, cuja função de transferência no plano complexo é dada pela equação 2.184, seguinte:

$$\frac{V_S(S)}{V_0(S)}=-\frac{R_2}{R_1} \tag{2.184}$$

O que se pode observar é que o ganho de tensão entre o módulo do sinal de entrada e o módulo do sinal de saída dependerá unicamente dos valores dos resistores que formam o arranjo externo, independente de outros parâmetros internos relativos ao próprio AO. Essa é a concepção básica dos AOs e de suas aplicações na Engenharia. Percebe-se, também nesse arranjo particular, que ambos os sinais se encontram em fase.

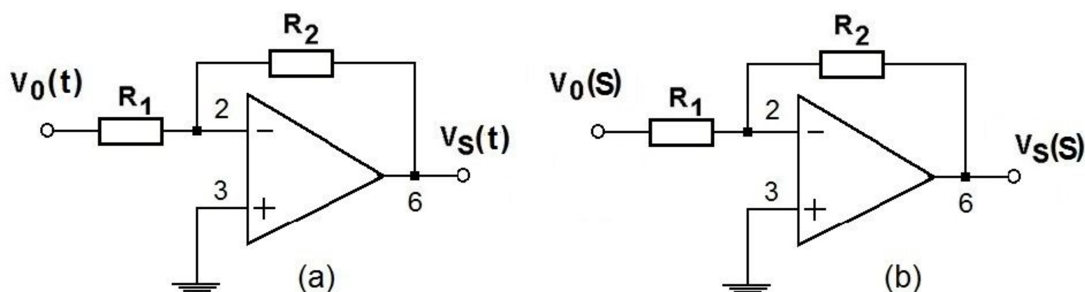



***Figura 2.48 – Amplificador Operacional em Arranjo de Ganho Simples***
***(a) Representação no Plano Temporal***

***(b) Representação no Plano Complexo***

Notar que, se os resistores $R_1$ e $R_2$ forem de igual valor, o dispositivo da figura 2.48 torna-se um inversor simples.

***Amplificador Operacional Implementado como Dispositivo Somador***

O arranjo a ser adotado para a configuração de um dispositivo somador, considerando-se *n* entradas, pode ser visto na figura 2.49.

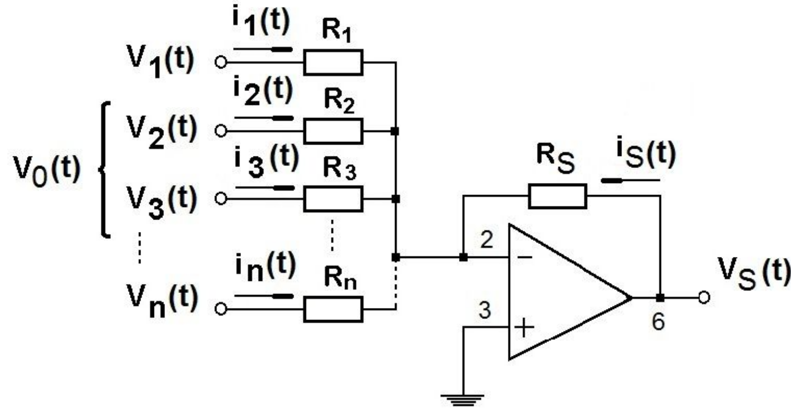



***Figura 2.49 – Amplificador Operacional em Arranjo de Somador***

Na figura 2.49 considerar a seguinte legenda:

$R_i$ : resistências externas de entrada com $i = 1,2,3,...,n$
$R_S$ : resistência externa de saída ou de realimentação
$V_i(t)$: tensões externas de entrada com $i = 1,2,3,...,n$
$V_S(t)$: tensão externa de saída
$i_i(t)$: correntes externas de entrada com $i = 1,2,3,...,n$
$i_S(t)$: corrente externa de saída
$t$: variável independente tempo

O equacionamento básico será o mesmo que foi adotado no caso do arranjo de ganho simples. Assim, considerando-se o curto virtual entre as entradas 2 e 3 e aplicando a lei dos nós de Kirchhoff para o ponto 2 da entrada inversora do AO da figura 2.49, vem que:

$$i_S(t) + \sum_{j=1}^{n} i_j(t) = 0 \qquad \therefore \qquad i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots + i_n(t) + i_S(t) = 0$$

O que equivale ao seguinte raciocínio:

$$\frac{V_1(t)}{R_1} + \frac{V_2(t)}{R_2} + \frac{V_3(t)}{R_3} + \cdots + \frac{V_n(t)}{R_n} + \frac{V_S(t)}{R_S} = 0$$

Deste modo tem-se:

$$V_S(t) = -\frac{R_S}{R_1}V_1(t) - \frac{R_S}{R_2}V_2(t) - \frac{R_S}{R_3}V_3(t) \cdots - \frac{R_S}{R_n}V_n(t)$$

Finalmente, tem-se a equação do somador na forma do arranjo específico visto na figura 2.49:

$$V_S(t) = A_{d1}V_1(t) + A_{d2}V_2(t) + A_{d2}V_3(t) + \cdots + A_{dn}V_n(t)$$

Onde se tem que:

$$A_{di} = -\frac{R_S}{R_i} \quad \text{com} \quad i = 1,2,3,...n$$

Esse tipo de arranjo na forma de somador tem múltiplas aplicações, mas, para a presente obra, a principal é aquela vista nos sistemas de regulação e controle automático de velocidade e de tensão de geradores de energia elétrica quando tanto o sinal de erro quanto o sinal de realimentação negativa dão entrada juntos num somador cujos canais têm diferentes ganhos. Por vezes, também são adicionados aos sinais já mencionados sinais de controle suplementar e de estabilizadores especiais.

***Amplificador Operacional Implementado como Dispositivo Integrador Puro***

O arranjo a ser adotado para a configuração de um dispositivo integrador puro, utilizando-se do AO, pode ser visto na figura 2.50. O dispositivo integrador é conhecido como puro por apresentar em sua saída a função integral do sinal aplicado a sua entrada no domínio do tempo.

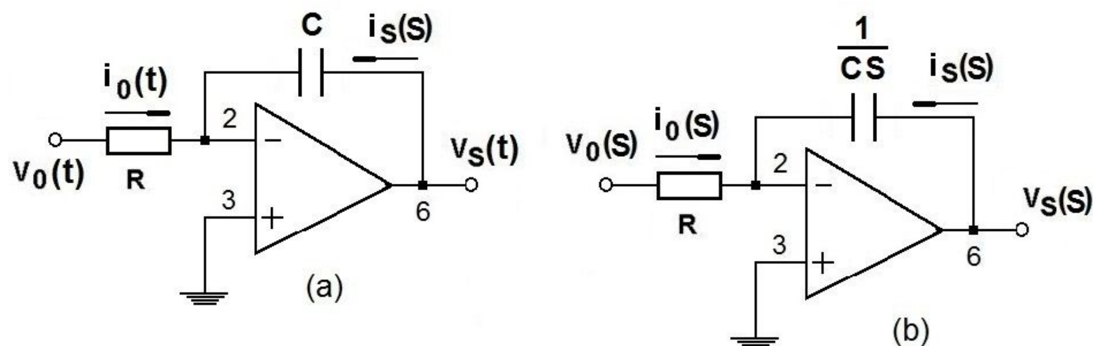



***Figura 2.50 – Amplificador Operacional em Arranjo de Integrador Puro***
***(a) Representação no Plano Temporal***

***(b) Representação no Plano Complexo***

Na figura 2.50 considerar a seguinte legenda:

$R$: resistência externa de entrada

$C$: capacitância externa de realimentação

$V_0(t)$: tensão externa aplicada ao sistema

$V_S(t)$: tensão externa de saída

$i_0(t)$: corrente na resistência externa $R$

$i_S(t)$: corrente na malha de realimentação

$t$: variável independente tempo

O equacionamento básico será o mesmo que foi adotado até aqui. Assim, considerando-se o curto virtual entre as entradas 2 e 3 e aplicando a lei dos nós de Kirchhoff para o ponto 2 da entrada inversora do AO da figura 2.50(b), no plano complexo, vem que:

$$i_0(S) + i_S(S) = 0$$

O que equivale ao seguinte raciocínio:

$$\frac{V_0(S)}{R} + \frac{V_S(S)}{1/CS} = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{R} V_0(S) + CS\, V_S(S) = 0$$

Deste modo tem-se:

$$V_S(S) = -\frac{1}{\tau S} V_0(S) \quad \therefore \quad \frac{V_S(S)}{V_0(S)} = -\frac{1}{\tau S} \qquad (2.185)$$

Onde $\tau = RC$ é a constante de tempo de integração do circuito

A equação 2.185, no domínio do tempo, seria dada por:

$$V_S(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^t V_0(t)\, dt \qquad (2.186)$$

Logo, o arranjo da figura 2.50(a) garante a obtenção de um circuito cuja equação matemática é análoga a uma função integral pura do sinal de entrada aplicado no domínio do tempo.

Uma observação importante, embora simples, deve ser feita. A expressão função de transferência somente se aplica a relações dadas no plano complexo. Assim, pode-se dizer que na equação 2.185 tem-se uma função de transferência, porém na equação 2.186 isso seria, no mínimo, uma imprecisão.

Outra observação tem a ver com o sinal negativo das equações 2.185 e 2.186 que na realidade existe em função da disposição física e do arranjo do circuito aplicado ao AO, neste caso particular.

***Amplificador Operacional Implementado como Dispositivo Derivador Puro***

O arranjo a ser adotado para a configuração de um dispositivo derivador puro, utilizando-se do AO, pode ser visto na figura 2.51. O dispositivo derivador é conhecido como puro por apresentar em sua saída a função derivada do sinal aplicado a sua entrada no domínio do tempo.

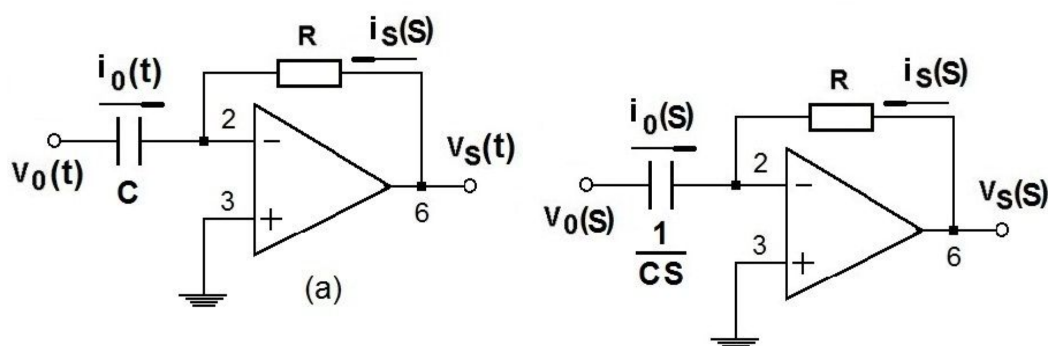



***Figura 2.51 – Amplificador Operacional em Arranjo de Derivador Puro***
***(a) Representação no Plano Temporal***

***(b) Representação no Plano Complexo***

Na figura 2.51 considerar a seguinte legenda:

$C$: capacitância externa de entrada
$R$: resistência externa de realimentação
$V_0(t)$: tensão externa aplicada ao sistema
$V_S(t)$: tensão externa de saída
$i_0(t)$: corrente na capacitância externa de entrada
$i_S(t)$: corrente na malha de realimentação
$t$: variável independente tempo

O equacionamento básico será o mesmo que foi adotado até aqui. Assim, considerando-se o curto virtual entre as entradas 2 e 3 e aplicando a lei dos

nós de Kirchhoff para o ponto 2 da entrada inversora do AO da figura 2.51(b), no plano complexo, vem que:

$$i_0(S) + i_S(S) = 0$$

O que equivale ao seguinte raciocínio:

$$\frac{V_0(S)}{1/CS} + \frac{V_S(S)}{R} = 0 \quad \therefore \quad CS V_0(S) + \frac{1}{R} V_S(S) = 0$$

Deste modo tem-se:

$$V_S(S) = -\tau S V_0(S) \quad \therefore \quad \frac{V_S(S)}{V_0(S)} = -\tau S$$

Onde $\tau = RC$ é a constante de tempo de derivação do circuito

A equação anterior, no domínio do tempo, seria dada por:

$$V_S(t) = -\tau \frac{d}{dt} V_0(t) \qquad (2.187)$$

Logo, o arranjo da figura 2.51(a) garante a obtenção de um circuito cuja equação matemática é análoga a uma função derivada pura do sinal de entrada aplicado no domínio do tempo.

---

**EXEMPLO 2.27**

Encontrar a função de transferência entre os sinais de entrada e de saída do dispositivo conhecido como filtro passa baixa mostrado na figura 2.52, seguinte.

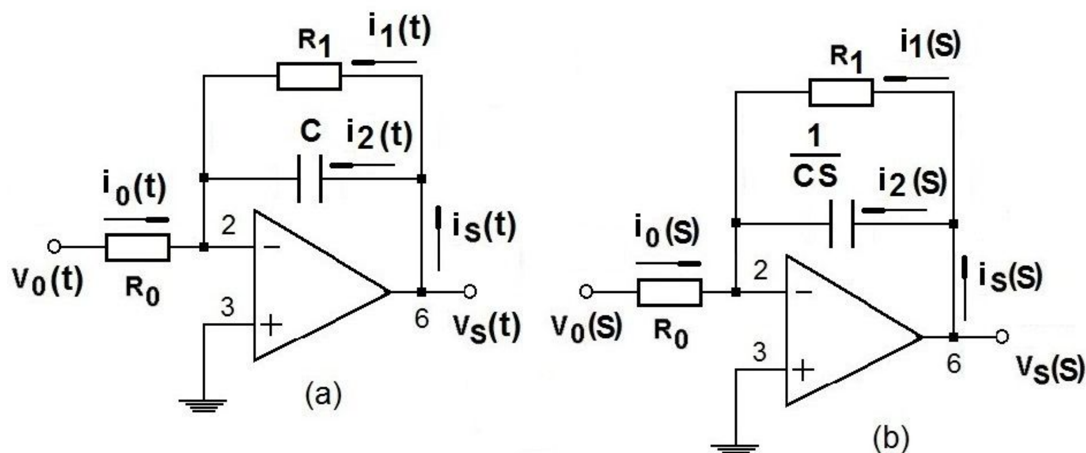



***Figura 2.52 – Amplificador Operacional em Arranjo de Filtro Passa Baixa***
***(a) Representação no Plano Temporal***

***(b) Representação no Plano Complexo***

Na figura 2.52 considerar a seguinte legenda:

$R_0$ : resistência externa de entrada
$R_1$ : resistência externa de realimentação
$C$: capacitância externa de realimentação
$V_0(t)$: tensão externa aplicada ao sistema
$V_S(t)$: tensão externa de saída
$i_0(t)$: corrente na resistência externa $R_0$
$i_S(t)$: corrente na malha de realimentação
$i_1(t)$: corrente na resistência externa $R_1$
$i_2(t)$: corrente na capacitância externa $C$
$t$: variável independente tempo

**Solução:**

O sentido da expressão passa baixa ou passa-baixa ou ainda filtro passa baixas tem a ver com a primeira idéia de projeto daquilo que foi chamado pelos Engenheiros de filtro ativo de freqüências baixas.
Convém lembrar que todo dispositivo de filtragem eletrônica que se utiliza de AOs em sua constituição são chamados de filtros ativos, para contrapor àqueles outros denominados de filtros passivos que não se utilizam de AOs.
No item 2.2.8.2 anterior foi analisado um circuito do tipo filtro passivo passa baixa cuja resposta em freqüência pode ser vista na figura 2.21 onde se nota claramente a razão do nome passa baixa em se considerando a chamada freqüência de corte que naquele exemplo é mostrada.

Os filtros tipo passa baixa podem ser analisados à luz da transformada de Laplace do seguinte modo.

O equacionamento básico será o mesmo que foi adotado até aqui. Assim, considerando-se o curto virtual entre as entradas 2 e 3 do arranjo e aplicando a lei dos nós de Kirchhoff para o ponto 2 da entrada inversora do AO da figura 2.52(b), no plano complexo, vem que:

$$i_0(S) + i_S(S) = 0 \quad \therefore \quad i_0(S) + i_1(S) + i_2(S) = 0$$

O que equivale ao seguinte raciocínio:

$$\frac{V_0(S)}{R_0} + \frac{V_S(S)}{R_1} + \frac{V_S(S)}{1/CS} = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{R_0}V_0(S) + \frac{1}{R_1}V_S(S) + CS\,V_S(S) = 0$$

Deste modo, tem-se a função de transferência pedida:

$$V_S(S) = -\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{1}{1+\tau S}\right)V_0(S) \quad \therefore \quad \frac{V_S(S)}{V_0(S)} = -\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{1}{1+\tau S}\right) \qquad (2.188)$$

Onde $\tau = R_1 C$ é a constante de tempo de integração do circuito.

Comparar a equação 2.188, aqui obtida a partir do arranjo mostrado na figura 2.52(a), com a equação 2.125, anterior, observando a semelhança existente entre as funções de transferência dos circuitos elétricos que elas representam. As respostas, tanto no domínio do tempo quanto no domínio complexo, entre esses circuitos, são também semelhantes. Para o circuito da figura 2.52(a), registros semelhantes aos das figuras 2.20, 2.21 e 2.22 são válidos, bastando para tal considerar a relação $R_1 = R_2$, na equação 2.188, lembrando que o ganho aqui é negativo por questões da técnica aplicada aos AOs.

---

**EXEMPLO 2.28**

Encontrar a função de transferência entre os sinais de entrada e de saída do dispositivo conhecido como filtro passa alta mostrado na figura 2.53, seguinte.

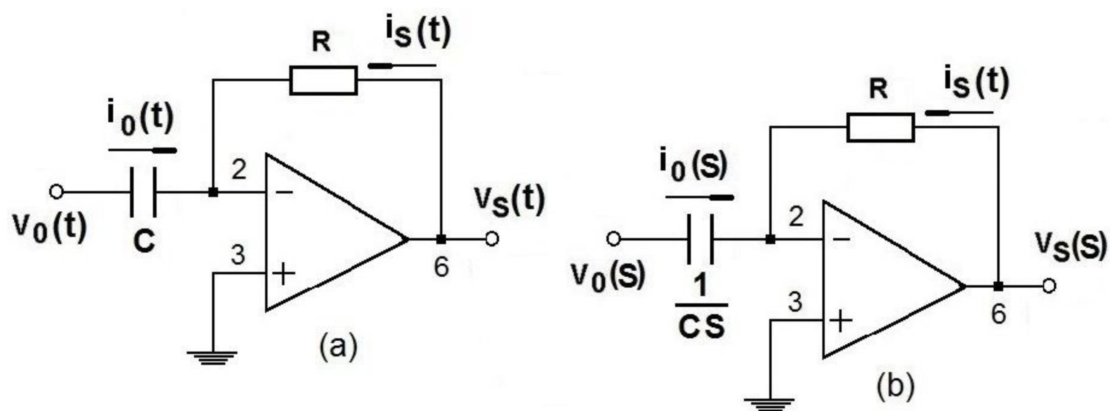



***Figura 2.53 – Amplificador Operacional em Arranjo de Filtro Passa Alta (a) Representação no Plano Temporal***

***(b) Representação no Plano Complexo***

Na figura 2.53 considerar a seguinte legenda:

$R$: resistência externa de realimentação
$C$: capacitância externa de entrada
$V_0(t)$: tensão externa aplicada ao sistema
$V_S(t)$: tensão externa de saída
$i_0(t)$: corrente na capacitância externa $C$
$i_S(t)$: corrente na malha de realimentação
$t$: variável independente tempo

**Solução:**

O sentido da expressão passa alta ou passa-alta ou ainda filtro passa alta tem a ver com a primeira idéia de projeto daquilo que foi chamado pelos Engenheiros de filtro ativo de freqüências altas.

Os filtros tipo passa alta podem ser analisados à luz da transformada de Laplace do seguinte modo.

O equacionamento básico será o mesmo que foi adotado até aqui. Assim, considerando-se o curto virtual entre as entradas 2 e 3 do arranjo e aplicando a lei dos nós de Kirchhoff para o ponto 2 da entrada inversora do AO da figura 2.53(b), no plano complexo, vem que:

$$i_0(S) + i_S(S) = 0$$

O que equivale ao seguinte raciocínio:

$$\frac{V_0(S)}{1/CS}+\frac{V_S(S)}{R}=0 \quad \therefore \quad CSV_0(S)+\frac{1}{R}V_S(S)=0$$

Deste modo, tem-se a função de transferência pedida:

$$V_S(S)=-\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{1}{1+\tau S}\right)V_0(S) \quad \therefore \quad \frac{V_S(S)}{V_0(S)}=-\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{1}{1+\tau S}\right)$$

Onde $\tau = R_1C$ é a constante de tempo de integração do circuito.

---

**EXEMPLO 2.29**

Encontrar a função matemática no domínio do tempo entre os sinais de entrada e de saída do dispositivo mostrado na figura 2.54, seguinte.

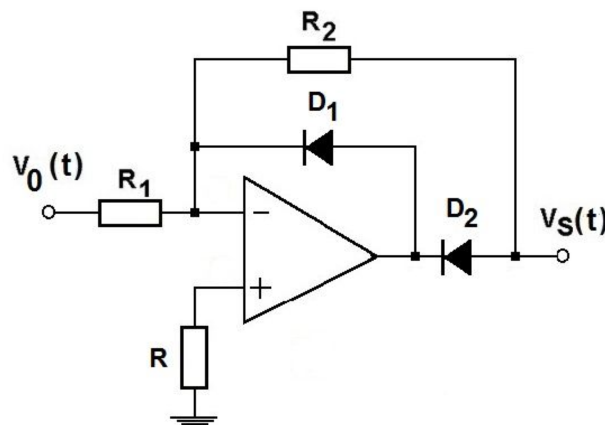



***Figura 2.54 – Amplificador Operacional em Arranjo de Diodos***

Na figura 2.54 considerar a seguinte legenda:

$R_1$: resistência externa de entrada

$R_2$: resistência externa de realimentação

$R$: resistência de aterramento da entrada não inversora

$D_1$ e $D_2$: diodos

$V_0(t)$: tensão externa aplicada ao sistema

$V_S(t)$: tensão externa de saída

$t$: variável independente tempo

**Solução:**

Para analisar a resposta de um sistema cujo arranjo tem a forma mostrada na figura 2.54, devem-se considerar duas situações, a primeira para $V_0 \leq 0$ e depois para $V_0 > 0$.

Outra observação importante a ser feita é que, tomando-se como base o arranjo mostrado na figura 2.48 anterior, a inserção da resistência $R$ de aterramento da entrada não inversora em nada modificará o resultado do arranjo da figura 2.54 caso os diodos sejam eliminados, ou seja, ambos os arranjos darão o mesmo resultado em termos de função de transferência, pois a tensão na entrada não inversora é nula.

Quando a tensão de entrada for identificada como sendo $V_0 > 0$, a tensão na entrada inversora do AO também será positiva enquanto que a tensão na saída do AO será negativa já que a tensão na entrada não inversora é nula devido ao aterramento desta. Nesta condição, o diodo $D_1$ estará em corte enquanto que o diodo $D_2$ estará em condução, fato que garante uma perfeita semelhança entre os arranjos das figuras 2.48 e 2.54.

Assim, para esta condição, valerá a equação 2.184 de transferência, anterior:

$$\frac{V_S(S)}{V_0(S)} = -\frac{R_2}{R_1} \quad \therefore \quad \frac{V_S(t)}{V_0(t)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Quando a tensão de entrada for identificada como sendo $V_0 \leq 0$, a tensão na entrada inversora do AO será negativa ou nula enquanto que a tensão na saída do AO será positiva ou nula, seguindo a mesma análise da situação anterior. Nesta condição, o diodo $D_1$ estará em condução enquanto que o diodo $D_2$ estará em corte, fato que fará com que a tensão na saída do AO seja sempre nula.

Assim:

$$\frac{V_S(S)}{V_0(S)} = 0 \quad \therefore \quad \frac{V_S(t)}{V_0(t)} = 0$$

A figura 2.55 mostra como será a tensão de saída $V_S$ do sistema mostrado na figura 2.54 em função da tensão de entrada $V_E$ aplicada.

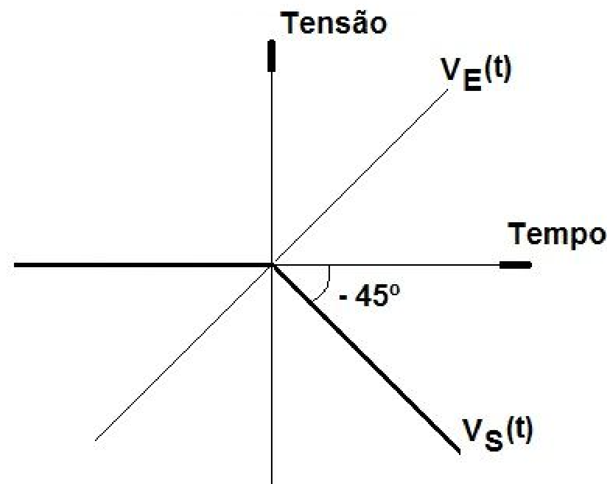



***Figura 2.55 – Resposta no Tempo do Sistema da Figura 2.54 para*** $=$

**Nota a respeito do exemplo 2.29:**

A solução desse exemplo mostrou que esse arranjo de diodos pode ser interpretado como sendo uma função diodo negativo. Embora seja um sistema analógico é importante ressaltar a criatividade do arranjo proposto. Tal arranjo é muito utilizado na indústria atual [2016] mesmo sendo de tecnologia analógica.

## 2.2.10.2. Sistemas Fluídicos

A turbina térmica é um dispositivo específico pertencente aos sistemas de ciclos fluídicos e térmicos que gera energia mecânica primária sempre a partir da energia térmica com a posterior conversão desta em energia elétrica, sempre obedecendo a princípios embasados nas leis da Termodinâmica.
A conversão da energia térmica em energia mecânica se dá através da utilização de determinado fluido que produzirá, em seu processo de expansão, trabalho em máquinas térmicas.

Existem três tipos principais de turbinas térmicas, a saber:

a) turbinas a pistão usadas em sistemas de ciclo Diesel

b) turbinas a vapor ou turbogeradores usadas em sistemas de caldeiras

c) turbinas a gás.

A técnica principal de funcionamento das turbinas térmicas consiste na utilização da energia química originária da queima de produtos combustíveis e o processo pode ser classificado em dois tipos, a combustão externa e a combustão interna. A figura 2.56 mostra o exemplo de um ciclo térmico de uma turbina a vapor que move um gerador de energia elétrica sem reaquecimento do fluido motriz principal.

Na combustão externa não existe o contato direto do combustível utilizado com o fluído principal de trabalho acionador da turbina. Esse é um arranjo usado nas centrais que funcionam a vapor de modo que o combustível eleva a temperatura do fluido de trabalho, em uma caldeira, até que o vapor gerado se expanda sobre a turbina produzindo o trabalho mecânico desejado.

Na combustão interna a queima se dá sobre uma mistura de ar e combustível. Assim, o fluido de trabalho acionador da turbina será o conjunto de produtos dessa combustão. A combustão interna é o processo térmico verificado nas turbinas a gás e nas máquinas térmicas a pistão do tipo Diesel.

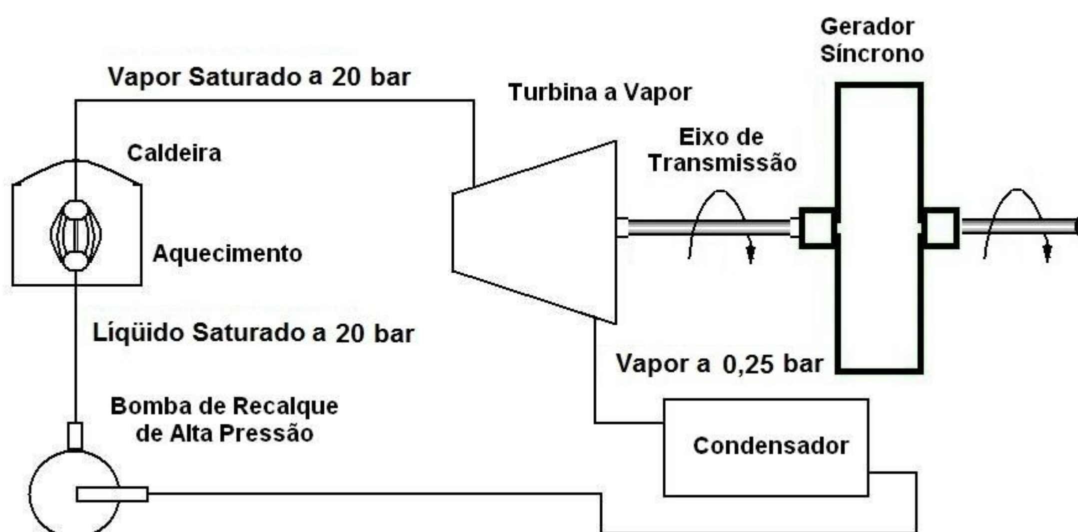



***Figura 2.56 – Exemplo de Ciclo Térmico Sem Reaquecimento do Fluido Principal***

A turbina térmica gera energia mecânica primária sempre a partir do calor. Tomando-se como base a figura 2.57, a potência, no domínio do tempo, desenvolvida no eixo de uma turbina a vapor, por exemplo, obedece a seguinte equação:

$$p(t) = \frac{m(t)}{t}\Delta h = \frac{m(t)}{t}(h_1 - h_2) = \dot{m}(t)(h_1 - h_2) \qquad (2.189)$$

onde

$p(t)$: potência desenvolvida pela turbina a vapor
$m(t)$: massa de vapor
$\dot{m}(t)$: fluxo de vapor ou variação da massa de vapor no tempo
$h_1, h_2$: entalpias relativas à entrada e à saída do fluido do vapor
$t$: variável independente tempo

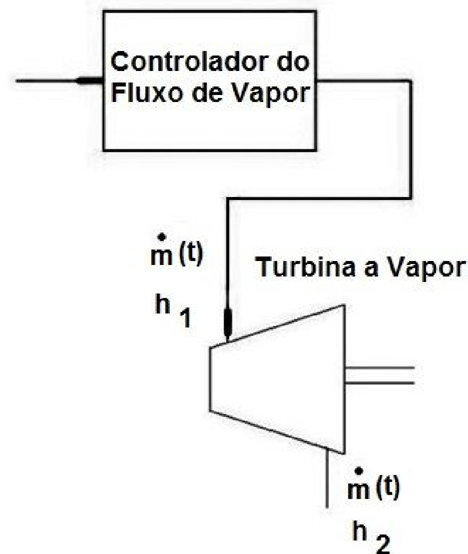



***Figura 2.57 – Turbina Térmica a Vapor Sem Reaquecimento do Fluido Principal***

Tomando-se agora como base o sistema dotado de um dispositivo reaquecedor conforme é mostrado nas figuras 2.58 e 2.59, a potência desenvolvida no eixo da turbina térmica obedece a seguinte equação:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

$$p(t) = \dot{m}_1(t)(h_1 - h_2) + \dot{m}_2(t)(h_2 - h_3) \qquad (2.190)$$

onde

$p_1(t), p_2(t)$ : potências desenvolvidas pelas turbinas de alta e baixa pressão
$\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t)$: fluxos de vapor nas turbinas de alta e baixa pressão
$h_1, h_2, h_2, h_3$ : entalpias relativas à entrada e à saída do fluido do vapor nas turbinas, em unidades de calor por unidades de massa
$t$ : variável independente tempo

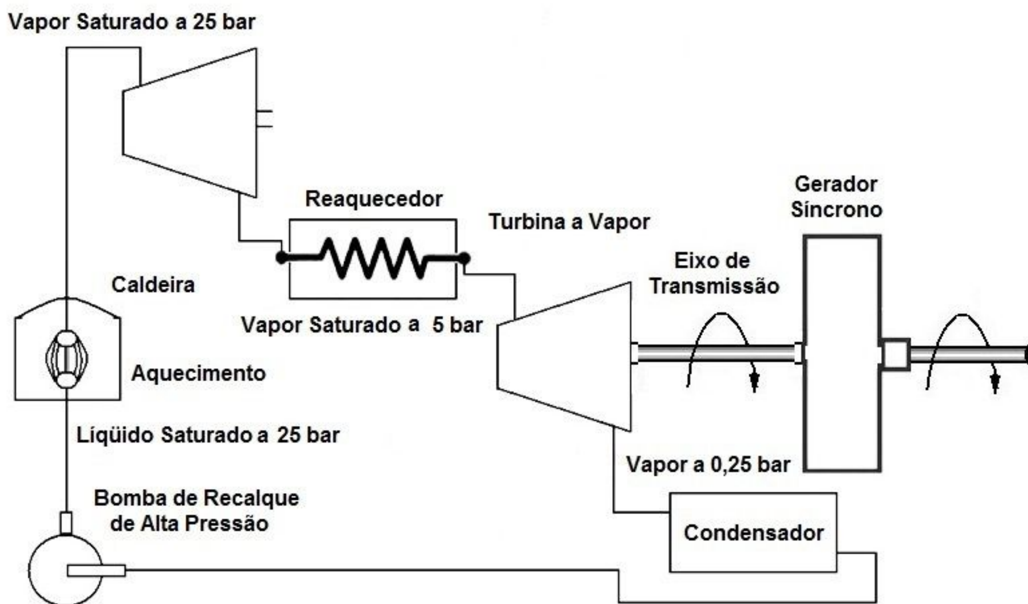



***Figura 2.58 – Exemplo de Ciclo Térmico Com Reaquecimento do Fluido Principal***

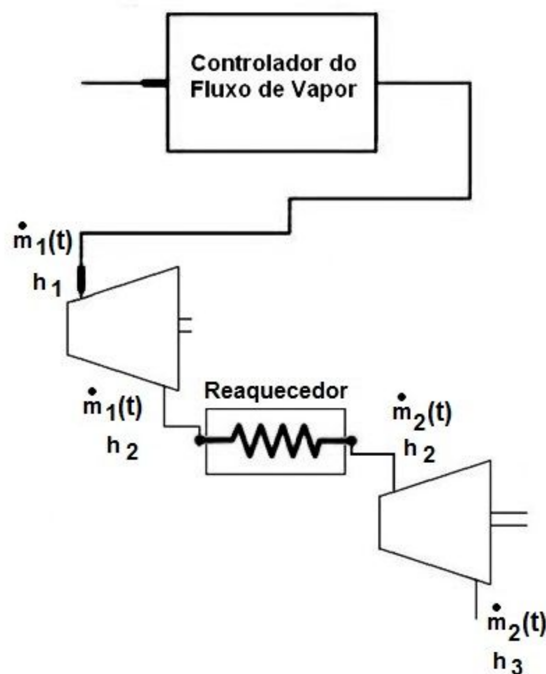



***Figura 2.59 – Turbina Térmica a Vapor Sem Reaquecimento do Fluido Principal***

Nos projetos das plantas industriais é interessante notar que a preferência recai sobre a utilização do ciclo duplo com reaquecimento quando se trabalha com turbinas térmicas a vapor. A questão é que, embora o ciclo de reaquecimento venha a introduzir algum tipo de retardamento na resposta final do conjunto, isso não é problema para o controle automático em função do ganho obtido em termos de eficiência energética.

Em termos de servomecanismo e controle, é importante saber como se dá a analogia física entre sistemas, considerando-se agora os sistemas fluídicos.
Basicamente, o que se percebe dos sistemas fluídicos é que as leis físicas são semelhantes e análogas aos casos já estudados até aqui, desde que as equações diferenciais envolvidas sejam lineares. Valem aqui as analogias feitas com as leis de Kirchhoff da eletricidade.
Nas figuras 2.56 e 2.58 é notada a presença de caldeiras, dispositivos fundamentais em tais sistemas cuja função é de armazenamento, assumindo um papel semelhante àquele adquirido pelos capacitores nos circuitos elétricos e pelas molas nos sistemas mecânicos de translação.
Em termos práticos, a preocupação maior em sistemas fluídicos é que a pressão, nas diferentes partes do circuito, seja mantida e que as perdas sejam minimizadas ao máximo. Evidentemente que esse é um aspecto teórico da abordagem assim como fica claro nos demais sistemas até aqui estudados.

Para iniciar a apresentação das leis e, por conseguinte, as equações básicas no plano complexo, algumas considerações físicas deverão ser feitas.
Tomando-se como base o esquema mostrado na figura 2.56, onde é apresentado o circuito fechado de uma turbina a vapor sem reaquecimento do fluido principal, nota-se a presença da bomba de recalque do vapor

condensado e da caldeira. A função da caldeira é receber o vapor condensado e tentar manter a pressão do fluido de alimentação que, através da tubulação, chegará até a turbina.

O que acontece na realidade é que os queimadores da caldeira introduzirão uma espécie de resistência ao fluido caracterizando uma queda de pressão. Em termos de pequenas variações, se assim for bem entendido, pode-se dizer que essa queda de pressão é diretamente proporcional à vazão do fluido no sentido caldeira turbina. A razão desta proporcionalidade, seguindo-se a mesma idéia da lei de Ohm na eletricidade, será a definição do parâmetro resistência fluídica.

Outro elemento do esquema da figura 2.56 é a caldeira cuja função principal é a manutenção da pressão no circuito assumindo a característica de uma capacitância fluídica definida como sendo um parâmetro que representa a variação do volume do fluido pela variação de pressão na linha considerada.

Por fim, tem-se a inertância fluídica cuja característica assemelha-se a própria inércia elétrica representada pela indutância em sistemas elétricos. Trata-se da queda de pressão ocorrida num trecho da linha em função da própria inércia relativa ao fluido em questão que se encontra contido nesse trecho.

Com relação às variáveis, pode-se dizer que o elemento ativo do sistema fluídico é a bomba de recalque que sustenta a variável pressão na linha e a vazão do fluido que promove a ação sobre a turbina, no caso, uma turbina a vapor. Existirá uma analogia entre todos esses elementos e a tabela 2.10, seguinte, mostra essa analogia que reúne as relações considerando-se as leis físicas pertinentes.

***Tabela 2.10 – Analogia entre Sistemas: Elétrico e Fluídico***

| Sistema Elétrico | Símbolo Usual | Unidade MKS | Sistema Fluídico | Símbolo Usual | Unidade MKS |
|---|---|---|---|---|---|
| Tensão | $v$ | $V$ | Pressão | $P$ | $Pa$ |
| Corrente | $i$ | $A$ | Vazão de Fluido | $Q$ | $\frac{m^3}{s}$ |
| Resistência | $R$ | $ohm$ | Resistencia Fluídica | $R_f$ | $\frac{Pa\ s}{m^3}$ |
| Capacitância | $C$ | $F$ | Capacitância Fluídica | $C_f$ | $\frac{m^3}{Pa}$ |
| Indutância | $L$ | $H$ | Inertância Fluídica | $M_f$ | $\frac{Pa\ s^2}{m^3}$ |

Ainda considerando a figura 2.56, pode-se examinar apenas o trecho em que se destacam a bomba de recalque, a caldeira, a linha de tubulação até a entrada da turbina a vapor.

Esse trecho de circuito fluídico pode ser analisado em termos de analogia com o circuito elétrico em que os parâmetros e as variáveis são análogas.

A figura 2.60 traz essa analogia para melhor esclarecimento.

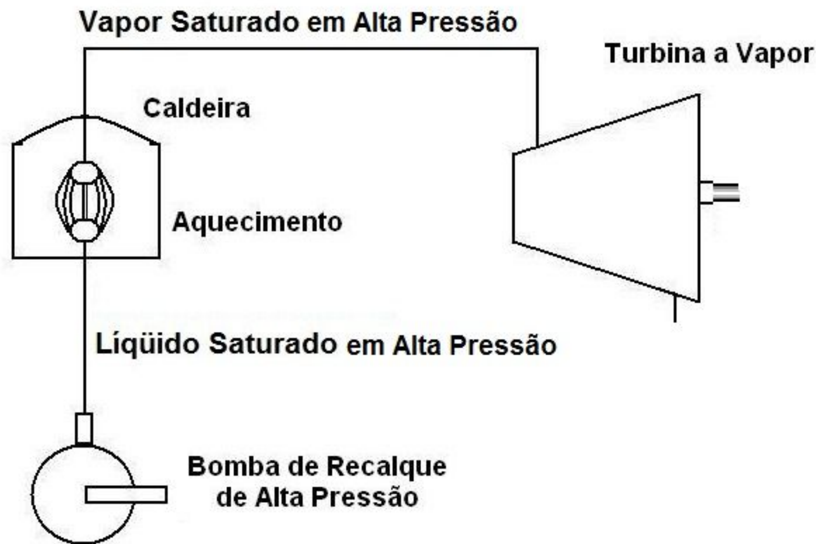



***Figura 2.60 – Trecho da Linha de Pressão de uma Turbina Térmica a Vapor***

O equacionamento básico nos planos temporal e complexo, considerando-se a linha separada para o estudo e análise da turbina a vapor da figura 2.60, permite que se monte o circuito elétrico equivalente mostrado na figura 2.61.

Levando em conta o esquema representativo da ação de uma turbina a vapor sem reaquecimento mostrado na figura 2.61, pode-se idealizar o equacionamento no plano complexo de Laplace.

Para o caso em questão, foram consideradas certas condições específicas tais como:

a) perdas na interconexão entre bomba e caldeira como desprezíveis;

b) representação das características do sistema na forma de parâmetros concentrados;

c) pressão constante de vapor fornecida pela bomba;

d) desprezadas as variações de pressão dentro da caldeira;

e) inclusão das perdas internas dos queimadores da caldeira junto com as perdas na tubulação;

f) as variações de cargas são consideradas pequenas;

g) não há variação considerável da pressão na entrada da turbina.

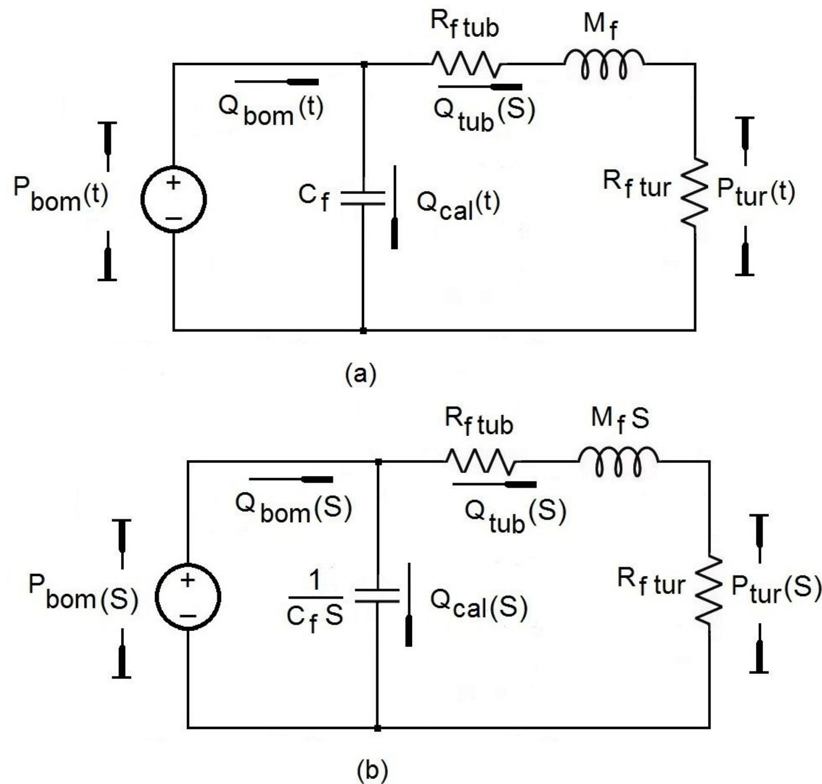



***Figura 2.61 – Equacionamento do Trecho da Linha de Pressão de uma Turbina Térmica a Vapor***
***(a) Domínio do Tempo***
***(b) Domínio Complexo***

Na figura 2.61 considerar a seguinte legenda:

$R_{f\ tub}$: resistência fluídica no trecho de tubulação considerado

$R_{f\ tur}$: resistência fluídica da turbina a vapor

$C_f$: capacitância fluídica da caldeira

$M_f$: inertância fluídica do vapor no trecho da tubulação considerado

$P_{bom}(t)$: pressão aplicada ao sistema pela bomba

$P_{tur}(t)$: pressão na entrada da turbina

$Q_{bom}(t)$: v*azão* na saída da bomba

$Q_{cal}(t)$: vazão na saída da caldeira

$Q_{tub}(t)$: vazão na entrada da turbina

$t$: variável independente tempo

Assim, para uma mesma vazão desde a saída da caldeira até a entrada da turbina, no pano complexo, tem-se que:

$$Q_{tub}(S) = \frac{P_{tur}(S)}{R_{f\,tur}} = \frac{P_{bom}(S)}{R_{f\,tub} + R_{f\,tur} + M_f\,S}$$

Deste modo, simplificadamente, vem que:

$$\frac{P_{tur}(S)}{P_{bom}(S)} = \frac{R_{f\,tur}}{R_{f\,tub} + R_{f\,tur} + M_f\,S}$$

onde

$$\frac{P_{tur}(S)}{P_{bom}(S)} = K\frac{1}{1+TS} \quad \text{com} \quad K = \frac{R_{f\,tur}}{R_{f\,tub} + R_{f\,tur}} \quad \text{e} \quad T = \frac{M_f}{R_{f\,tub} + R_{f\,tur}} \qquad (2.191)$$

Como observação, é evidente que no caso de o comando ser aquele relativo ao processo de controle da potência de saída da turbina a vapor, por exemplo, haverá necessidade de se controlar o fluxo de fluido, no caso o vapor d'água. Neste particular, haverá modificação da dinâmica operativa do ciclo e um novo diagrama de blocos deverá ser então obtido.

## 2.2.10.3. Tratamento de Não-linearidades

As não linearidades são bastante comuns dentro do campo da Engenharia sendo que não existe um método geral para resolução do problema. Quando se trabalha com uma determinada modelagem, dentro da área de controle e servomecanismo, não raro se defronta com algum tipo de não-linearidade.
A questão principal é estabelecer limites que possam garantir certa margem de confiabilidade operativa ao modelo em questão.
Existem dois tipos de não-linearidades, uma chamada *soft* e outra chamada *hard*.

**Não-linearidades *soft***

São originadas de equações diferenciais não-lineares e alguns exemplos desse tipo de não-linearidade podem ser vistos na figura 2.62.

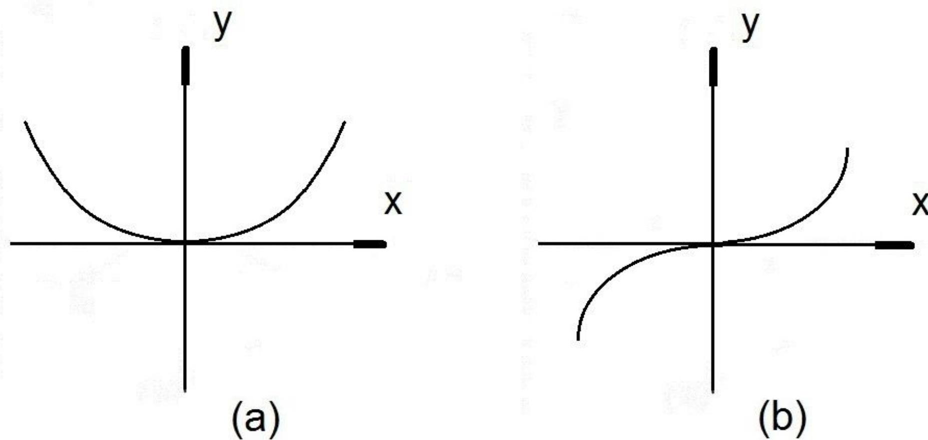



***Figura 2.62 – Não-linearidades Tipo Soft***

Na figura 2.62(a) a função é $y = kx^2$, enquanto que na figura 2.62(b) a função é $y = kx^3$, em outras palavras, duas funções do tipo não-linear, onde *k* é uma constante.

Observar que nas duas representações anteriores existe continuidade nas funções em intervalos finitos.

**Não-linearidades *hard***

Os sistemas não-lineares do tipo *hard* dão origem a não-linearidades do tipo *hard* devido ao fato de utilizarem mais de uma equação no processo de representação matemática, dependendo das circunstâncias operativas.

A figura 2.63 mostra alguns tipos de linearidades do tipo *hard*.

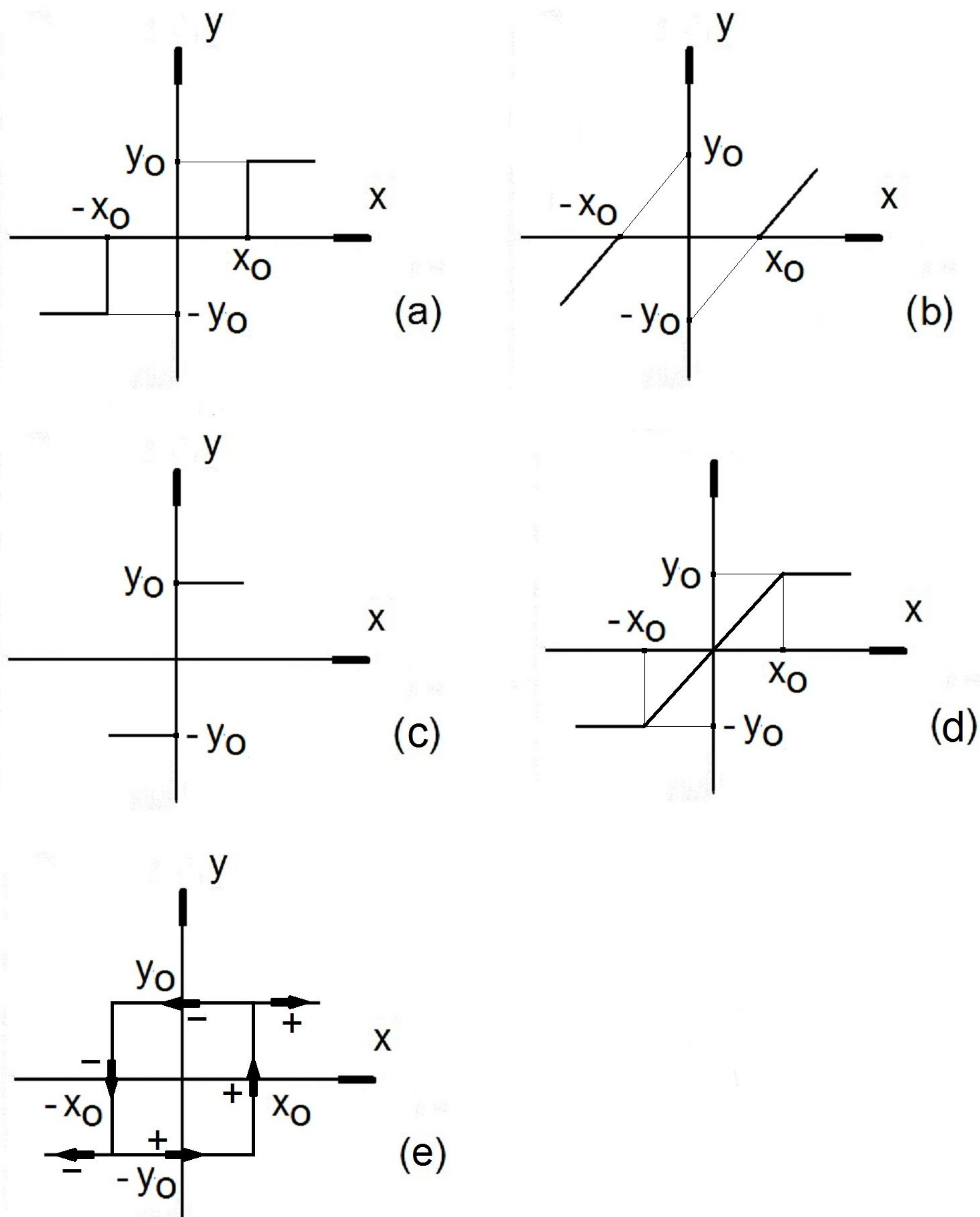



***Figura 2.63 – Não-linearidades Tipo Hard***

A figura 2.63(a) é referente ao efeito de relé com zona morta onde:

$$y = \begin{cases} y_0 & \text{para} \quad x \geq x_0 \\ 0 & \text{para} \quad -x_0 < x < x_0 \\ -y_0 & \text{para} \quad x \leq x_0 \end{cases}$$

A figura 2.63(b) é referente ao efeito de banda morta onde:

$$y = \begin{cases} kx - y_0 & \text{para} \quad x \geq x_0 \text{ onde } k = y_0 / x_0 \\ 0 & \text{para} \quad -x_0 < x < x_0 \\ kx + y_0 & \text{para} \quad x \leq x_0 \end{cases}$$

A figura 2.63(c) é referente ao efeito de relé sem zona morta onde:

$$y = \begin{cases} y_0 & \text{para} \quad x > 0 \\ -y_0 & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

A figura 2.63(d) é referente ao efeito de limitador simples onde:

$$y = \begin{cases} y_0 & \text{para} \quad x > x_0 \\ kx & \text{para} \quad -x_0 \leq x \leq x_0 \text{ onde } k = y_0 / x_0 \\ -y_0 & \text{para} \quad x < x_0 \end{cases}$$

A figura 2.63(e) é referente ao efeito de histerese onde:

$$y = \begin{cases} y_0 & \text{para} \quad x \geq x_0 \; sentido(+) \; ou \; -x_0 \leq x \leq x_0 \; sentido(-) \\ -y_0 & \text{para} \quad x \leq -x_0 \; sentido(-) \; ou \; -x_0 \leq x \leq x_0 \; sentido(+) \end{cases}$$

Observar que nas representações anteriores não existe continuidade nas funções em intervalos finitos.

## 2.2.11. Técnicas de Variáveis de Estado

### Variáveis de estado

A representação de modelos na forma de variáveis de estado, trata-se de um procedimento que busca a solução de sistemas de equações diferenciais numa concepção matricial de modo a explorar as facilidades introduzidas pelo desenvolvimento computacional.
Lá pelos anos 1940, o estudo da teoria de controle automático se utilizava de uma metodologia clássica em que a modelagem dos sistemas tendia para uma condição de característica analítica e convencional, assim como foi visto nos tópicos iniciais desse capítulo.
Pelos anos 1960, esse mesmo estudo passou a se utilizar também da equação diferencial, porém dentro de uma abordagem de ordem matricial onde se

empregavam novas ferramentas determinando e estabelecendo grande capacidade ao método, também conhecido como método de estado.
A abordagem por variáveis de estado traz em seu cerne a possibilidade da representação de uma modelagem compacta onde um sistema de equações diferenciais, representando a dinâmica de um sistema de controle qualquer, pode ser resolvido de maneira conjunta.
Outro fator interessante é o emprego de técnicas numéricas na resolução de problemas matemáticos representativos de dispositivos físicos reais componentes do sistema em foco.

**Equações diferenciais e equações de estado**

Seja a seguinte equação diferencial, ordinária, que representa o sistema mostrado na figura 2.64. Lembrar que toda equação diferencial ordinária é uma equação na qual se encontram envolvidas as derivadas de uma função desconhecida dependente do tempo, no caso a função $y(t)$.

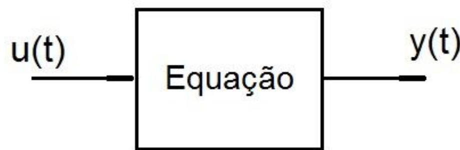



***Figura 2.64 – Sistema com Uma Entrada e Uma Saída***

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = b_0\, u(t) \qquad (2.192)$$

Na equação 2.192 considerar $t$ a variável independente, $u(t)$ a função de excitação ou entrada e $y(t)$ a resposta de saída do sistema físico que esta equação representa. Os coeficientes $a_0$, $a_1$, $a_2$, são constantes.

No sentido de simplificação, será tomada a seguinte notação:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \overset{(2)}{y} \quad \text{e} \quad \frac{dy(t)}{dt} = \overset{(1)}{y}$$

Generalizando-se, no caso de derivadas de ordem $n$ seria usada a seguinte notação:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \overset{(n)}{y} \quad \text{e} \quad \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} = \overset{(n-1)}{y} \qquad (2.193)$$

Deste modo, a equação 2.192 tomará o seguinte aspecto:

$$a_2 \overset{(2)}{y}(t) + a_1 \overset{(1)}{y}(t) + a_0\, y(t) = b_0\, u(t) \qquad (2.194)$$

A questão seguinte é transformar a equação diferencial original 2.192, por intermédio de escolhas arbitrárias, em um sistema de equações de primeira ordem.

Assim, tem-se que:

$$x_1(t) = y(t) \qquad (2.195)$$

$$x_2(t) = \overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{y}(t) \qquad (2.196)$$

$$x_3(t) = \overset{(2)}{x}_2(t) = \overset{(2)}{y}(t) = -k_0 y(t) - k_1 \overset{(1)}{y}(t) + m_0 u(t) \qquad (2.197)$$

Finalmente, ordenando as variáveis escolhidas, obtém-se que:

$$\begin{cases} \overset{(1)}{x}_1(t) = x_2(t) \\ \overset{(1)}{x}_2(t) = -k_0\, x_1(t) - k_1\, x_2(t) + m_0\, u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_1(t) \qquad (2.198)$$

onde

$$k_1 = \frac{a_1}{a_2} \quad , \quad k_0 = \frac{a_0}{a_2} \ \text{ e } \ m_0 = \frac{b_0}{a_2}$$

A escolha das variáveis, que resultou no sistema de equações 2.198, é chamada na teoria de controle de escolha fásica e essa escolha fásica é arbitrária e pode ser conduzida através de diferentes escolhas.

O sistema de equação 2.198 são as equações de estado que representam o sistema cuja equação diferencial foi dada na equação 2.192. Particularmente, a última das equações 2.198 é chamada de equação de saída.

Quando o parâmetro $a_2$, da equação original, for a unidade, o padrão adotado para essa escolha, com as equações de estado juntas, forma aquilo que se denomina forma canônica de variáveis de estado.

A forma canônica de variável de estado é um padrão de ordenamento que respeita algumas condições específicas tais como:

a) cada uma das equações de estado se apresentar, considerando o primeiro membro das equações diferenciais, numa combinação de termos com as variáveis de estado sendo o coeficiente do termo de maior ordem igual a unidade;

b) cada uma das equações de estado se apresentar, considerando o segundo membro das equações diferenciais, numa combinação de termos com as variáveis de entrada;

c) o sistema de equações não apresente, no segundo membro das equações diferenciais, nenhuma espécie de derivada.

Genericamente, pode-se alinhar o seguinte sistema de equações, para um conjunto de equações de estado com uma entrada $u(t)$ e uma saída $y(t)$:

$$\overset{(n)}{y}(t) + k_{n-1}\overset{(n-1)}{y}(t) + k_{n-2}\overset{(n-2)}{y}(t) + \ldots + k_0\, y(t) = m_0\, u(t) \qquad (2.199)$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{x}_1(t) = x_2(t) \\ \overset{(1)}{x}_2(t) = x_3(t) \\ \overset{(1)}{x}_3(t) = x_4(t) \\ \vdots \\ \overset{(1)}{x}_n(t) = -k_0\, x_1(t) - k_1\, x_2(t) - k_2\, x_3(t) + \cdots + -k_{n-1}\, x_n(t) + m_0\, u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_1(t) \qquad (2.200)$$

Seja, agora, considerar um sistema com três entradas e duas saídas, conforme mostrado na figura 2.65, seguinte.

Considerando as seguintes equações diferenciais de cada um dos subsistemas, tem-se que:

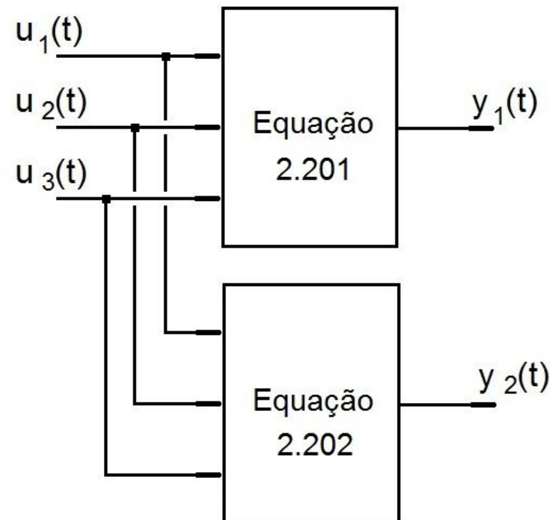



***Figura 2.65 – Sistema com Três Entradas e Duas Saídas***

$$\overset{(2)}{y_1}(t) + 3\overset{(1)}{y_1}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \qquad (2.201)$$

$$\overset{(3)}{y_2}(t) + 3\overset{(1)}{y_2}(t) + y_2(t) = u_1(t) + 3u_2(t) + u_3(t) \qquad (2.202)$$

O passo seguinte é a escolha fásica para as variáveis de estado sendo que a equação diferencial 2.201 exigirá duas variáveis enquanto que a equação 2.202 exigirá três.

Deste modo, tem-se que:

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_3(t) = x_1^{(1)}(t) = y_1^{(1)}(t)$$

$$x_3^{(1)}(t) = x_1^{(2)}(t) = y_1^{(2)}(t)$$

$$x_2(t) = y_2(t)$$

$$x_4(t) = x_2^{(1)}(t) = y_2^{(1)}(t)$$

$$x_5(t) = x_4^{(1)}(t) = x_2^{(2)}(t) = y_2^{(2)}(t)$$

$$x_5^{(1)}(t) = x_4^{(2)}(t) = y_2^{(3)}(t) \tag{2.203}$$

Das equações originais 2.201 e 2.202, extraem-se as expressões de $y_1^{(2)}(t)$ e de $y_2^{(3)}(t)$ da seguinte maneira:

$$y_1^{(2)}(t) = -3y_1^{(1)}(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \tag{2.204}$$

$$y_2^{(3)}(t) = -3y_2^{(1)}(t) - y_2(t)u_1(t) + 3u_2(t) + u_3(t) \tag{2.205}$$

Substituindo-se as variáveis da equação 2.203 nas equações 2.204 e 2.205, vem que:

$$y_1(t) = x_1(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = x_3(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_3(t) = \overset{(2)}{y}_1(t) = -3x_3(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = x_4(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_4(t) = x_5(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_5(t) = \overset{(3)}{y}_2(t) = -3x_4(t) - x_2(t) + u_1(t) + 3u_2(t) + u_3(t) \tag{2.206}$$

Rearranjando-se de maneira adequada, de modo a separar as variáveis de estado e as variáveis de saída para compor as equações de estado e de saída, vem:

$$\begin{cases} \overset{(1)}{x}_1(t) = x_3(t) \\ \overset{(1)}{x}_2(t) = x_4(t) \\ \overset{(1)}{x}_3(t) = -3x_3(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \\ \overset{(1)}{x}_4(t) = x_5(t) \\ \overset{(1)}{x}_5(t) = -x_2(t) - 3x_4(t) + u_1(t) + 3u_2(t) + u_3(t) \end{cases} \tag{2.207}$$

e

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ \\ y_2(t) = x_2(t) \\ \end{cases} \qquad (2.208)$$

As equações 2.207 e 2.208 poder ser agrupadas na forma matricial, uma das características fundamentais da abordagem do controle automático via variáveis de estado.
Esse agrupamento das equações de estado, numa forma padrão matricial, tomará o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} [\dot{x}] &= [A]\,[x] + [B]\,[u] \\ \\ [y] &= [C]\,[x] + [D]\,[u] \end{aligned} \qquad (2.209)$$

$$[x]^T = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t) \quad x_5(t)] \qquad (2.210)$$

$$[u]^T = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t)] \qquad (2.211)$$

$$[y]^T = [y_1(t) \quad y_2(t)] \qquad (2.212)$$

Cada uma das variáveis das equações 2.209 até 2.212, trata-se de uma matriz. Portanto, essas equações são equações matriciais. O conjunto de equações 2.209 representará, a partir de então, as chamadas equações de estado e saída na forma padrão de variáveis de estado do modelo ou da planta do sistema estudado.

Considerando-se a forma desenvolvida, e suprimindo a indicação $(t)$ de dependência do tempo das variáveis de estado e de saída, vem que:

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} \qquad [A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad [u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [D]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em termos de generalização, ainda será possível a apresentação das matrizes de uma forma mais prática e de rápido entendimento. Para tal, será suposto um sistema cuja planta seja representada, em suas equações de estado e de saída, conforme a equação 2.209 anterior, aqui repetida por comodidade.

$$\underset{5x1}{[\dot{x}]} = \underset{5x5}{[A]}\ \underset{5x1}{[x]} + \underset{5x3}{[B]}\ \underset{3x1}{[u]}$$

$$\underset{2x1}{[y]} = \underset{2x5}{[C]}\ \underset{5x1}{[x]} + \underset{2x3}{[D]}\ \underset{3x1}{[u]}$$

Será suposto, ainda, que o sistema de equações diferenciais representativo seja de ordem *n*. Também será suposto que haja *q* entradas externas agindo sobre o sistema. Que o sistema apresente também *p* saídas.
A figura 2.66 representará, de modo simplificado, tal sistema que será entendido como sendo um sistema genérico.

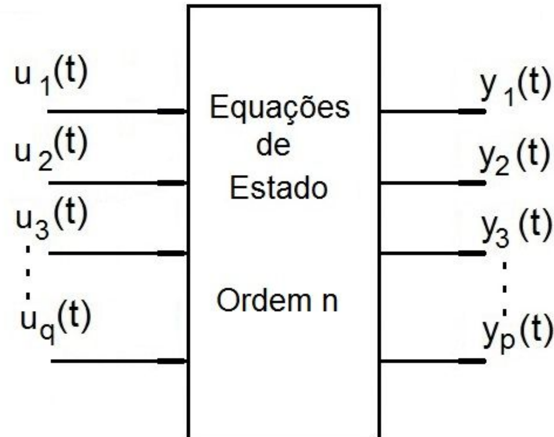



***Figura 2.66 – Sistema Genérico na Forma de Variáveis de Estado***

Deste modo, considerando as dimensões das matrizes numa forma genérica, tem-se que:

$$\underset{nx1}{[\dot{x}]} = \underset{nxn}{[A]}\ \underset{nx1}{[x]} + \underset{nxq}{[B]}\ \underset{qx1}{[u]}$$

$$\underset{px1}{[y]} = \underset{pxn}{[C]}\ \underset{nx1}{[x]} + \underset{pxq}{[D]}\ \underset{qx1}{[u]} \qquad (2.213)$$

É muito importante o devido conhecimento das dimensões das matrizes conforme mostrado na equação recursiva 2.213.

**Equações de estado e de saída no plano complexo**

As equações de estado e de saída, na forma padrão de variáveis de estado, considerando o caso anterior, encontram-se no domínio do tempo. Ainda assim, é possível trabalhar no domínio ou plano complexo de Laplace.

No plano temporal, a generalização das equações de estado e de saída pode ser dada a partir das equações 2.209 da seguinte forma:

$$[\dot{x}(t)] = [A]\,[x(t)] + [B]\,[u(t)]$$

$$[y(t)] = [C]\,[x(t)] + [D]\,[u(t)]$$

E no plano complexo, a generalização das equações de estado e de saída pode ainda ser dada da seguinte forma:

$$[\dot{x}(S)] = [A]\,[x(S)] + [B]\,[u(S)]$$

$$[y(S)] = [C]\,[x(S)] + [D]\,[u(S)]$$

Ou ainda de maneira mais simplificada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(S) &= A\ x(S) + B\ u(S) \\ y(S) &= C\ x(S) + D\ u(S) \end{aligned} \qquad (2.214)$$

Neste caso, a adquisição das funções de transferência, numa abordagem puramente matricial, pode ser obtida, lembrando-se que nem sempre as operações válidas para a matemática ordinária se aplicam diretamente à matemática matricial.

Como informação, a matriz *A* é denominada de matriz da planta, a matriz *B* de matriz de entrada, a matriz *C* de matriz de saída e a matriz *D* de matriz de transmissão, conforme citado na referência 10.

A função de transferência do sistema nada mais é que a relação entre saída e entrada, no plano complexo, ou melhor, $y(S)/u(S)$. O conceito de função de

transferência é aplicável à matemática ordinária enquanto que na matemática matricial, abordagem adotada para o tratamento via variável de estado, se utiliza da expressão matriz de transferência, em mais adequada.
Para resolver esse problema, deve-se obter a expressão simples matriz $x(S)$ da primeira equação 2.214 e levá-la na segunda equação.

Assim tem-se, evidenciando a primeira equação 2.214, considerando ainda a propriedade 5 da transformada de Laplace para a condição inicial em que $x(t_0) = 0$:

$$S\,x(S) - x(t_0) = A\,x(S) + B\,u(s) \quad \therefore \quad S\,x(S) - A\,x(S) = B\,u(s)$$

$$[S\mathrm{I} - A]\,x(S) = B\,u(s) \quad \therefore \quad x(S) = [S\mathrm{I} - A]^{-1}\,B\,u(s) \qquad (2.215)$$

onde $\mathrm{I}$ é a matriz identidade.

Uma observação importante é o fato de que a solução do problema atual deve passar, primeiramente, pela necessidade de que seja possível a inversão da matriz $[S\mathrm{I} - A]$ na equação 2.215 anterior.

A operação inversa é conhecida e é dada pela expressão seguinte:

$$[S\mathrm{I} - A]^{-1} = \frac{\text{adjunta da matriz } [S\mathrm{I} - A]}{\text{determinante da matriz } [S\mathrm{I} - A]} = \frac{adj\,[S\mathrm{I} - A]}{|S\mathrm{I} - A|} \qquad (2.216)$$

A equação 2.216 é parte da função de transferência aplicada à abordagem de um sistema por variáveis de estado. Na equação 2.216, o termo divisor é conhecido como a equação característica do sistema e tem a importante função de apresentar as raízes da função de transferência no plano da matemática contínua. Quando se trabalha no plano matricial, que é o caso presente, essa característica é mantida. Apenas que nesse caso, ao invés de raízes, as incógnitas a serem levantadas são agora chamadas de autovalores relativos ao sistema em questão. Os autovalores, semelhantemente às raízes do polinômio característico da função de transferência de um sistema qualquer, como foi visto anteriormente, têm tudo a ver com a estabilidade operativa da resposta do sistema.

No caso, os autovalores do sistema serão as raízes da equação característica dada pela seguinte equação:

$$|S\mathrm{I} - A| = 0 \qquad (2.217)$$

A partir de então, pode-se obter a equação da matriz de transferência procurada.

Levando-se a expressão de $x(S)$, da equação 2.215, na segunda equação 2.214 vem que:

$$y(S) = C\{\,[S\mathrm{I} - A]^{-1}\,Bu(s)\,\} + D\,u(S)$$

$$y(S) = \{C\ \ [S\mathrm{I} - A]^{-1}\,B + D\,\}u(S)$$

Assim obtém-se, para a expressão da matriz de transferência do sistema regido pelas equações de estado da equação 2.214, a seguinte equação recursiva:

$$\frac{y(S)}{u(S)} = C\ [S\mathrm{I} - A]^{-1}\,B + D \qquad (2.218)$$

Deve-se observar que o conceito de matriz de transferência exigiu que as conduções iniciais do sistema fossem nulas. Essa observação também foi mencionada pela referência 10 na página 149. Essa observação é fundamental.

---

**<u>EXEMPLO 2.30</u>**

Mostrar que a escolha fásica pode ser diferente, porém os autovalores do sistema não se alteram. Para tal usar o sistema regido pelas seguintes equações diferenciais:

$$\overset{(2)}{y_1}(t) + \overset{(1)}{y_1}(t) + 2y_1(t) = u_1(t)$$

$$\overset{(1)}{y_2}(t) + 3y_2(t) = u_1(t) + 3u_2(t)$$

**Solução:**

Uma importante análise que sempre será imposta aos projetos de sistemas de servomecanismo e controle automático é aquela relacionada com a estabilidade operativa deste frente às condições de trabalho exigidas.
Como já se disse antes, e também aqui, a inspeção das partes reais dos autovalores associados à planta do sistema em questão será determinante.

Para o sistema em questão, como se sabe, a escolha fásica não deverá influenciar na definição dos autovalores.

Considerando-se o sistema apresentado, a matriz A, também conhecida como matriz da planta, é o elemento principal na determinação dos autovalores do sistema.

Promovendo-se a primeira escolha fásica, vem:

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_2(t) = y_2(t)$$

$$x_3(t) = x_1^{(1)}(t) = y_1^{(1)}(t)$$

$$x_3^{(1)}(t) = x_1^{(2)}(t) = y_1^{(2)}(t)$$

Daí obtém-se que:

$$y_1(t) = x_1(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t)$$

$$x_1^{(1)}(t) = x_3(t)$$

$$x_3^{(1)}(t) = x_1^{(2)}(t) = y_1^{(2)}(t) = -y_1^{(2)}(t) - 2y_1(t) + u_1(t) = -2x_1(t) - x_3(t) + u_1(t)$$

$$x_2^{(1)}(t) = y_2^{(1)}(t) = -3y_2(t) + u_1(t) + 3u_2(t) = -3x_2(t) + u_1(t) + 3u_2(t)$$

Logo, colocando as equações de estado na forma matricial descompactada e no domínio do tempo, vem que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

Aplicando a equação 2.217, tem-se que $|S - A\mathrm{I}| = 0$.

$$[S\mathrm{I} - A] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 0 & -1 \\ 0 & S+3 & 0 \\ 2 & 0 & S+1 \end{bmatrix}$$

Para tal

$$\begin{vmatrix} S & 0 & -1 \\ 0 & S+3 & 0 \\ 2 & 0 & S+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad S^3 + 4S^2 + 5S + 6 = 0$$

Resolvendo-se a equação de terceiro grau, obtêm-se as seguintes raízes, ou melhor, os seguintes autovalores da matriz $A$ da planta do sistema cujas equações diferenciais foram dadas:

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -0{,}5 + j\,1{,}3287 \qquad \lambda_3 = -0{,}5 - j\,1{,}3287$$

Promovendo-se, agora, a segunda escolha fásica, vem:

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{y}_1(t) = x_2(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \overset{(2)}{x}_1(t) = \overset{(2)}{y}_1(t) = -\overset{(1)}{y}_1(t) - 2y_1(t) + u_1(t)$$

$$x_3(t) = y_2(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_3(t) = \overset{(1)}{y}_2(t) = -3y_2(t) + u_1(t) + 2u_3(t)$$

Daí obtém-se que:

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{y}_1(t) = x_2(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \overset{(2)}{x}_1(t) = \overset{(2)}{y}_1(t) = -\overset{(1)}{y}_1(t) - 2y_1(t) + u_1(t) = -2x_1(t) - x_2(t) + u_1(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_3(t) = y_2(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_3(t) = \overset{(1)}{y}_2(t) = -3y_2(t) + u_1(t) + 3u_2(t) = -3x_3(t) + u_1(t) + 3u_2(t)$$

Logo, colocando as equações de estado na forma matricial descompactada e no domínio do tempo, vem que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} u$$

Aplicando a equação 2.217, tem-se que $\left| S\mathrm{I} - A \right| = 0$.

$$\left[ S\mathrm{I} - A \right] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 & 0 \\ 2 & S+1 & 0 \\ 0 & 0 & S+3 \end{bmatrix}$$

Para tal

$$\begin{vmatrix} S & -1 & 0 \\ 2 & S+1 & 0 \\ 0 & 0 & S+3 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad S^3 + 4S^2 + 5S + 6 = 0$$

Nota-se que os autovalores são os mesmos:

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -0{,}5 + j1{,}3287 \qquad \lambda_3 = -0{,}5 - j1{,}3287$$

**Nota a respeito do exemplo 2.30:**

Dois fatos podem ser evidenciados aqui; o primeiro fato tem a ver com a comprovação pedida pelo problema quando se afirmou que, embora escolhas fásicas para as variáveis de estado sejam diferentes, isso não promoveria alteração dos autovalores do sistema. Pode-se comprovar que a mudança fásica aqui promovida não alterou os autovalores da matriz *A* da planta, o que já era de se esperar.
Como se sabe da teoria, a permutação de duas linhas entre si, de um dado determinante, provocará a mudança do sinal no valor deste determinante. Do mesmo modo que a permutação de duas colunas também muda o sinal no valor deste determinante. Porém, em ambos os casos, o módulo não se altera fato que garante a invariância dos autovalores.
Segundo fato é observar que, num breve exame dos autovalores, já se pode perceber que para todos eles a parte real da raiz é negativa, sinal de que esse sistema particular, representado pelas equações diferencias dadas, é estável. A análise da estabilidade de um sistema, pela simples inspeção de seus autovalores, é um critério básico e fundamental.

---

**EXEMPLO 2.31**

Encontrar a matriz de transferência para o sistema de controle cuja equação diferencial é a seguinte.

$$\overset{(2)}{y}(t) + 3\overset{(1)}{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

Considerar nulas as condições iniciais do sistema em questão.

**Solução:**

Primeiramente deverá ser promovida a escolha fásica das variáveis de estado para depois montar as equações de estado pertinente.

Assim, promovendo-se a escolha fásica vem que:

$$x_1(t) = y(t) \quad \therefore \quad y(t) = x_1(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{y}(t) = x_2(t) \quad \therefore \quad \overset{(1)}{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\overset{(2)}{x}_1(t) = \overset{(2)}{y}(t) = \overset{(1)}{x}_2(t) = -3\overset{(1)}{y}(t) - 2y(t) + u(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$$

Logo, colocando as equações de estado na forma matricial descompactada, vem que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Aplicando-se a equação 2.218, anterior, é possível obter a matriz de transferência que o problema pede, senão veja-se:

$$\frac{y(S)}{u(S)} = C\ [S\mathrm{I} - A]^{-1} B + D$$

A matriz $[S - A\mathrm{I}]^{-1}$, a ser utilizada na equação anterior, será obtida conforme está apresentado na equação 2.216.

$$[S\mathrm{I} - A]^{-1} = \frac{\text{adjunta da matriz } [S\mathrm{I} - A]}{\text{determinante da matriz } [S\mathrm{I} - A]} = \frac{adj\,[S\mathrm{I} - A]}{|S\mathrm{I} - A|}$$

$$[S\mathrm{I} - A] = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix}$$

$$adj\,[S\mathrm{I} - A] = cofator \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix}^T = cofator \begin{bmatrix} S & 2 \\ -1 & S+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+3 & 1 \\ -2 & S \end{bmatrix}$$

O determinante $|S\mathrm{I}-A|$ será dado por:

$$|S\mathrm{I}-A| = S(S+3)+2 = S^2+3S+2 \equiv (S+2)(S+1)$$

Logo, a matriz inversa será:

$$[S\mathrm{I}-A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} S+3 & 1 \\ -2 & S \end{bmatrix}}{(S+2)(S+1)}$$

A matriz de transferência então poderá ser calculada, a partir da equação 2.218, fazendo-se a matriz $[D]=0$.

$$\frac{y(S)}{u(S)} = \frac{1}{(S+2)(S+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S+3 & 1 \\ -2 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{y(S)}{u(S)} = \frac{1}{(S+2)(S+1)}$$

---

**EXEMPLO 2.32**

Encontrar a matriz de transferência para o sistema de controle composto pelo circuito elétrico tipo RLC Série mostrado na figura anterior 2.14 e representado pela equação diferencial 2.107, aqui reescrita por comodidade. Considerar como variáveis de estado a tensão no indutor e a corrente circulante, ambas no domínio do tempo. Encontrar a equação característica do sistema e os autovalores associados à matriz da planta.

$$v_E(t) = R\ i(t) + L\ \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\ dt$$

Considerar nulas as condições iniciais do sistema em questão.

**Solução:**

Inicialmente, sabe-se das quedas de tensão em cada um dos elementos passivos do sistema:

resistor R $\rightarrow$ $v_R(t) = R\,i(t)$

indutor L $\rightarrow$ $v_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$

$$\text{capacitor C} \rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt$$

Derivando-se a equação diferencial do sistema em relação ao tempo e já separando a equação de saída na tensão sobre a indutância vem:

$$\frac{dv_E(t)}{dt} = R\,\frac{di(t)}{dt} + L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}\frac{dv_E(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad (2.219)$$

A seguinte escolha fásica é possível:

$$x_1(t) = v_L(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = i(t)$$

As equações de estado 2.219 poderão, então, ser reescritas na forma de variáveis de estado.

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{v}_L(t) = L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -R\,\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}i(t) + \frac{dv_E(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v_L(t) = \frac{1}{L}x_1(t)$$

Ou melhor:

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{v}_L(t) = L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -R\,\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}i(t) + \frac{dv_E(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v_L(t) = \frac{1}{L}x_1(t)$$

Ou então:

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = -\frac{R}{L}\, x_1(t) - \frac{1}{C} x_2(t) + \overset{(1)}{u}_1(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \frac{1}{L} x_1(t) \tag{2.220}$$

As equações de estado, na sua forma matricial e no domínio do tempo, serão dadas por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \qquad D = 0 \tag{2.221}$$

Observando mais detalhadamente as equações de estado do sistema, equações agrupadas na equação 2.221 anterior, percebe-se que a forma padrão de variáveis de estado acabou desobedecida, isso porque apareceu uma derivada do sinal de entrada $u(t)$ no segundo membro. Não que isso seja um impeditivo, porém, dentro do padrão que a literatura estabelece para a abordagem por variáveis de estado, isso não é interessante. Sabe-se que muitas formas canônicas podem ser geradas em função das escolhas fásicas promovidas, porém elas todas devem procurar manter a forma padrão vista na equação 2.214.

Visando contornar o problema, na etapa da escolha fásica, será adotado um procedimento de mudança de variáveis, de modo adequado, que possa promover a eliminação, das parcelas em derivada, no caso presente, na parcela que contém a derivada da entrada $u(t)$.

A nova escolha fásica poderá ser a seguinte:

$$x_1(t) = v_L(t) - u(t)$$

$$x_2(t) = i(t)$$

Desta maneira, as equações de estado tomarão a seguinte forma:

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{v}_L(t) - \overset{(1)}{u}(t) = L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - \overset{(1)}{u}(t) = -R\,\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}i(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = -\frac{R}{L}\,[L\frac{di(t)}{dt}] - \frac{1}{C}i(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = -\frac{R}{L}\,[L\frac{di(t)}{dt} - u(t)] - \frac{R}{L}u(t) - \frac{1}{C}i(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = -\frac{R}{L}\,x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) - \frac{R}{L}u(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}[L\frac{di(t)}{dt}] = \frac{1}{L}[L\frac{di(t)}{dt} - u(t)] + \frac{1}{L}u(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Em resumo:

$$\overset{(1)}{x}_1(t) = -\frac{R}{L}\,x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) - \frac{R}{L}u(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Na forma matricial padrão:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -R/L \\ 1/L \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \qquad D' \neq 0 \tag{2.222}$$

Evidentemente que a nova escolha fásica faz com que a condição de se ter a matriz $D' = 0$ não mais procede. A questão agora é que, após a mudança de variável visando contornar o problema da presença de derivadas no segundo membro da forma canônica de variáveis de estado, haverá alteração das matrizes *B'* e *D'*. As matrizes *B'* e *D'* são as novas matrizes que apareceram na

forma padrão de variáveis de estado em função da mudança de variável. As matrizes *A* e C não sofrerão alteração como será provada mais adiante.

Para comprovar essa assertiva, bastará seguir o seguinte raciocínio do que foi realizado com a troca de variáveis.

$$z_1(t) = x_1(t) - u(t) \quad \therefore \quad x_1(t) = z_1(t) + u(t)$$

$$z_2(t) = x_2(t)$$

Em termos matriciais e no domínio do tempo, em função da mudança de variáveis na escolha fásica, tem-se que:

$$x = z + Nu \tag{2.223}$$

Do mesmo modo que pela equação 2.221, anterior, tem-se que:

$$\overset{(1)}{x} = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{x}_1(t) \\ \overset{(1)}{x}_2(t) \end{bmatrix} = Ax + B_0u + B_1\overset{(1)}{u} \tag{2.224}$$

Levando a expressão de *x* da equação 2.223 na equação 2.224, tem-se que:

$$\overset{(1)}{z} + N\overset{(1)}{u} = \begin{bmatrix} \overset{(1)}{x}_1(t) \\ \overset{(1)}{x}_2(t) \end{bmatrix} = A[z + Nu] + B_0u + B_1\overset{(1)}{u}$$

$$\overset{(1)}{z} = Az + ANu + B_0u + B_1\overset{(1)}{u} - N\overset{(1)}{u} \tag{2.225}$$

Logo, como não se deseja ter a presença de derivadas no segundo membro da equação 2.225, anterior, será adotada a seguinte condição:

$$B_1\overset{(1)}{u} - N\overset{(1)}{u} = 0 \tag{2.226}$$

Assim, a equação 2.225 tomará a seguinte forma, já considerando que da relação 2.226 $B_1 = N$:

$$\overset{(1)}{z} = Az + [B_0 + AB_1]u$$

Portanto, tem-se que:

$$B_0 + AB_1 \tag{2.227}$$

Uma observação importante que se pode fazer tem a ver com o grau das equações de estado que se encontram na forma canônica de variáveis de estado.

Primeiramente pode-se imaginar uma equação diferencial que represente de maneira matemática a dinâmica de um determinado sistema físico, por exemplo.

Seja a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} &\overset{(n)}{y}(t) + a_1 \overset{(n-1)}{y}(t) + a_2 \overset{(n-2)}{y}(t) + ... + a_{n-1} \overset{(1)}{y}(t) + a_n y(t) = \\ &= b_m \overset{(m)}{u}(t) + b_{m-1} \overset{(m-1)}{u}(t) + b_{m-2} \overset{(m-2)}{u}(t) + ... + b_1 \overset{(1)}{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{2.228}$$

Para a equação genérica 2.228, o interessante é que se tenha a relação de ordem das equações diferenciais do primeiro membro e do segundo membro da equação 2.228 obedecendo à condição $n \geq m$.

Continuando a análise, serão analisadas agora as equações de saída $y(t)$ em função das matrizes *C* e *D'*.

Sabe-se, das equações de estado na sua forma matricial e no domínio do tempo, que:

$$y = C\ x + D\ u$$

Mas com $D = 0$ vem que:

$$y = C\ x \tag{2.229}$$

Trazendo-se na equação 2.229 a expressão de *x* da equação 2.223 vem que:

$$y = C\ [z + Nu] = Cz + CNu \tag{2.230}$$

Logo, pode-se concluir que em termos de forma padrão de variáveis de estado, a matriz *D*, resultado na mudança de variável durante o processo de escolha fásica, foi alterada para uma matriz *D'* dada por:

$$D' = CN$$

E como, pela equação 2.226, o valor $B_1 = N$ foi o que se obteve das alterações realizadas, vem que:

$$D' = CB_1 \qquad (2.231)$$

Voltando ao problema em questão, a matriz D', depois da mudança de variáveis, será então:

$$D' = CB_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Considerando-se agora a equação 2.218 relativa à matriz de transferência do sistema, vem:

$$\frac{y(S)}{u(S)} = C\ [S\mathrm{I} - A]^{-1} B' + D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} [S\mathrm{I} - A]^{-1}$$

Com os seguintes valores das matrizes já devidamente calculados e levados na equação anterior, a matriz de transferência do sistema ficará então:

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -R/L \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$[S - A\mathrm{I}]^{-1} = \frac{1}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} S & -1/C \\ 1/L & S + R/L \end{bmatrix}$$

$$\frac{y(S)}{u(S)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} \right) \begin{bmatrix} S & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & S + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + [1] = \frac{S^2}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}}$$

A equação característica do sistema é dada pela equação 2.217, seguinte:

$$|S\mathrm{I} - A| = 0 \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S + \frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & S \end{vmatrix} = 0$$

$$S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (2.232)$$

Os autovalores relativos ao sistema dado serão as raízes do polinômio ou equação característica dado pela equação 2.224 anteriormente deduzida.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \qquad (2.233)$$

**Nota a respeito do exemplo 2.32:**

A referência 10 traz amplo desenvolvimento acerca da teoria que o autor chamou de método de Langholtz-Frankenthal. Esse método generaliza o processo de ataque ao problema de como contornar a questão da existência de derivadas do sinal de entrada nas equações de estado quando se trabalha com variáveis de estado na modelagem matemática de representação.

---

**<u>EXEMPLO 2.33</u>**

Dado um sistema mecânico de rotação formado por duas roldanas acopladas no mesmo eixo, e sob a ação de torques externos, conforme está mostrado na figura 2.67, promover a análise sobre a modelagem matemática desenvolvida, considerando-se a abordagem por variáveis de estado, bem como desenvolver um programa aplicativo com o recurso da simulação, de modo a obter os registros de simulação do comportamento das variáveis de velocidade angular $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$ frente a uma entrada de torque, na forma de degrau, no domínio do tempo, exatamente na entrada dois do sistema.

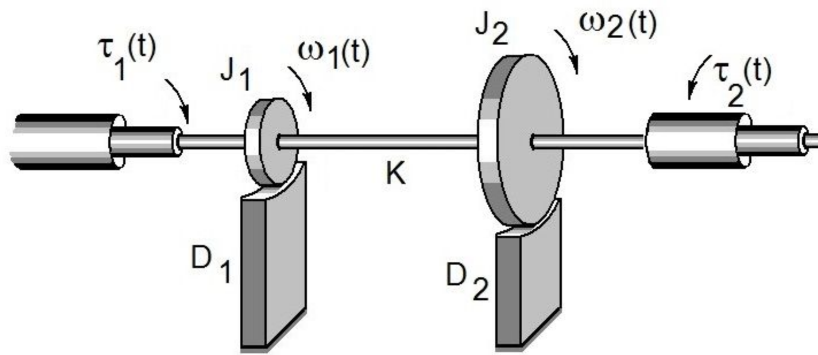



***Figura 2.67 – Sistema de Roldanas Acopladas***

Na figura 2.67 considerar a seguinte legenda:

$\omega_1(t)$: velocidade angular da roldana 1;
$\omega_2(t)$: velocidade angular da roldana 2;
$\tau_1(t)$: torque aplicado do lado da roldana 1;
$\tau_2(t)$: torque aplicado do lado da roldana 2;
$\tau_{12}(t)$: torque transferido entre as roldanas no sentido 1 para 2;
$D_1$ : coeficiente de viscosidade cinemática do mancal 1;
$D_2$ : coeficiente de viscosidade cinemática do mancal 2;
$J_1$ : momento de inércia da roldana 1;
$J_2$ : momento de inércia da roldana 2;
$K$ : compliância torcional do eixo entre as roldanas.

**Solução:**

Para que o modelo seja o mais completo, serão consideradas as possibilidades de duas aplicações de torque de entrada, na forma de variáveis de entrada, sobre cada uma das roldanas. Será mais uma questão teórica para análise.
Deste modo, será o seguinte o sistema de equações diferenciais para o sistema mecânico de rotação focado:

roldana 1:

$$\tau_1(t) = J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt} + D_1\omega_1(t) + \frac{1}{K}\int_0^t [\omega_1(t) - \omega_2(t)]dt \tag{2.234}$$

roldana 2:

$$\tau_2(t) = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + D_2\omega_2(t) - \frac{1}{K}\int_0^t [\omega_1(t) - \omega_2(t)]dt \tag{2.235}$$

Procurando eliminar os termos em integral, serão derivadas as duas equações anteriores em relação ao tempo. Assim, tem-se que:

$$\frac{d\tau_1(t)}{dt} = J_1 \frac{d^2\omega_1(t)}{dt^2} + D_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt} + \frac{1}{K}\omega_1(t) - \frac{1}{K}\omega_2(t)$$

$$\frac{d\tau_2(t)}{dt} = J_2 \frac{d^2\omega_2(t)}{dt^2} + D_2 \frac{d\omega_2(t)}{dt} - \frac{1}{K}\omega_1(t) + \frac{1}{K}\omega_2(t)$$

Em notação simplificada, as equações precedentes tomarão a seguinte forma:

$$J_1 \overset{(2)}{\omega}_1(t) + D_1 \overset{(1)}{\omega}_1(t) + \frac{1}{K}\omega_1(t) - \frac{1}{K}\omega_2(t) = \overset{(1)}{\tau}_1(t)$$

$$J_2 \overset{(2)}{\omega}_2(t) + D_2 \overset{(1)}{\omega}_2(t) - \frac{1}{K}\omega_1(t) + \frac{1}{K}\omega_2(t) = \overset{(1)}{\tau}_2(t)$$

Continuando a manipulação:

$$J_1 \overset{(2)}{\omega}_1(t) = -D_1 \overset{(1)}{\omega}_1(t) - \frac{1}{K}\omega_1(t) + \frac{1}{K}\omega_2(t) + \overset{(1)}{\tau}_1(t)$$

$$J_2 \overset{(2)}{\omega}_2(t) = -D_2 \overset{(1)}{\omega}_2(t) + \frac{1}{K}\omega_1(t) - \frac{1}{K}\omega_2(t) + \overset{(1)}{\tau}_2(t)$$

Finalmente, isolando as variáveis de ordem mais elevada, em cada uma das equações anteriores, vem:

$$\overset{(2)}{\omega}_1(t) = -\frac{D_1}{J_1}\overset{(1)}{\omega}_1(t) - \frac{1}{KJ_1}\omega_1(t) + \frac{1}{KJ_1}\omega_2(t) + \frac{1}{J_1}\overset{(1)}{\tau}_1(t) \qquad (2.236)$$

$$\overset{(2)}{\omega}_2(t) = -\frac{D_2}{J_2}\overset{(1)}{\omega}_2(t) + \frac{1}{KJ_2}\omega_1(t) - \frac{1}{KJ_2}\omega_2(t) + \frac{1}{J_2}\overset{(1)}{\tau}_1(t) \qquad (2.237)$$

A partir das Equações 2.236 e 2.237, deverá ser promovida a escolha fásica adequada para as variáveis de estado conforme procedimento seguinte.

$$x_1(t) = \omega_1(t) = y_1(t)$$
$$x_2(t) = \overset{(1)}{x}_1(t) = \overset{(1)}{\omega}_1(t)$$
$$\overset{(1)}{x}_2(t) = \overset{(2)}{\omega}_1(t) = -\frac{D_1}{J_1}x_2(t) - \frac{1}{KJ_1}x_1(t) + \frac{1}{KJ_1}x_3(t) + \frac{1}{J_1}\overset{(1)}{\tau}_1(t)$$

$$x_3(t) = \omega_2(t) = y_2(t)$$

$$x_4(t) = \overset{(1)}{x}_3(t) = \overset{(1)}{\omega}_2(t)$$

$$\overset{(1)}{x}_4(t) = \overset{(2)}{\omega}_2(t) = -\frac{D_2}{J_2}x_4(t) - \frac{1}{KJ_2}x_3(t) + \frac{1}{KJ_2}x_1(t) + \frac{1}{J_2}\overset{(1)}{\tau}_2(t)$$

Após a escolha fásica, colocando-se as equações de estado na forma matricial, vem que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/KJ_1 & -D_1/J_1 & 1/KJ_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/KJ_2 & 0 & -1/KJ_2 & -D_2/J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/J_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

(2.238)

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Passando-se as equações 2.234 e 2.235, anteriores, para o domínio da transformada de Laplace, na variável *S*, e considerando nulas as condições iniciais do sistema focado, vem:

$$\tau_1(S) = J_1 S\omega_1(S) + D_1\,\omega_1(S) + \frac{1}{K}\frac{1}{S}\left[\omega_1(S) - \omega_2(S)\right]$$

$$\tau_2(S) = J_2 s\omega_2(s) + D_2\omega_2(s) + \frac{1}{K}\frac{1}{s}\left[\omega_2(s) - \omega_1(s)\right]$$

Assim, resumidamente, vem que:

$$\tau_1(S) = \left[J_1 S + D_1 + \frac{1}{KS}\right]\omega_1(S) - \frac{1}{KS}\omega_2(S) \qquad (2.239)$$

$$\tau_2(S) = -\frac{1}{KS}\omega_1(S) + \left[ J_2 S + D_2 + \frac{1}{KS} \right]\omega_2(S) \qquad (2.240)$$

Trabalhando melhor as equações 2.236 e 2.237, obtém-se o seguinte sistema considerando a variável $S$ como a variável complexa do operador de Laplace.

$$\left[ J_1 S^2 + D_1 S + \frac{1}{K} \right]\omega_1(S) - \frac{1}{K}\omega_2(S) = S\tau_1(S) \qquad (2.241)$$

$$\left[ J_2 S^2 + D_2 S + \frac{1}{K} \right]\omega_2(S) - \frac{1}{K}\omega_1(S) = S\tau_2(S) \qquad (2.242)$$

A partir das equações 2.238 e 2.239, podem-se estabelecer as equações que darão suporte à montagem do diagrama de blocos, no plano complexo, com as funções de transferência do conjunto.

Dividindo-se as equações 2.238 e 2.239 por $S^2$, as seguintes novas equações, já distribuindo as parcelas nas variáveis de estado $\omega_1(S)$ e $\omega_2(S)$, são obtidas.

$$J_1\omega_1(S) + \frac{D_1}{S}\omega_1(S) + \frac{1}{KS^2}\omega_1(S) - \frac{1}{KS^2}\omega_2(S) = \frac{1}{S}\tau_1(S)$$

$$J_1\omega_1(S) = \frac{1}{S}\left[\tau_1(S) - D_1\omega_1(S)\right] + \frac{1}{KS^2}\left[\omega_2(S) - \omega_1(S)\right]$$

Isolando-se $\omega_1(S)$ vem:

$$\omega_1(S) = \frac{1}{J_1 S}\left[\tau_1(S) - D_1\omega_1(S)\right] + \frac{1}{J_1 KS^2}\left[\omega_2(S) - \omega_1(S)\right] \qquad (2.243)$$

Repetindo-se o mesmo raciocínio para $\omega_2(t)$ vem:

$$J_2\omega_2(s) + \frac{D_2}{s}\omega_2(s) + \frac{1}{Ks^2}\omega_2(s) - \frac{1}{Ks^2}\omega_1(s) = \frac{1}{s}\tau_2(s)$$

$$J_2\omega_2(s) = \frac{1}{s}\left[\tau_2(s) - D_2\omega_2(s)\right] + \frac{1}{Ks^2}\left[\omega_1(s) - \omega_2(s)\right]$$

$$\omega_2(s) = \frac{1}{J_2 s}\left[\tau_2(s) - D_2\omega_2(s)\right] + \frac{1}{J_2 K s^2}\left[\omega_1(s) - \omega_2(s)\right] \tag{2.244}$$

A partir das equações 2.240 e 2.241 será possível a construção do diagrama de blocos, no plano complexo da transformada de Laplace, do sistema de roldanas apresentado na figura 2.67.

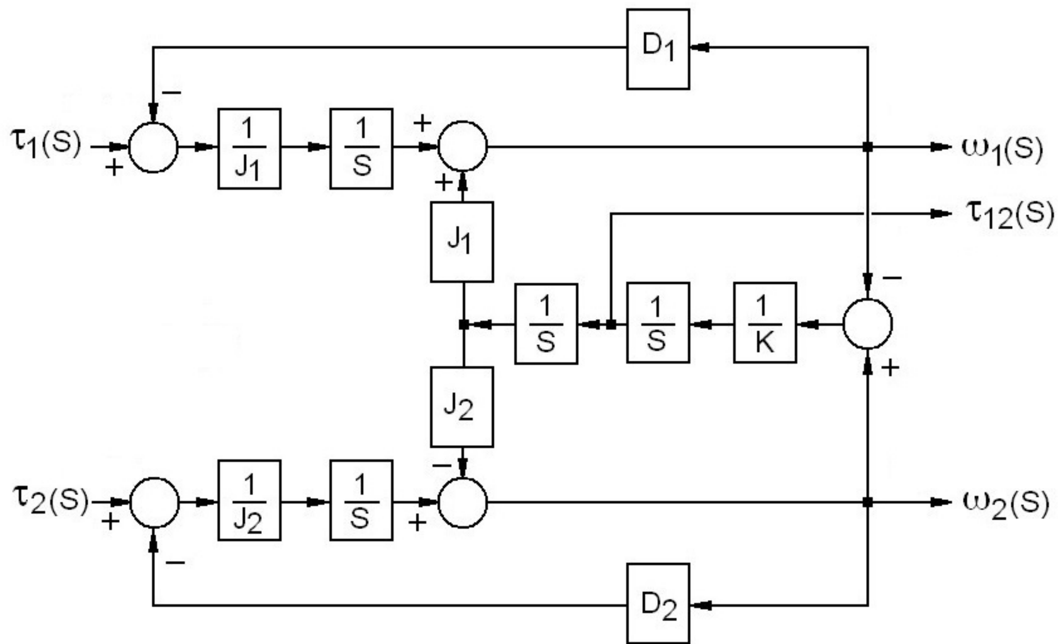



***Figura 2.68 – Diagrama de Blocos do Sistema da Figura 2.67***

Voltando a análise para as equações 2.38, será aqui aplicado o procedimento particular, já utilizado em exemplos anteriores, cuja finalidade é a de contornar a questão da existência de derivadas dos sinais de entrada.
Segundo aquele método utilizado no exemplo 2.32, por exemplo, as matrizes *B* e *D* originais são alteradas conforme as expressões 2.227 e 2.231, aqui reproduzidas:

$$B' = B_0 + AB_1 = 0 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/KJ_1 & -D_1/J_1 & 1/KJ_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/KJ_2 & 0 & -1/KJ_2 & -D_2/J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/J_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/J_1 & 0 \\ -D_1/J_1^2 & 0 \\ 0 & 1/J_2 \\ 0 & -D_2/J_2^2 \end{bmatrix}$$

(2.245)

$$D' = CB_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/J_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/J_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.246)$$

Deste modo, as equações de estado, segundo a mudança de variáveis, tomarão o seguinte aspecto:

$$\dot{} = A\,x + B'u$$

(2.247)

$$y = C\,x$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/KJ_1 & -D_1/J_1 & 1/KJ_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/KJ_2 & 0 & -1/KJ_2 & -D_2/J_2 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1/J_1 & 0 \\ -D_1/J_1^2 & 0 \\ 0 & 1/J_2 \\ 0 & -D_2/J_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora dando valores numéricos aos parâmetros do sistema, tem-se que:

$\tau_1(t) = 0{,}2$ [unidade normalizada];
$\tau_2(t) = 0{,}1$ [unidade normalizada];
$D_1 = 0{,}5$ [unidade normalizada];
$D_2 = 0{,}5$ [unidade normalizada];
$J_1 = 5$ [s];
$J_2 = 10$ [s];
$K = 100$ [unidade normalizada].

Com os valores de parâmetros dados, e normalizados segundo uma base de valores definida previamente, as matrizes do sistema de equações de estado do modelo apresentado serão:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}002 & -0{,}01 & 0{,}002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}001 & 0 & -0{,}001 & -0{,}005 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ -0{,}002 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}0005 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando a matriz $A$ da planta, através de programas computacionais, são obtidos os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -0{,}006679 \qquad \lambda_{3,4} = -0{,}004160 \pm j\,0{,}054562$$

A figura 2.69 traz o registro da simulação do modelo contido no diagrama de blocos da figura 2.68, anterior, no plano complexo. A simulação foi feita considerando-se os valores aqui fornecidos. Os sinais encontram-se normalizados bastando multiplicar por 100 para obtê-los em valores porcentuais. Foi aplicado um sinal de entrada no ponto de aplicação do torque $\tau_2(t)$ e colhidos os sinais de velocidade angular das duas roldanas além do sinal do torque desenvolvido no eixo de interligação destas roldanas, sinais todos no domínio do tempo.

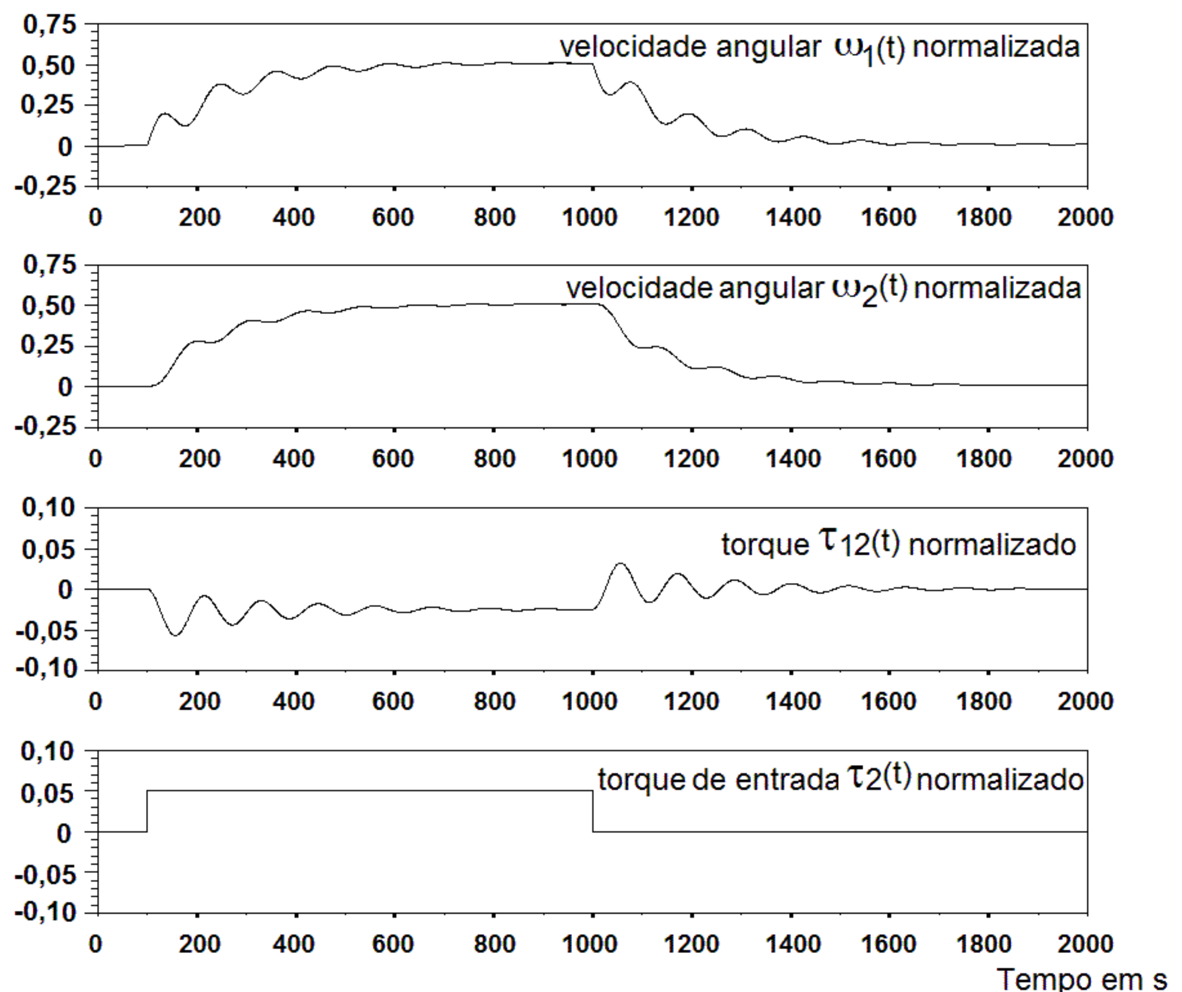



***Figura 2.69 – Simulação do Sistema do Diagrama de Blocos da Figura 2.68***

**Nota a respeito do exemplo 2.33:**

Um fato interessante que pode ser observado nesse exemplo é que o sistema em questão, trata-se de um sistema mecânico de rotação síncrono.
Uma confusão que se faz em relação ao termo síncrono é liga-lo ao fato de que a palavra *síncrono* tem a ver com um valor fixo de velocidade angular que deve imperar no sistema todo. Um exemplo típico é o sistema elétrico interligado. Em

muitos casos, o sistema é entendido como sendo síncrono porque todo ele gira em 60 Hz o que não é verdade. Na realidade, um sistema é dito síncrono apenas porque, após a passagem pelo regime transitório, quando o sistema vai se acomodando no regime permanente, ele acaba assumindo o mesmo valor de velocidade angular, estável, valor esse que dependerá unicamente das condições de carregamento. Para o sistema elétrico interligado, por exemplo, houve casos em que, pela importância das ocorrências envolvidas, a freqüência se estabilizou em 70 Hz ou em outro caso em que a mesma freqüência veio a se estabilizar em 54 Hz, como comprovado em registros obtidos de equipamentos de precisão que foram instalados para esse propósito.
Para o exemplo em questão, houve uma elevação do torque que foi aplicado à entrada dois do sistema, mais precisamente um degrau de 0,05 em unidade normalizada de torque. Esse fato provocou uma elevação da velocidade angular de regime permanente do sistema na mesma proporção que a do torque aplicado.
O registro da figura 2.69 mostra que o sistema é estável e isso pode ser confirmado pela inspeção dos autovalores da equação característica relativos à matriz da planta do modelo adotado para esse sistema.
A oscilação das respostas mostra que há raízes complexas envolvidas na solução da equação geral na forma de um par de autovalores dominantes que permitem que se obtenha o grau de amortecimento bem como a freqüência natural de oscilação amortecida.

Os valores da freqüência natural amortecida e do coeficiente de amortecimento do sistema poderão ser obtidos a partir da equação 2.84, anterior, relativa à resposta de um sistema de controle apresentando um par de raízes complexas conjugadas na condição de pólos dominantes.

A equação característica do sistema, a partir dos autovalores calculados, será dada por:

$$Q(S) \equiv S(S + 0{,}006679)(S + 0{,}004160 - j\,0{,}054562)(S + 0{,}004160 + j\,0{,}054562)$$

A equação do segundo grau relativa aos pólos complexos conjugados será dada por:

$$Q'(S) \equiv (S + 0{,}004160 - j\,0{,}054562)(S + 0{,}004160 + j\,0{,}054562) \equiv$$
$$\equiv S^2 + 0{,}08320\,S + 0{,}002995 \equiv S^2 + 2\xi\,\omega_n\,S + \omega_n^{\,2}$$

onde já foi comentado que para os autovalores:

$$S_{1,2} = \lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^{\,2}}\; e^{\pm j\theta}$$
$$\sigma = -\xi\,\omega_n$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Considerando os coeficientes da equação característica relativa ao sistema em questão, e os substituindo nas equações recursivas anteriores, obtém-se:

$$\omega_n^2 = 0{,}0029951 \quad \therefore \quad \omega_n = 0{,}0547275 \text{ rad/s}$$

O período e a freqüência não amortecida do sistema serão:

$$T = \frac{2\pi}{0{,}0547275} = 114{,}80\ s \quad \therefore \quad f = \frac{1}{114{,}80} = 8{,}7 \text{ mHz}$$

---

**Matriz de transição e estudo de trajetórias de estado**

Quando se trabalha com sistemas não excitados não existe a preocupação com a análise relativa à resposta a entradas ou sinais de excitação externa que agem sobre tais sistemas. Nestes casos a preocupação é outra. Porém, quando o que se inspeciona são as respostas de certos sistemas sob a ação de sinais externos o que se procura, geralmente, é estudar a capacidade operativa desses sistemas quanto ao carregamento.
Quando uma determinada função forçante $f(t)$ é igual a zero, a equação diferencial que rege tais sistemas é dita não homogênea, assim como já foi mencionado anteriormente no subitem 2.1.2.

De maneira bem simples, utilizando da definição de variáveis de estado através das suas equações de estado 2.214, porém no domínio do tempo, pode-se desenvolver o seguinte raciocínio acerca de sistemas não excitados.

$$\dot{x}(t) = A\ x(t)$$

$$y(t) = C\ x(t) \qquad (2.248)$$

$$\text{com} \quad u(t) = 0$$

Observando a nova abordagem, percebe-se que qualquer movimentação notada num sistema não excitado dependerá unicamente da existência de, pelo menos, uma condição inicial presente e diferente de zero, pois foi admitida a inexistência de entradas externas, em outras palavras, $u(t) = 0$.

Deste modo, poder-se-á admitir a existência de um vetor que representa o conjunto de condições iniciais presentes nesse sistema na seguinte forma matricial, num tempo $t_0$ qualquer:

$$x'(t_0) = [x_1(t_0) \quad x_2(t_0) \quad x_3(t_0) \quad \cdots \quad x_n(t_0)] \tag{2.249}$$

Notar que o conceito de vetor aqui empregado é uma particularidade utilizada quando se trabalha numa abordagem matricial. Nesse caso, o vetor é tratado como sendo uma matriz tipo coluna, normalmente, de variáveis. A equação 2.249 indica, pela notação de matrizes, um vetor transposto.

É fácil admitir que se o sistema for suposto invariante no tempo, o tempo $t_0$ qualquer poderá ser zero o que permite que a equação 2.249 seja simplificada para:

$$x'(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0) \quad \cdots \quad x_n(0)] \tag{2.250}$$

Será considerado agora o desenvolvimento do vetor genérico de variáveis de estado $x(t)$ em série de Maclaurin conforme o seguinte procedimento:

$$x(t) = \frac{x(0)}{0!} + \frac{\overset{(1)}{x}(0)}{1!}t + \frac{\overset{(2)}{x}(0)}{2!}t^2 + \frac{\overset{(3)}{x}(0)}{3!}t^3 + \cdots + \frac{\overset{(m)}{x}(0)}{m!}t^m + \cdots \tag{2.251}$$

Sabe-se, da escolha fásica, que:

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{x}(0) &= \left.\frac{dx(0)}{dt}\right]_{t=0} \\
\overset{(2)}{x}(0) &= \left.\frac{d^2x(0)}{dt^2}\right]_{t=0} \\
\overset{(3)}{x}(0) &= \left.\frac{d^3x(0)}{dt^3}\right]_{t=0} \\
&\vdots \\
\overset{(m)}{x}(0) &= \left.\frac{d^mx(0)}{dt^m}\right]_{t=0}
\end{aligned} \tag{2.252}$$

Da primeira equação 2.248, pode-se obter o seguinte desenvolvimento em função das derivadas seguidas e da constância da matriz da planta $A$:

$$\overset{(1)}{x}(0) = A\, x(0)$$

$$\overset{(2)}{x}(0) = A\, \overset{(1)}{x}(0) = A^2\, x(0)$$

$$\overset{(3)}{x}(0) = A\, \overset{(2)}{x}(0) = A^3\, x(0) \qquad (2.253)$$

$$\vdots$$

$$\overset{(m)}{x}(0) = A\, \overset{(m-1)}{x}(0) = A^m\, x(0)$$

Substituindo-se as expressões de cada um dos termos das derivadas da equação 2.253 na equação da somatória 2.251, e já colocando em evidência o termo $x(0)$, vem que:

$$x(t) = (\mathrm{I} + t\,A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^m}{m!}A^m + \cdots)\,x(0) = e^{At}\, x(0) \qquad (2.254)$$

Quando se utiliza da série de Taylor, mais genérica, a condição inicial pode se dar no instante $(t - t_0)$ fato que implica em uma nova distribuição da série particular da equação 2.254. Assim, tem-se que:

$$x(t) = [\mathrm{I} + (t - t_0)A + \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2 + \frac{(t-t_0)^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{(t-t_0)^m}{m!}A^m + \cdots]\,x(t_0) = e^{A(t-t_0)}\, x(t_0)$$

com

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\, x(t_0) \qquad (2.255)$$

A equação 2.255 representa aquilo que se chama de trajetórias de estado referente ao modelo da planta em questão.

Em termos de saída, de modo genérico e considerando a segunda equação 2.248, pode-se escrever que:

$$y(t) = C\, e^{A(t-t_0)}\, x(t_0) = C\,\phi(t-t_0)\,x(t_0) \qquad (2.256)$$

Na equação 2.256, o termo $\phi(t - t_0)$ é conhecido como matriz de transição e cumpre importantes características dentro do estudo de controle quando a abordagem se dá por variáveis de estado.

Deste modo, pode-se escrever que:

$$\phi(t-t_0)=\mathrm{I}+(t-t_0)A+\frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2+\frac{(t-t_0)^3}{3!}A^3+\cdots+\frac{(t-t_0)^m}{m!}A^m+\cdots \quad (2.257)$$

E para a condição particular onde $t_0=0$, tem-se que:

$$\phi(t)=e^{At}=\mathrm{I}+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\cdots+\frac{t^m}{m!}A^m+\cdots \quad (2.258)$$

Lembra-se que a matriz de transição $\phi(t-t_0)$ guarda importantes propriedades largamente exploradas em literatura específica focando o estudo de controle pelo método de estado.

Considerando-se a equação 2.257, para *A* constante, vem que:

**Propriedade 1 – do argumento nulo**

$$\phi(t_0-t_0)=\phi(0)=\mathrm{I} \quad (2.259)$$

$$\phi(t_0-t_0)=\phi(0)=\mathrm{I}+(t_0-t_0)A+\frac{(t_0-t_0)^2}{2!}A^2+\frac{(t_0-t_0)^3}{3!}A^3+\cdots+\frac{(t_0-t_0)^m}{m!}A^m+\cdots=\mathrm{I}$$

**Propriedade 2 – da transição**

$$\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0)=\phi(t_2-t_0) \quad (2.260)$$

$$\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0)=e^{(t_2-t_1)}e^{(t_1-t_0)}=e^{(t_2-t_1+t_1-t_0)}=e^{(t_2-t_0)}=\phi(t_2-t_0)$$

**Propriedade 3 – comutativa do produto**

$$\phi(t)\phi(\tau)=\phi(\tau)\phi(t) \quad (2.261)$$

As matrizes $\phi(t)$ e $\phi(\tau)$ podem ser representadas a partir da equação recursiva 2.258 da seguinte forma:

$$\phi(t)\phi(\tau)=e^{At}e^{A\tau}=e^{A(t+\tau)}$$

$$\phi(\tau)\phi(t)=e^{A\tau}e^{At}=e^{A(\tau+t)}=e^{A(t+\tau)}$$

**Propriedade 4 – da inversa**

$$\phi^{-1}(t-t_0)=\phi(t_0-t) \quad (2.262)$$

$$\phi^{-1}(t-t_0) = e^{-A(t-t_0)} = e^{A(t_0-t)} = \phi(t_0-t)$$

**Propriedade 5 – da derivada**

$$\frac{d}{dt}\phi(t-t_0) = A\phi(t-t_0) \tag{2.263}$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t-t_0) = \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} = A\phi(t-t_0)$$

**Propriedade 6 – comutativa do produto**

$$A\,\phi(t-t_0) = \phi(t-t_0)A \tag{2.264}$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t-t_0) = \frac{d}{dt}[\mathrm{I} + (t-t_0)A + \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2 + \frac{(t-t_0)^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{(t-t_0)^m}{m!}A^m + \cdots] =$$

$$= A + \frac{2(t-t_0)}{2!}A^2 + \frac{3(t-t_0)^2}{3!}A^3 + \cdots + \frac{m(t-t_0)^{m-1}}{m!}A^m + \frac{(m+1)(t-t_0)^m}{(m+1)!}A^{m+1} + \cdots$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t-t_0) = A + \frac{(t-t_0)}{1!}A^2 + \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}A^m + \frac{(t-t_0)^m}{m!}A^{m+1} + \cdots$$

Nesse ponto do desenvolvimento, pode-se colocar o termo referente à matriz $A$ anteposto ao desenvolvimento quanto posposto ao mesmo desenvolvimento. Sendo assim, a seguinte identidade é obtida dessa condição:

$$\frac{d}{dt}\phi(t-t_0) = A(\mathrm{I} + \frac{(t-t_0)}{1!}A + \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}A^{m-1} + \frac{(t-t_0)^m}{m!}A^m + \cdots) =$$

$$= (\mathrm{I} + \frac{(t-t_0)}{1!}A + \frac{(t-t_0)^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}A^{m-1} + \frac{(t-t_0)^m}{m!}A^m + \cdots)A$$

Finalmente, considerando a equação 2.258:

$$A\,e^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)}A \quad \therefore \quad A\,\phi(t-t_0) = \phi(t-t_0)A$$

---

**<u>EXEMPLO 2.34</u>**

Encontrar a matriz de transição de um sistema cuja equação de estado é a seguinte.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -35 & -12 \end{bmatrix} x$$

Considerar que o tempo de partida seja o instante $t_0 = 0$.

**Solução:**

O método mais prático para a determinação da matriz de transição desse problema será a aplicação direta da fórmula recursiva da equação 2.258 conforme procedimento seguinte:

$$\phi(t) = e^{At} = \mathrm{I} + t\,A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^m}{m!}A^m + \cdots$$

Cálculo das matrizes $A^i$ para $i = 1,2,3,\cdots$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -35 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -35 & -12 \\ 420 & 109 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 420 & 109 \\ -3815 & -888 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -3815 & -888 \\ 31080 & 6841 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

Deste modo tem-se que:

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -35 & -12 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} -35 & -12 \\ 420 & 109 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 420 & 109 \\ -3815 & -888 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{t^4}{4!}\begin{bmatrix} -3815 & -888 \\ 31080 & 6841 \end{bmatrix} + \cdots$$

Promovendo-se a soma de forma a se ter uma única matriz com os elementos somatórios vem:

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} 1-\frac{35\,t^2}{2}+\frac{420\,t^3}{6}-\frac{3815\,t^4}{24}+\ldots & t-\frac{12\,t^2}{2}+\frac{109\,t^3}{6}-\frac{888\,t^4}{24}+\ldots \\ -35\,t+\frac{420\,t^2}{2}-\frac{3815\,t^3}{6}+\frac{31080\,t^4}{24}+\ldots & 1-12t+\frac{109\,t^2}{2}-\frac{888\,t^3}{6}-\frac{6841\,t^4}{24}+\ldots \end{bmatrix}$$

Os somatórios da equação anterior poderão ser aproximados através da série de Maclaurin para as seguintes expressões analíticas:

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(7\,e^{-5t}-5\,e^{-7t}) & \frac{1}{2}(e^{-5t}-e^{-7t}) \\ \frac{35}{2}(-e^{-5t}+e^{-7t}) & \frac{1}{2}(5\,e^{-5t}+7\,e^{-7t}) \end{bmatrix}$$

O procedimento de escolha das combinações exatas das exponenciais que corresponderão perfeitamente a cada uma das somatórias que compõe cada elemento da matriz de transição do problema em questão não é uma coisa aleatória. Essa escolha se baseia em algumas particularidades que devem ser levadas em conta durante o processo. Uma delas é saber que cada uma dessas exponenciais corresponde a uma exponencial do tipo $e^{k_i t}$ e que cada parâmetro $k_i$ está associado a um dos autovalores relativos à matriz $A$ da planta em questão. Em outras palavras, deve-se saber que as trajetórias de estado de qualquer sistema de controle que for analisado pelo crivo da técnica de variáveis de estado dependerão diretamente dos autovalores envolvidos nesse sistema.
Outra particularidade é saber que existe um procedimento específico conhecido como método do polinômio interpolador de Lagrange-Sylvester que se trata de um procedimento específico envolvendo uma fórmula recursiva aplicada a funções ordinárias e que foi estendida a funções matriciais tais como a matriz de transição.

**Nota a respeito do exemplo 2.34:**

Como observação, nota-se que a matriz da planta se encontra numa forma especial conhecida na literatura de controle como matriz na forma companheira. Essa forma de apresentação da matriz da planta permite que se conheça de antemão os coeficientes da equação característica e, por conseguinte, os autovalores.

Seja considerar um sistema genérico regido pela seguinte equação diferencial de ordem $n$:

$$\overset{(n)}{y}(t)+k_{n-1}\overset{(n-1)}{y}(t)+k_{n-2}\overset{(n-2)}{y}(t)+\ldots+k_0\,y(t)=m_0\,u(t) \qquad (2.265)$$

A seguir é apresentada uma matriz $A$ correspondente a planta do sistema regido pela equação anterior disposta segundo a sua forma companheira:

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.266}$$

É apresentada a seguir a fórmula recursiva da equação 2.267 que permite a obtenção direta da função analítica da matriz de transição, considerando-se um sistema cuja matriz $A$ da planta é de ordem $n$, em função dos autovalores associados, $\lambda_i$ para $i = 1,2,3,\cdots n$.

Para maiores detalhes consultar literatura específica aplicada a sistemas cuja ordem de dificuldade vai aumentando, casos em que se envolva com autovalores repetidos, por exemplo.

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1 \mathrm{I})(A-\lambda_2 \mathrm{I})\,(A-\lambda_3 \mathrm{I})\cdots(A-\lambda_{i-1} \mathrm{I})(A-\lambda_{i+1} \mathrm{I})\cdots(A-\lambda_n \mathrm{I})}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)(\lambda_i-\lambda_3)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)}\, e^{\lambda_i t} \tag{2.267}$$

Para o exemplo atualmente em questão, primeiramente se deve calcular os autovalores associados. Assim, tem-se que:

$$[S\mathrm{I}-A] = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 35 & S+12 \end{bmatrix} = S(S+12)+35 = S^2+12S+35$$

Cuja solução conduz aos seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -7 \qquad \lambda_2 = -5$$

Aplicando, diretamente, a fórmula da equação 2.265 para os dois autovalores distintos vêm que:

$$\phi(t) = \frac{(A-\lambda_{i+1}\mathrm{I})}{(\lambda_i-\lambda_{i+1})} e^{\lambda_i t} + \frac{(A-\lambda_i \mathrm{I})}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)} e^{\lambda_{i+1} t} = \frac{[A-(-7)\mathrm{I}]}{-5-(-7)} e^{-5t} + \frac{[A-(-5)\mathrm{I}]}{-7-(-5)} e^{-7t} =$$
$$= \frac{1}{2}[A+7\mathrm{I}]\, e^{-5t} - \frac{1}{2}[A+5\mathrm{I}]\, e^{-7t}$$

As operações com os termos em $A$ são as seguintes:

$$A+7\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -35 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A+5\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -35 & -7 \end{bmatrix}$$

Logo, obtém-se o resultado esperado que já havia sido conseguido anteriormente por intermédio de outros métodos.

$$\phi(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7 & 1\\ -35 & -5\end{bmatrix}e^{-5t}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -35 & -7\end{bmatrix}e^{-7t}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(7e^{-5t}-5e^{-7t}) & \frac{1}{2}(e^{-5t}-e^{-7t})\\ \frac{35}{2}(-e^{-5t}+e^{-7t}) & \frac{1}{2}(5e^{-5t}+7e^{-7t})\end{bmatrix}$$

---

## 2.2.12. Exercícios Propostos

**1.** Encontrar a solução completa da seguinte equação diferencial de primeira ordem, no domínio do tempo, pelo método clássico:

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=sin(10t)$$

**2.** Encontrar a solução da equação diferencial de Euler-Cauchy seguinte, onde $g(x)$ é uma função qualquer:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=g(x)$$

**3.** Sabendo-se que a decomposição em série de Fourier da função $f(\theta)$ é representada pela seguinte equação:

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,cosn\theta+b_n\,sen\,n\theta]$$

onde os termos $a_0, a_n$ e $b_n$ são dados pelas seguintes expressões:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)cos(n\theta)d\theta$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)sin(n\theta)d\theta$$

provar a seguinte expressão que é conhecida como identidade de Parseval:

$$\frac{2}{T}\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt=\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n{}^2+b_n{}^2]$$

onde $\theta = \omega t$ com $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $\therefore$ $\theta = \dfrac{2\pi}{T}t$ sendo $T$ o período considerado e $t$ a variável independente tempo.

**4.** Encontrar o valor pontual das seguintes funções, cujos gráficos se encontram representados na figura seguinte, para $\theta = \pi$ :

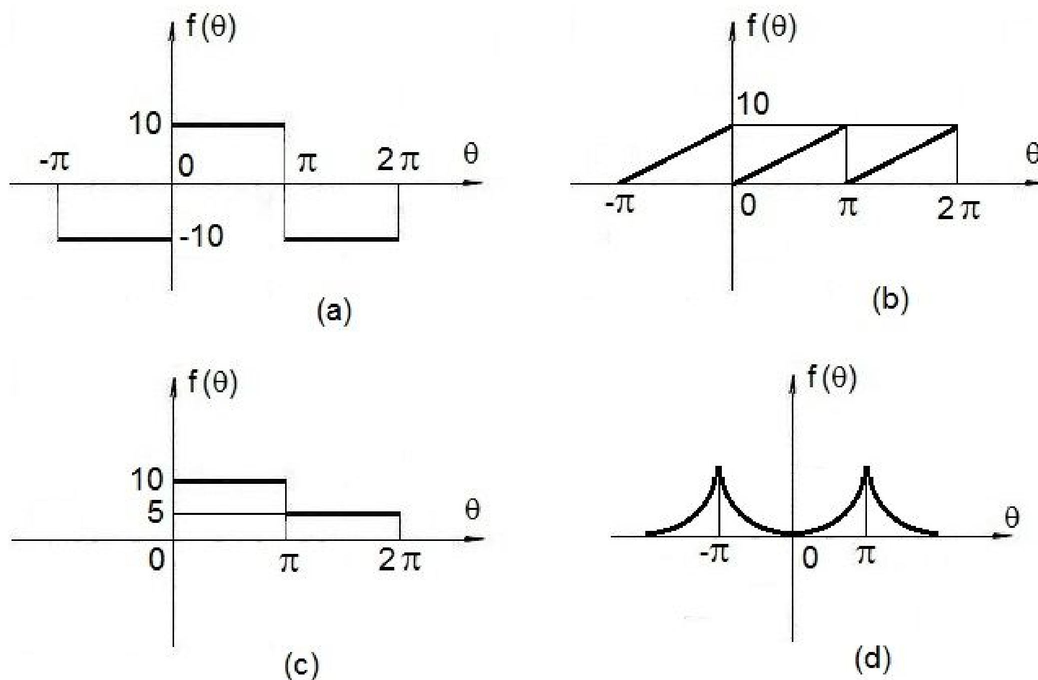



***Figura 2.70 – Funções do Exercício 4***

**5.** Sabendo que a função parábola com vértice na origem pode ser representada na forma de uma série trigonométrica de Fourier, de período $2\pi$ , no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ , pela expressão seguinte, pede-se esboçar o gráfico do espectro de freqüência desta mesma função:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$$

Nota: ver a figura 2.3 relativa ao exemplo 2.7.

**6.** Encontrar a transformada de Fourier das seguintes funções:

a) $f(t) = 1$ no intervalo $-k < t < +k$ e $f(t) = 0$ fora desse intervalo;

b) $f(t) = e^{-\alpha t}$ para $t > 0$ e $f(t) = 0$ para $t < 0$.

onde $\alpha$ é um número real.

**7.** Sabendo-se que a transformada de Fourier de uma função $f(t)$ é dada pela equação 2.41, reescrita a seguir,

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

provar que:

se a função $f(t)$ for uma função real e apresentar a condição de simetria par a sua transformada de Fourier será sempre uma função no campo dos números reais;

e, se a função  for uma função real e apresentar a condição de simetria ímpar a sua transformada de Fourier será sempre uma função no campo dos números imaginários puros.

**Nota:** observar que a expressão da transformada de Fourier para o primeiro caso, quando a condição de simetria for par, determina o que é chamado na teoria de transformada infinita de Fourier em co-seno; e que a expressão da transformada de Fourier para o segundo caso, quando a condição de simetria for ímpar, determina o que é chamado na teoria de transformada infinita de Fourier em seno.

**8.** Encontrar a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = \dfrac{sin\,\omega t}{\omega}$

b) $f(t) = cos\,\omega t$

c) $f(t) = \dfrac{sin\,h\,\omega t}{\omega}$ onde $sin\,h\,\omega t$ é o seno hiperbólico de $\omega t$

d) $f(t) = cosh\,\omega t$ onde $cosh\,\omega t$ é o co-seno hiperbólico de $\omega t$

e) $f(t) = \dfrac{e^{\sigma t} \sin \omega t}{\omega}$

**9.** Encontrar a transformada de Laplace da conhecida função delta de Dirac representada graficamente pela figura 2.71, seguinte:

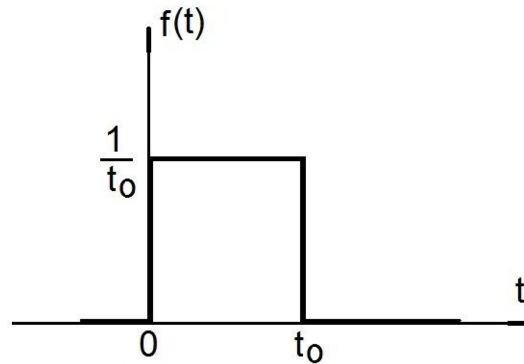



***Figura 2.71 – Função Delta de Dirac***

**Nota:** observar que, conforme $t_0$ vai tendendo a zero, a função $f(t)$ começa a tender para valores infinitos, porém a área sob a curva continuará valendo uma unidade de medida. Para $t_0 = 0$, a função $f(t)$ torna-se nula, porém ainda com uma área, teoricamente unitária.

**10.** Encontrar a transformada de Laplace da função representada graficamente pela figura 2.72, seguinte:

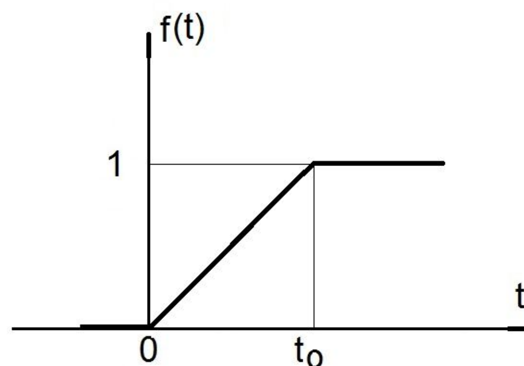



***Figura 2.72 – Função Rampa Limitada***

**11.** Encontrar a anti-transformada de Laplace das seguintes funções complexas, sendo $k$ é uma constante:

a) $F(S) = \dfrac{S^3 - 4S}{(S^2 + 4)^4}$

b) $F(S) = \dfrac{S}{(S^2 - 3)^3}$

c) $F(S) = \dfrac{S^4 - 96S^2 + 256}{(S^2 + 16)^4}$

d) $F(S) = \dfrac{S^2}{S^2 - 9}$

e) $F(S) = \dfrac{S^3}{(S^2 - 25)^2}$

**12.** Considerando-se a figura 2.16, que representa o esquema elétrico de um circuito RC-Série, se a tensão sobre a resistência *R* fosse tomada como resposta de saída do sistema, calcular:

a) a resposta no domínio do tempo, mostrando posteriormente o gráfico de registro através de simulação computacional;

b) a resposta no domínio da freqüência apresentando os gráficos de ganho e fase conhecidos como curvas de Bode.

**13.** Elaborar um diagrama em blocos, no plano complexo, de um dispositivo de servomecanismo, na forma de um sistema de controle automático, que contenha as seguintes características:

a) um controlador na forma de um bloco do tipo proporcional-integral puro, de primeira ordem, cuja entrada apresenta um comparador de sinais;

b) o comparador, nesta entrada, deve comparar o sinal de realimentação do processo com um sinal de referência fixo;

c) um processo consistindo de um sistema com uma constante de tempo de atraso de $10\,s$, sistema em primeira ordem, com um delay de resposta na função de transferência de $0{,}2\,s$;

d) uma realimentação unitária do processo.

Promover a variação do valor do delay entre *0,2s* e *10s* procurando analisar as respostas obtidas. Como sugestão, utilizar para tal um aplicativo de simulação do sistema no plano complexo.

**Nota:** observar que os termos proporcional, integral e derivativo ou PID, como se vê na literatura e campos do controle automático, se referem às características proporcional, atraso e avanço, respectivamente.
Os termos primeira, segunda, terceira, etc., ordens se referem à ordem da equação diferencial originária que representa a função física em questão.
O termo delay se refere a um retardo, uma função não linear do tipo *hard*.

**14.** Desenvolver um diagrama em blocos, também no plano complexo, de um dispositivo de servomecanismo, na forma de um sistema de controle automático, que contenha as seguintes características:

a) um controlador na forma de um bloco do tipo filtro passa-baixa de primeira ordem, com um ganho de canal direto de $3\ V/V$ e constante de tempo de $10\,s$, cuja entrada apresente um comparador de sinais;

b) o comparador, nesta entrada, deve comparar o sinal de realimentação do processo com um sinal de referência fixo;

c) um processo consistindo de um sistema do tipo integrador puro na sua função de transferência;

d) uma realimentação unitária do processo.

**Nota:** observar que o ganho de canal direto foi expresso em unidades do sistema MKS, ou seja, *V/V* ou então Volt por Volt. Não raro, esse valor de ganho é entendido como sendo o ganho em corrente contínua ou ganho CC do bloco em questão.

# CAPÍTULO 3

# CONTROLE E REGULAÇÃO DA TURBINA HIDRÁULICA

## 3.1. Geral

A palavra regulação significa controlar algo e, num sentido mais estrito, controlar automaticamente algo ou algum mecanismo de forma estável.
A finalidade essencial de um sistema de regulação de velocidade para uma turbina hidráulica é manter a rotação desta num valor pré-determinado chamado valor nominal ou valor de referência.
Antigamente era utilizado, como regulador de velocidade, um volante acoplado ao eixo da turbina a ser regulada o que era suficiente para absorver as possíveis oscilações que viessem a ocorrer. Nesta época, porém, as máquinas eram pequenas e praticamente não havia sistema de controle mais complexo e nem operação interligada. Esse volante, conhecido como volante de inércia, também tinha a função de permitir que um sistema externo de frenagem, a base de sapatas, fosse utilizado nas máquinas de eixo horizontal.
Com o avanço tecnológico, o porte das máquinas foi aumentando em face da necessidade da demanda exigida pelo crescimento dos sistemas de potência, fato que culminou com a conseguinte evolução e melhoria do controle de velocidade dos órgãos motrizes de energia primária. Em resumo, o controle de velocidade passou a ser primordial como se pode comprovar nos dias atuais. O controle da velocidade de rotação mecânica dos órgãos motrizes significa o controle da freqüência da máquina elétrica acoplada a estes órgãos, isso se refere tanto à freqüência mecânica quanto à freqüência elétrica aqui envolvidas.
Isso explica a extraordinária evolução verificada nos projetos de grupos reguladores de velocidade de turbinas hidráulicas passando dos simples volantes de inércia aos modernos e sofisticados sistemas reguladores eletrônico-hidráulicos de tecnologia digital.
Através deste processo de evolução, a qualidade da resposta global do regulador foi melhorada tornando-se, deste modo, mais confiável o comportamento operativo do sistema autocontrolado.
Para que essa resposta fosse então adequada e aceitável, considerando-se um sistema complexo de regulação, uma série de ajustes e condições tornou-se necessário e preponderante.
Quanto maior o porte de uma máquina, relativamente ao porte do sistema a que ela se encontra acoplada, mais complexo será o sistema de controle de velocidade. Uma máquina pequena, operando normalmente em rede isolada, com uma carga local, exigirá um sistema regulador da turbina mais simples que aquela máquina de porte que exige comandos automáticos de geração, de operação do sistema e de extra-operação transitória. Esses são fatores que determinam e definem atribuições vinculadas ao regulador de velocidade.
Na realidade, um regulador de velocidade assume importantes funções no comando operativo de uma central hidrelétrica. Além da regulação de velocidade propriamente dita, no regulador de velocidade são definidos o

controle e regulação de potência ativa mecânica proveniente do órgão motriz, no caso a turbina hidráulica, as operações de limitação de carga ou carregamento, o controle de carga *versus* velocidade, a repartição de carga entre geradores síncronos operando em paralelo, além do estabelecimento de condições de partida e parada. Também parece ser desnecessário lembrar que o regulador de velocidade de uma turbina nada mais é que um regulador automático de velocidade angular do conjunto mecânico girante e que, ao se prestar à regulação de velocidade, automaticamente e implicitamente, ele se presta à regulação da freqüência da máquina elétrica acoplada e da própria rede elétrica, sob certos aspectos. Não seria, porém, impróprio se referir ao dispositivo como regulador de freqüência, mas por questões técnicas, neste trabalho, a designação adotada foi a de regulador de velocidade, mesmo em se sabendo que existem outras denominações, tais como regulador da turbina, regulador hidráulico de velocidade, regulador PID de velocidade, regulador de potência, controlador de potência, etc.. Existe também o fato de os nomes estarem associados a diferentes gerações de reguladores de modo que se fazem diferenciar os reguladores mecânico-hidráulicos, eletro-hidráulicos, eletrônico-hidráulicos de tecnologia analógica, eletrônico-hidráulicos de tecnologia digital e até os eletrônico-hidráulicos de tecnologia híbrida.
Percebe-se então, num primeiro momento, que o regulador de velocidade reúne e coordena importantes comandos da máquina, de modo centralizado, tornando-se um importante órgão de controle.
Tendo em vista as dificuldades que o tema detém, bem como as dificuldades envolvidas no trato de assuntos ligados a ensaios e ajustes de campo, esse capítulo terá como principal objetivo reunir os aspectos da regulação de velocidade de turbinas hidráulicas numa abordagem teórica. A idéia é partir de demonstrações e deduções no nível teórico focando a análise através da modelagem, tanto do plano temporal quanto no plano complexo, relativa às funções que são observadas no processo.
Ao mesmo tempo, exemplos práticos com modelagens validadas através de ensaios de campo farão parte do corpo de exercícios e problemas tanto resolvidos quanto a resolver.

## 3.2. Estudo do Movimento dos Líquidos

Para o estudo a ser desenvolvido nesta seção, será considerada a teoria da coluna rígida com as equações do movimento de Euler para líquidos incompressíveis.
Seja a figura 3.1 seguinte onde se encontra representado um elemento infinitesimal do fluido em movimento, numa tubulação hidráulica, com a linha média do percurso tracejada tomada como referência. O elemento considerado trata-se de um cilindro o que concorda com a grande maioria da forma geométrica das tubulações adutoras conhecidas na prática. Deste modo, passa-se a adotar uma concordância entre a linha média do percurso do fluido com a geratriz do cilindro.

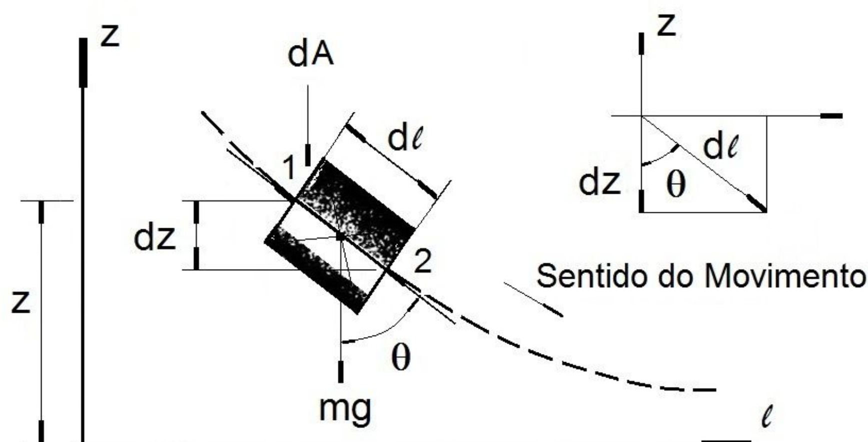



***Figura 3.1 – Movimento de um Elemento Infinitesimal de um Líquido***

Pela aplicação segunda lei de Newton ao movimento do sistema, sendo $F_{\ell}$ a resultante das forças na direção $\ell$.

Sendo o líquido a água, considerar a seguinte legenda para a figura 3.1:

$\ell$: segmento da tubulação adutora
*A:* área da seção transversal da tubulação adutora
*Vol :* volume de água contido no segmento
$\upsilon$*:* velocidade de escoamento tangente à linha média (*)
$\rho$*:* massa específica da água
$\mathcal{P}$*:* pressão sobre um elemento de volume provocada pela coluna de água
*z :* altura de cota no ponto
$\theta$: ângulo de tangência do movimento com a linha média
*g :* aceleração da gravidade (*g = 9,81 m/s²*)

(*) Como observação, vale lembrar que, a partir desse ponto, nesse subitem apenas, as grandezas dependentes do tempo serão representadas sem a descrição *(t)* no sentido de tornar menos complicadas as expressões matemáticas. Quando for necessária a apresentação da grandeza independente, o tempo ou qualquer outra variável, a respectiva descrição será aplicada.

A pressão no ponto *1* será $\mathcal{P}_1$ e a pressão no ponto *2* será $\mathcal{P}_2$. A resultante das forças $F_{\ell}$, devido à ação das pressões entre os pontos *1* e *2* e o peso do elemento de volume de água, será:

$$F_{\ell} = m\frac{d\upsilon}{dt} \tag{3.1}$$

$$F_\ell = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)dA - mg\,cos\theta$$

Considerando-se que:

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = -d\mathcal{P} \quad \text{e} \quad cos\,\theta = \frac{\partial z}{\partial \ell}$$

tem-se que

$$F_\ell = -d\mathcal{P}\,dA - \rho g\,d(Vol)\frac{\partial z}{\partial \ell}$$

onde $m = \rho\,d(Vol)$

Pela equação 3.1 vem que:

$$-\,d\mathcal{P}\,dA - \rho g\,d(Vol)\frac{\partial z}{\partial \ell} = \rho d(Vol)\frac{d\upsilon}{dt} \qquad (3.2)$$

Dividindo-se a equação 3.2 por $\rho\,d(Vol)$ vem que:

$$-\frac{1}{\rho\,d(Vol)}d\mathcal{P}\,dA - g\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Mas como $d(Vol) = d\ell\,dA$, a equação anterior tomará o seguinte aspecto:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} - g\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (3.3)$$

Sabe-se que a velocidade do fluido, no caso a água, trata-se de uma função de várias variáveis dependendo basicamente da distância e do tempo, ou melhor:

$$\upsilon = f(\ell, t)$$

Assim, pode-se escrever que:

$$d\upsilon = \frac{\partial \upsilon}{\partial \ell}d\ell + \frac{\partial \upsilon}{\partial t}dt$$

Ou então que:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\ell}{dt}\frac{\partial \upsilon}{\partial \ell} + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial \ell} + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \qquad \therefore \qquad \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon^2}{\partial \ell} + \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$$

Levado a expressão $\frac{d\upsilon}{dt}$ anterior na equação 3.3 tem-se que:

$$-\frac{l}{\rho}-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}-g\frac{\partial z}{\partial \ell}=\frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon^2}{\partial \ell}+\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$$

Ou melhor

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial \upsilon^2}{\partial \ell}+\frac{1}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}+\frac{\partial z}{\partial \ell}=0$$

Considerando-se o regime permanente de escoamento onde $\frac{\partial v}{\partial t}=0$, vem que:

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial \upsilon^2}{\partial \ell}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell}+\frac{\partial z}{\partial \ell}=0 \qquad (3.4)$$

onde $\gamma = g\rho$ é o peso específico da massa de água

A equação 3.4 é conhecida como equação da continuidade de Euler e tem a característica básica de trabalhar com os valores de pressão e de velocidade pontuais em cada instante de tempo ao longo da linha de deslocamento do fluido, deslocamento esse sujeito apenas à força de gravidade, linha esta concordante com a geratriz do segmento da tubulação adutora.

Eliminando a diferencial $\partial \ell$ e integrando a equação 3.4 obtém-se:

$$\left[\frac{\upsilon^2}{2g}\right]_{\upsilon 1}^{\upsilon 2}+\left[\frac{1}{\gamma}\mathcal{P}\right]_{\mathcal{P}1}^{\mathcal{P}2}+\left[z\right]_{z1}^{z2}=0$$

Ou melhor

$$\frac{\upsilon_2^2}{2g}+\frac{1}{\gamma}\mathcal{P}_2+z_2=\frac{\upsilon_1^2}{2g}+\frac{1}{\gamma}\mathcal{P}_1+z_1=h \qquad (3.5)$$

A equação 3.5 é conhecida como equação de Bernoulli e reúne os efeitos das energias cinética, de pressão e potencial que atuam sobre um determinado ponto do escoamento. A equação de Bernoulli está associada à condição hidrodinâmica do movimento em que não haja perdas de carga. Trata-se de uma condição ideal onde é suposta a conservação de energia.

A figura 3.2 mostra o efeito de cada uma das parcelas da equação de Bernoulli considerando-se a água como um fluido incompressível.

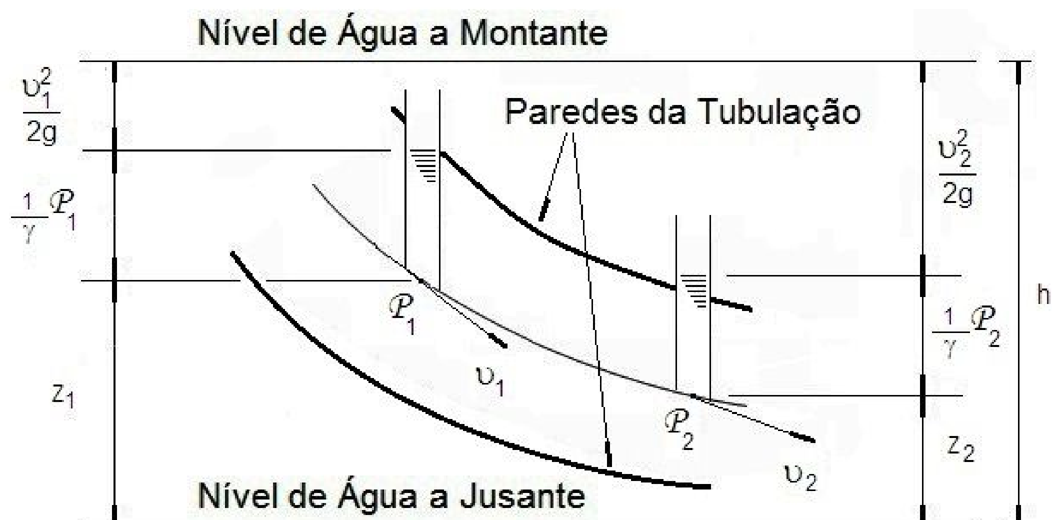



*Figura 3.2 – Esquema Representativo da Equação de Bernoulli*

## 3.3. Equação da Tubulação Adutora

O comportamento operativo de uma turbina hidráulica, caso do presente estudo, depende tanto da inércia da água como dos efeitos de compressibilidade da água e de elasticidade das paredes da tubulação adutora.
O efeito inerente à inércia provoca atrasos na resposta temporal da malha de regulação de velocidade enquanto a elasticidade da tubulação provoca o aparecimento de ondas de pressão e de fluxo que, no caso de tubulações longas, são extremamente danosas podendo fazer aparecer violentas perturbações hidráulicas de características destrutivas.
Visando um estudo completo, serão equacionados estes efeitos em dois tipos de análise sob o ponto de vista elástico, quando a tubulação for muito longa, e sob o ponto inelástico, quando a tubulação for curta.

### 3.3.1. Efeito da Elasticidade na Tubulação

Para a realização do estudo, será considerado um trecho da tubulação elástica como está mostrado na figura 3.3.

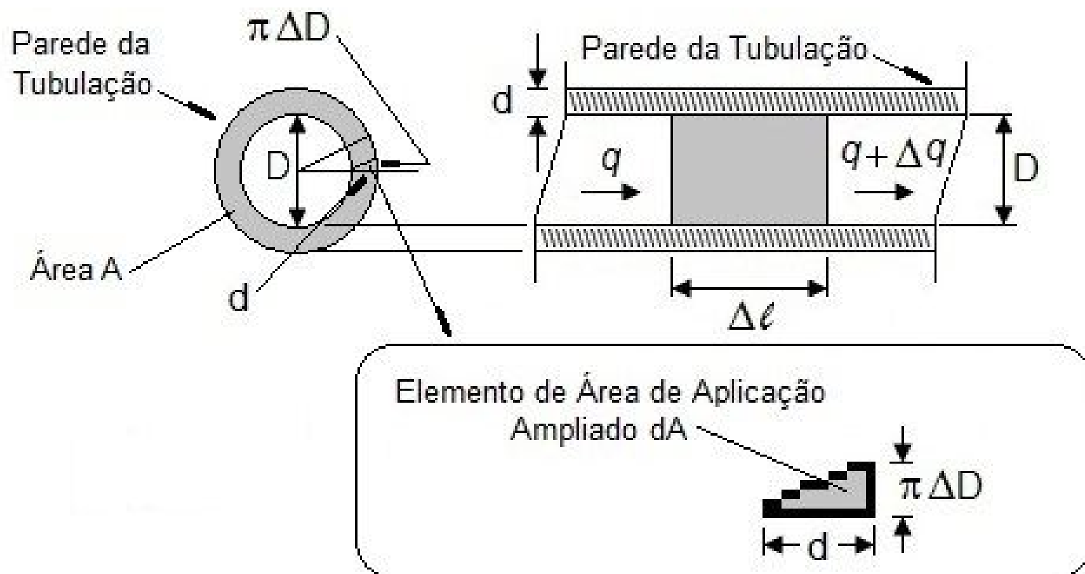



***Figura 3.3 – Corte na Tubulação Adutora***

Na figura 3.3 considerar a seguinte legenda:

$\Delta\ell$ : *comprimento do trecho da tubulação*
*d : espessura da tubulação*
*D : diâmetro interno da tubulação*
*q : vazão da água na tubulação*

Deverá ser observado o efeito da variação da vazão de saída do setor pela dilatação ou contração da tubulação.

O volume de água contido no setor da tubulação de comprimento $\Delta\ell$ é dado pela conhecida fórmula $Vol = \frac{\pi}{4} D^2 \Delta\ell$.
A variação do volume dentro do setor, em função da variação do diâmetro por efeito pela dilatação, será dada por:

$$\frac{\partial Vol}{\partial D} = \frac{\Delta Vol}{\Delta D} = \frac{2\pi}{4} D\,\Delta\ell = \frac{\pi}{2} D\,\Delta\ell \quad \therefore \quad \Delta Vol = \frac{\pi}{2}\, D\,\Delta\ell\,\Delta D$$

Aplicando a teoria desenvolvida na experiência de Young, ou seja, a fórmula do módulo de elasticidade de materiais, tem-se que:

$$E = \frac{F_e}{dA} \tag{3.6}$$

onde

$F_e$ : resultante das forças de elasticidade

$E$ : módulo de elasticidade do material que compõe a tubulação

$dA$ : elemento de área de aplicação

Levando-se em conta a figura 3.3, e considerando-se a força de pressão da água agindo sobre a parede da tubulação, na direção perpendicular a secção desta e provocando uma pequena deformação no perímetro circular, a equação 3.6 tomará o seguinte aspecto:

$$E = \frac{\Delta\mathcal{P}\,\pi\,\frac{D^2}{4}}{dA} = \frac{\Delta\mathcal{P}\,\pi\,\frac{D^2}{4}}{\frac{1}{2}d\,\pi\Delta D} \quad \therefore \quad \Delta D = \frac{\Delta\mathcal{P}\,D^2}{2\,dE}$$

Como já foi calculada, previamente, a variação do volume dentro do setor, tem-se que:

$$\Delta V = \frac{\pi}{2} D\,\Delta\ell\,\Delta D = \frac{\pi}{2} D\,\Delta\ell\,\frac{\Delta\mathcal{P}\,D^2}{2\,dE}$$

Ou melhor

$$\Delta V = \frac{\pi}{4} D^3 \frac{\Delta\ell}{dE} \Delta\mathcal{P} \tag{3.7}$$

Deverá ser observado agora o efeito da variação da vazão de saída do setor por ação da compressão e descompressão do volume de água da tubulação.

$$K = \frac{F_c}{dA'} \tag{3.8}$$

onde

$F_c$ : resultante das forças de compressão

$K$ : módulo de compressibilidade do material que compõe a tubulação

$dA'$ : elemento de área de aplicação

Tem-se a seguinte relação entre a variação do volume $\Delta Vol'$ por ação do efeito de compressibilidade do volume de água e a área $dA'$ de aplicação:

$$dA' = \frac{\Delta Vol'}{\Delta\ell}$$

Considerando-se que a força de ação sobre a compressão ou descompressão seja a mesma que aquela atuante em função da diferença de pressão dentro do setor indicado vem que a equação 3.8 poderá ser assim reescrita:

Assim

$$K = \Delta\mathcal{P}\frac{\pi D^2}{4}\frac{1}{\frac{\Delta Vol'}{\Delta\ell}} = \frac{\pi D^2}{4}\frac{\Delta\ell}{\Delta Vol'}\Delta\mathcal{P}$$

Ou melhor

$$\Delta Vol' = \frac{\pi}{4}D^2\frac{\Delta\ell}{K}\Delta\mathcal{P} \qquad (3.9)$$

A equação 3.7 representa a variação do volume, no segmento elementar selecionado para o estudo, devido ao efeito da elasticidade da tubulação enquanto a equação 3.9 representa a variação do volume de água, no trecho da tubulação, devida à compressibilidade do volume de água dentro do setor.
Conseqüentemente, a uma variação de volume ocorrerá uma variação da massa de água dentro do trecho considerado da tubulação o que permite escrever:

$$\Delta m = \rho\left(\Delta Vol' + \Delta Vol\right)$$

Trazendo-se, na equação anterior, os valores $\Delta Vol$ e $\Delta Vol'$, das equações 3.7 e 3.9, para uma variação do volume de água no trecho da tubulação, num tempo $\Delta t$, vem que:

$$\Delta m = \rho\frac{\pi D^2}{4}\Delta\ell\left[\frac{1}{K} + \frac{D}{dE}\right]\Delta\mathcal{P} \qquad (3.10)$$

Mas $\Delta m = \rho(Vol_{entrada} - Vol_{saída}) = [\rho q - \rho(\Delta q + q)]\Delta t$, onde se considerou uma vazão $q$ e uma variação de vazão $\Delta q$ dentro de um intervalo de tempo $\Delta t$.

Assim, escreve-se que:

$$\Delta m = -\rho\,\Delta q\,\Delta t \qquad (3.11)$$

Logo, das equações 3.10 e 3.11, obtém-se:

$$\frac{\Delta q}{\Delta\ell} = -A\left[\frac{1}{K} + \frac{D}{dE}\right]\frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta t} \qquad (3.12)$$

onde $A = \frac{\pi D^2}{4}$ é a área da tubulação transversal ao fluxo de água

Ainda da equação 3.3, pode-se tirar a seguinte relação:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} - q\frac{\partial z}{\partial \ell}$$

Sabe-se que $q = \upsilon A$ é a vazão de água na tubulação adutora escoando através da seção $A$ fixa.

Assim

$$\frac{dq}{dt} = A\frac{d\upsilon}{dt} \tag{3.13}$$

Sendo ainda $\mathcal{P} = \rho g\,(h - z)$ pode-se obter:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} = \rho g\left[\frac{\partial h}{\partial \ell} - \frac{\partial z}{\partial \ell}\right] \tag{3.14}$$

onde

$h$ : queda útil disponível
$z$ : altura da cota de carga

Levando-se os valores obtidos nas equações 3.13 e 3.14 na equação 3.3 vem:

$$\frac{1}{A}\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho}\rho g\left[\frac{\partial h}{\partial \ell} - \frac{\partial z}{\partial \ell}\right] - g\frac{\partial z}{\partial \ell}$$

Ou melhor

$$\frac{dq}{dt} = -Ag\frac{\partial h}{\partial \ell} \tag{3.15}$$

A equação 3.12 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\Delta q}{\Delta \ell} = -A\left[\frac{1}{K} + \frac{D}{dE}\right]\rho g\frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Sendo $\mu = \left[\frac{1}{K} + \frac{D}{dE}\right]\rho g$ e fazendo-se que na equação precedente as variações $\Delta\ell$ e $\Delta t$ tendam a zero vem:

$$\lim_{\Delta\ell \to 0}\left[\frac{\Delta q}{\Delta \ell}\right] = -\mu s \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta h}{\Delta t}\right] \quad \therefore \quad \frac{\partial q}{\partial \ell} = -A\mu\frac{dh}{dt} \tag{3.16}$$

Colocando-se as equações 3.15 e 3.16 em uma forma mais adequada vem:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} h(t,\ell) = -\frac{1}{Ag} \frac{\partial}{\partial t} q(t,\ell)$$

$$\frac{\partial}{\partial \ell} q(t,\ell) = -A\mu \frac{\partial}{\partial t} h(t,\ell)$$

Passando-se ambas as equações precedentes para o domínio da transformada de Laplace vem:

$$\frac{\partial h}{\partial \ell}(S,\ell) = -\frac{S}{Ag} q(S,\ell) \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \ell}(S,\ell) = -A\mu S\, h(S,\ell) \tag{3.18}$$

onde $S$ a variável da transformada de Laplace

Expressando de maneira simplificada, tem-se que:

$$\frac{\partial h}{\partial \ell} = -\frac{S}{Ag} q \quad \therefore \quad \frac{\partial q}{\partial \ell} = -\frac{Ag}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2}$$

Mas como pela equação 3.18, simplificadamente, $\frac{\partial q}{\partial \ell} = -A\mu Sh$ tem-se que:

$$-\frac{Ag}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} = -A\mu Sh \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} - \frac{\mu}{g} S^2 h = 0$$

A solução da equação diferencial anterior na variável $\ell$ será do tipo:

$$h(S,\ell) = k_1\, e^{(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S)\ell} + k_2\, e^{-(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S)\ell} \tag{3.19}$$

Na equação 3.19 os parâmetros $k_1$ e $k_2$ deverão ser calculados em função das condições de contorno oferecidas pelo problema.

De posse da solução $h(S,\ell)$, da equação 3.19, voltando a considerar que $\frac{\partial q}{\partial \ell} = -A\mu Sh$, através da integração seguinte chega-se a expressão de $q(S,\ell)$.

Senão veja-se:

$$q(S,\ell) = -A\mu S\int h(S,\ell)\,d\ell = -A\mu S\int [k_1\, e^{(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S)\ell} + k_2\, e^{-(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S)\ell}]\,d\ell$$

$$q(S,\ell) = k_3\, e^{\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\ell} + k_4\, e^{-\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\ell} \qquad (3.20)$$

onde $k_3 = -A\sqrt{g\mu}\, A$ e $k_4 = A\sqrt{g\mu}\, B$

Ou então, em função dos parâmetros $k_1$ e $k_2$:

$$q(S,\ell) = A\sqrt{g\,\mu}\left[-k_1\, e^{\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\ell} + k_2\, e^{-\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\ell}\right]$$

Também aqui os parâmetros $k_3$ e $k_4$ dependem de condições de contorno.

Como observação, lembrar que a razão da integração direta feita anteriormente para a obtenção da expressão de $q(S,\ell)$ se deve ao fato de se estar trabalhando com equações diferenciais homogêneas.

Para as condições de contorno, serão consideradas as seguintes situações: primeiramente supondo-se que as válvulas de entrada de água para a turbina – a partir daqui chamadas de palhetas diretrizes da turbina ou simplesmente palhetas do distribuidor da turbina – estejam na cota $\ell = 0$ e que a comporta de tomada de água da instalação hidráulica esteja na cota $\ell = -\lambda$, de onde se pressupõe que $h(S,-\lambda) = 0$, considerando-se na equação 3.19 essa condição que na realidade significa não haver queda útil nesse ponto.

Ainda considerando-se a equação 3.19 anterior, de maneira estendida, tem-se que:

$$h(S,-\lambda) = 0 = k_1\, e^{-(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S)\lambda} + k_2\, e^{(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S)\lambda}$$

o que permite obter-se:

$$k_2 = -k_1\, e^{-2(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\lambda)} \qquad (3.21)$$

Considerando-se agora a equação 3.20 anterior, de maneira estendida, tem-se que:

$$q(S,0) = A\sqrt{g\,\mu}\,[-k_1 + k_2]$$

Trazendo-se na equação anterior a expressão de $k_2$ da equação 3.21 vem que:

$$q(S,0) = -A\sqrt{g\mu}\,k_1\,[1 + e^{-2(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\lambda)}] \tag{3.22}$$

Como o que se deseja é a obtenção da função de transferência da tubulação adutora, no plano complexo da variável de Laplace, na região próxima às palhetas, a função de transferência da tubulação será dada em função das variáveis $h(S,0)$ e $q(S,0)$ na forma da relação apresentada na equação 3.23 seguinte. Tais variáveis representam os valores pontuais, respectivamente, da queda útil e da vazão vistas da posição da turbina, aqui suposta trabalhando na situação de afogada em relação ao nível do canal de fuga da instalação.

$$F_{tubulação}\,(S) = \frac{h(S,0)}{q(S,0)} \tag{3.23}$$

Ainda pelas equações 3.19 e 3.21, obtém-se que:

$$h(S,0) = k_1 + k_2 = k_1 + \left[-k_1\,e^{-2(\sqrt{\frac{\mu}{g}})S\lambda}\right] = k_1\left[1 - e^{-2(\sqrt{\frac{\mu}{g}})S\lambda}\right]$$

Assim, a função de transferência da tubulação, para o ponto próximo às palhetas da turbina, será:

$$\frac{h(S,0)}{q(S,0)} = \frac{k_1\left[1 - e^{-2(\sqrt{\frac{\mu}{g}})S\lambda}\right]}{-A\sqrt{g\mu}\,k_1\,[1 + e^{-2(\sqrt{\frac{\mu}{g}}S\lambda)}]} = -\frac{1 - e^{-2T_E S}}{A\,g\mu\,(1 + e^{-2T_E S})}$$

Ou melhor

$$\frac{h(S)}{q(S)} = -Z'_S\,\frac{1 - e^{-2T_E S}}{1 + e^{-2T_E S}} \tag{3.24}$$

onde $T_E = \sqrt{\frac{\mu}{g}}\,\lambda$ e $Z'_S = \frac{1}{A\sqrt{g\,\mu}}$

Deve-se observar que na equação 3.24, precedente, são definidos dois parâmetros. O primeiro parâmetro $T_E$ apresenta a dimensão de tempo, geralmente em *s*, enquanto que o segundo $Z'_S$ apresenta a dimensão de comprimento por volume, geralmente em $\frac{m}{m^3/s}$. Esse último parâmetro acabou sendo denominado de impedância mecânica de surtos em termos de analogia com um circuito elétrico.

Considerando uma base de valores onde $H_0$ é o valor nominal da queda útil e $Q_0$ é o valor nominal da vazão da turbina, a plena carga, e multiplicando membro a membro da equação 3.24 pela relação $\frac{Q_0}{H_0}$ tem-se que:

$$\frac{h(S)/H_0}{q(S)/Q_0} = \frac{Q_0}{H_0 A\sqrt{g\mu}}\;\frac{1-e^{-2T_E S}}{1+e^{-2T_E S}}$$

ou finalmente

$$\frac{h_u(S)}{q_u(S)} = -Z_S\,\frac{1-e^{-2T_E S}}{1+e^{-2T_E S}} \qquad \text{em pu/pu}^{1} \qquad (3.25)$$

Na equação 3.25 considerar:

$$Z_S = \frac{Q_0}{H_0 A\sqrt{g\mu}}$$

Para efeito de caracterização de parâmetros, pode-se afirmar que:

$Z_S$ : impedância de surtos da tubulação em pu
$T_E$ : tempo de propagação da onda de pressão na tubulação

[1] Valor em por unidade ou pu também conhecido como valor normalizado a partir de uma base de valores previamente escolhida. Nesse livro, as variáveis em pu aparecerão indicadas com a letra *u*.

As relações precedentes permitem que se defina a chamada constante de inércia da água, $T_W$, na tubulação adutora e conduto forçado, um importante parâmetro no estudo para a composição e definição da função de transferência do sistema hidromecânico referente à turbina hidráulica. Segue-se o procedimento de cálculo:

$$T_W = Z_S T_E \quad \therefore \quad T_W = \frac{Q_0 L}{H_0 A g} \tag{3.26}$$

Considerando o caso prático onde se verifica uma tubulação genérica de adução para a alimentação de uma turbina hidráulica, pode-se trocar a relação $\frac{L}{A}$, da equação 3.26, comprimento da tubulação pela área transversal ao fluxo de água, por $\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{A_i}$ que representa a somatória de todos os $n$ trechos retilíneos das virolas que formam o perfil da tubulação adutora e do conduto forçado, assim como são construídos na prática.

Deste modo tem-se que:

$$T_W = \frac{Q_0}{H_0 g} \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{A_i} \tag{3.27}$$

Em tempo, vale observar que o parâmetro $T_W$, da equação 3.26, trata-se de uma constante de tempo de modo que a sua dimensão é de tempo sendo geralmente dado em $s$. Já o parâmetro $Z_S$, a partir da equação 3.26 já normalizada, também se encontra normalizado na base de valores que já deve ter sido escolhida previamente ao cálculo.

## 3.3.2. Efeito da Inelasticidade na Tubulação

Para o caso particular em que não se considera nem a elasticidade das paredes da tubulação nem a compressibilidade da água, o tratamento adotado para a obtenção da função de transferência de uma tubulação hidráulica é mais simplificado. Tal situação pode ser verificada em sistemas compostos de tubulações consideradas curtas. Na prática, diz-se que tubulações cujo comprimento é inferior a $90\,m$ podem ser enquadradas nesse caso específico.

No equacionamento básico, basta utilizar a equação da continuidade de Euler que está resumida na equação 3.15 e que fornece:

$$\frac{dq}{dt} = -Ag\frac{\partial h}{\partial \ell} \quad \therefore \quad \partial h = -\frac{1}{Ag}\frac{dq}{dt}\partial \ell$$

Integrando a equação anterior na variável $\partial\ell$ ou $d\ell$, e considerando como variáveis o comprimento da tubulação adutora e conduto forçado bem como a secção transversal relativa a cada ponto dessa tubulação, tem-se que:

$$\int_{H_0}^{h} dh = -\int_0^{\lambda} \left(\frac{1}{Ag}\frac{dq}{dt}\right) d\ell = -\frac{1}{g}\frac{dq}{dt}\int_0^{\lambda}\left(\frac{1}{A}\frac{dq}{dt}\right) d\ell$$

Assim vem que:

$$h - H_0 = -\frac{1}{g}\frac{dq}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i}{A_i}$$

Buscando-se colocar as variáveis em pu, na base estipulada previamente, vem:

$$\frac{h - H_0}{H_0} = -\frac{1}{g H_0} Q_0 \frac{d}{dt}(q / Q_0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i}{A_i}$$

$$\Delta h_u = -\frac{Q_0}{g H_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i}{A_i}\frac{dq_u}{dt} \qquad (3.28)$$

Como $\frac{dq_u}{dt} = \frac{d}{dt}(\Delta q_u)$ e sabendo-se, da expressão de $T_W$ da equação 3.27, a expressão 3.28 tomará a seguinte forma:

$$T_W \frac{d}{dt}\Delta q_U + \Delta h_U = 0 \qquad (3.29)$$

onde

$T_W$ : constante de inércia da água
$\Delta q_U$ : variação da vazão
$\Delta h_U$ : variação da altura de carga

Passando-se a equação 3.29 para o domínio da transformada de Laplace vem:

$$T_W\, S\, \Delta q_u(S) + \Delta h_u(S) = 0$$

ou ainda:

$$\frac{\Delta h_U(S)}{\Delta q_U(S)} = -T_W\, S \qquad (3.30)$$

A equação 2.30, obtida a partir da condição de inelasticidade da tubulação hidráulica, reúne os efeitos permanentes e transitórios da coluna de água canalizada desde a tomada de água até a entrada da turbina onde se encontram as palhetas do regulador de velocidade, órgão que será o responsável pelo controle automático da potência a ser gerada em dado momento.

---

## EXEMPLO 3.1

Mostrar, na equação 3.24 anterior, repetida a seguir, que os parâmetros $Z'_S$ e $T_E$ representam a impedância de surtos da tubulação e o tempo de uma onda harmônica de pressão, tomando-se como base de estudo a teoria de linhas de transmissão na qual a tensão e a corrente elétrica correspondem, respectivamente, a queda e a vazão, numa posição tal que depende tanto do tempo quanto da distância ao longo da linha de transmissão.

$$\frac{h(S)}{q(S)} = -Z'_S \frac{1 - e^{-2T_E S}}{1 + e^{-2T_E S}}$$

Onde, por sugestão no sistema MKS,

$$T_E = \sqrt{\frac{\mu}{g}}\lambda \text{ em s}$$

$$Z'_S = \frac{1}{A\sqrt{\mu g}} \text{ em m/m}^3\text{/s}$$

**Solução:**

A referência 21 traz um modelo de desenvolvimento aplicado a linhas de transmissão que será utilizado, preferencialmente, na solução desse exemplo particular.
A questão aqui será trabalhar com a analogia entre o processo de transmissão de energia elétrica, através de uma linha de transmissão, com o processo de escoamento através de uma tubulação hidráulica.
A análise matemática se fará com a ajuda das equações diferenciais das linhas de transmissão aplicando-se o conceito de ondas viajantes.

Basicamente, será suposto um esquema para uma linha de transmissão padrão conforme mostrado na figura 3.4.

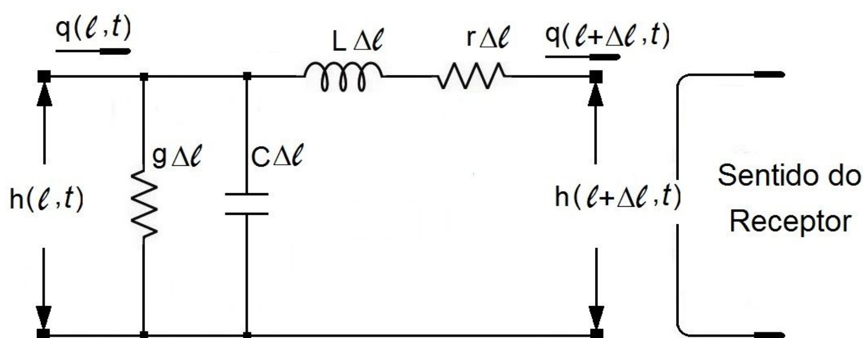



***Figura 3.4 – Circuito Equivalente Elementar de uma Linha de Transmissão***

Na figura 3.4 considerar a seguinte legenda:

$\ell$: segmento de comprimento

$\Delta\ell$: elemento de comprimento infinitesiamal

$h$: tensão na linha de transmissão ou altura da coluna de água

$q$: corrente na linha de transmissão ou vazão na tubulação

$r$: resistência na linha de transmissão por comprimento

$L$: indutância na linha de transmissão por comprimento

$g$ : condutância na linha de transmissão por comprimento

$C$: resistência na linha de transmissão por comprimento

Uma boa suposição, no sentido de dar solução ao presente problema, é considerar que a vazão de um fluido, geralmente a água, ao longo de uma tubulação seguida do conduto forçado complementar – o que está sendo considerado aqui é uma turbina hidráulica – se comporte de modo análogo àquele verificado com a corrente elétrica ao longo de uma linha de transmissão.

Se na linha de transmissão, as grandezas tensão e corrente são normalmente representadas por dois fasores, de mesma natureza, porém com amplitude e fase diferentes, também na dinâmica do escoamento da água através da tubulação se dará a mesma coisa, ou seja, a queda e vazão de água também serão representadas por intermédio de dois fasores.

Assim como na linha de transmissão, na dinâmica do escoamento de água não serão consideradas as perdas ao longo do processo.

Imaginando-se uma linha de transmissão regida pelo seguinte par de fasores principais de tensão e corrente, vem que:

$$h = H \sin \omega t \qquad (3.31)$$

e

$$q = Q\ sin(\omega t + \phi) \tag{3.32}$$

onde

$H$ : amplitude do fasor tensão ou altura da coluna de água

$Q$: amplitude do fasor corrente ou vazão de água

$\omega$ : freqüência de oscilação dos sinais harmônicos

$\phi$: defasamento entre os sinais de tensão e corrente

$t$: variável independente tempo

Considerando o elemento de linha mostrado na figura 3.4, podem-se escrever as seguintes equações do tipo diferença para as variáveis das equações 3.31 e 3.32, respectivamente de tensão/queda e corrente/vazão, em função de um deslocamento $\Delta\ell$:

$$-\Delta h = (r\,\Delta\ell)\,q + (L\,\Delta\ell)\frac{\partial q}{\partial t} \tag{3.33}$$

$$-\Delta q = (r\,\Delta\ell)\,h + (L\,\Delta\ell)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{3.34}$$

Evidentemente que o sinal negativo, em ambas as equações anteriores, tem a ver com a idéia de que há uma diminuição tanto da tensão quanto da corrente com a distância ao longo da linha de transmissão. Esse fato também ocorrerá, evidentemente, com a queda e a vazão de água ao longo do percurso da tubulação em função da suposição de que há um efeito de elasticidade das paredes da tubulação agindo simultaneamente com o efeito de compressibilidade volumétrica da água.

A partir das equações anteriores, considerando o procedimento de linearização num ponto determinado, pode-se escrever que:

$$-\frac{\Delta h}{\Delta\ell} = r\,q + L\,\frac{\partial q}{\partial t} \quad \therefore \quad -\frac{\partial h}{\partial\ell} = r\,q + L\,\frac{\partial q}{\partial t} \tag{3.35}$$

$$-\frac{\Delta q}{\Delta\ell} = g\,h + C\,\frac{\partial h}{\partial t} \quad \therefore \quad -\frac{\partial q}{\partial\ell} = g\,h + C\,\frac{\partial h}{\partial t} \tag{3.36}$$

Lembrar que, nas equações anteriores 3.35 e 3.36, as variáveis de estado $\Delta h$ e $\Delta q$ são dependentes tanto da distância $\ell$ quanto do tempo $t$.

Derivando-se a equação 3.35, em relação a $\ell$, e a equação 3.36, em relação a $t$, vem que:

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} = r\,\frac{\partial q}{\partial \ell} + L\,\frac{\partial^2 q}{\partial t\,\partial \ell} \tag{3.37}$$

$$-\frac{\partial^2 q}{\partial \ell\,\partial t} = g\,\frac{\partial h}{\partial t} + C\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \tag{3.38}$$

Derivando-se a equação 3.35, em relação a $t$, e a equação 3.36, em relação a $\ell$, vem que:

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial \ell\,\partial t} = r\,\frac{\partial q}{\partial t} + L\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \tag{3.39}$$

$$-\frac{\partial^2 q}{\partial \ell^2} = g\,\frac{\partial h}{\partial \ell} + L\,\frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial \ell} \tag{3.40}$$

Sendo que $\frac{\partial^2 h}{\partial \ell\,\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial \ell}$ e $\frac{\partial^2 q}{\partial \ell\,\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial t\,\partial \ell}$, das equações 3.37 e 3.38 vem que:

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} = r\,\frac{\partial q}{\partial \ell} + L\,(-g\frac{\partial h}{\partial t} - C\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}) \;\therefore\; \frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} = Lg\frac{\partial h}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - r\frac{\partial q}{\partial \ell} \tag{3.41}$$

Com semelhante raciocínio, das equações 3.39 e 3.40 seria obtido que:

$$-\frac{\partial^2 q}{\partial \ell^2} = g\frac{\partial h}{\partial \ell} + C\,(-r\frac{\partial q}{\partial t} - L\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}) \;\therefore\; \frac{\partial^2 q}{\partial \ell^2} = rC\frac{\partial q}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - g\frac{\partial h}{\partial \ell} \tag{3.42}$$

Entre as equações 3.36 e 3.41, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} = Lg\frac{\partial h}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - r\,(-g\,h - C\,\frac{\partial h}{\partial t}) \;\therefore\; \frac{\partial^2 h}{\partial \ell^2} = r\,g\,h + (rC + Lg)\frac{\partial h}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \tag{3.43}$$

Entre as equações 3.35 e 3.42, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \ell^2} = Cr\frac{\partial q}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - g\,(-r\,q - L\,\frac{\partial q}{\partial t}) \;\therefore\; \frac{\partial^2 q}{\partial \ell^2} = r\,g\,q + (rC + Lg)\frac{\partial q}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \tag{3.44}$$

As equações 3.43 e 3.44 são conhecidas na física como equações das ondas e podem representar o movimento de ondas de pressão dentro de uma tubulação, ao longo de uma linha que pode coincidir com a geratriz desse perfil, com uma velocidade $\upsilon$.

Usando a notação fasorial para as variáveis de estado $h$ e $q$, aproveitando das equações 3.31 e 3.32, tem-se que:

$$h = H \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{H}(s,\ell) = H e^{j\omega t} \tag{3.45}$$

e

$$q = Q \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}(S,\ell) = Q\, e^{j(\omega t + \phi)} \tag{3.46}$$

Neste ponto é feita a suposição de que as ondas viajantes, dentro de uma tubulação hidráulica, se movimentam segundo as regras da teoria de propagação de ondas numa freqüência constante $\omega$, por exemplo, em *rad/s*.

Lembrar que os fasores $H$ e $Q$ têm, a partir daqui, sua dependência implícita, para efeito de simplificação algébrica, e que essa dependência se dá em função do tempo $t$ e da distância $\ell$.

Aplicando-se a equação 3.45 na equação 3.43 vem:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial \ell^2} = r\,g\,\dot{H} + (rC + Lg)\frac{\partial \dot{H}}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial t^2} \tag{3.47}$$

Agora, aplicando-se a equação 3.46 na equação 3.44 vem:

$$\frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial \ell^2} = r\,g\,\dot{Q} + (rC + Lg)\frac{\partial \dot{Q}}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial t^2} \tag{3.48}$$

Trabalhando com a variável complexa de Laplace $S = j\omega$, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial t} = S\dot{H} = j\omega \dot{H} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial t^2} = S^2\,\dot{H} = -\omega^2\,\dot{H}$$

e

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial t} = S\dot{Q} = j\omega \dot{Q} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial t^2} = S^2\,\dot{Q} = -\omega^2\,\dot{Q}$$

Assim, as equações 3.47 e 3.48 ficam da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial \ell^2} = [r\,g + (rC + Lg)(j\omega) - LC\omega^2\,]\dot{H} \quad (3.49)$$

Agora, aplicando-se a equação 3.46 na equação 3.44 vem:

$$\frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial \ell^2} = [r\,g + (rC + Lg)(j\omega) - LC\omega^2\,]\dot{Q} \quad (3.50)$$

Nas equações 3.49 e 3.50, pode-se efetuar a seguinte comparação algébrica:

$$r\,g + (rC + Lg)(j\omega) - LC\omega^2 \equiv (r + j\omega L)(g + j\omega C)$$

com

$\dot{Z} = (r + j\omega L)$ e $\dot{Y} = (g + j\omega C)$

Com isso, as equações 3.49 e 3.50 ficam do seguinte modo:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial \ell^2} = \dot{Z}\dot{Y}\,\dot{H} \quad (3.51)$$

e

$$\frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial \ell^2} = \dot{Z}\dot{Y}\,\dot{Q} \quad (3.52)$$

Como as equações 3.51 e 3.52 se trata de equações diferenciais homogêneas elas admitem soluções na variável $\ell$.

Tomando-se o operador diferencial $\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial \ell}$ vem que:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial \ell^2} - \dot{Z}\dot{Y}\,\dot{H} = 0 \quad \therefore \quad (\mathcal{D}^2 - \dot{Z}\dot{Y})\dot{H} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial \ell^2} - \dot{Z}\dot{Y}\,\dot{Q} = 0 \quad \therefore \quad (\mathcal{D}^2 - \dot{Z}\dot{Y})\dot{Q} = 0$$

As soluções das equações anteriores serão do seguinte tipo:

$$\dot{H} = \dot{A}_1\, e^{\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} + \dot{A}_2\, e^{-\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} \quad (3.53)$$

e

$$\dot{Q} = \dot{A}_3\, e^{\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} + \dot{A}_4\, e^{-\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} \qquad (3.54)$$

Os parâmetros $\dot{A}_1$ e $\dot{A}_2$ deverão ser obtidos a partir de condições de contorno.

Com as equações até aqui apresentadas, não se consegue encontrar uma relação entre os parâmetros complexos $\dot{A}_1$ e $\dot{A}_3$ e $\dot{A}_2$ e $\dot{A}_4$ de modo a facilitar futuras operações matemáticas.
Ao se buscar outra equação, que não seja uma relação linearmente dependente das equações anteriores, depara-se, por analogia, com a teoria das linhas de transmissão cujo raciocínio analógico é aplicável.
Na teoria de linhas de transmissão existe o conceito de impedância de surtos ou impedância natural definida como a relação $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ que se trata de um parâmetro fundamental de grande utilidade.
Agora, existe também a impedância $\dot{Z}$, um parâmetro comum já definido anteriormente, considerando-se qualquer ponto ao longo da linha de transmissão, representando um valor ôhmico por unidade de comprimento. A relação é simples sendo apresentada a seguir:

$$-\Delta\dot{H} = (\Delta\ell\,\dot{Z})\Delta\dot{Q} \qquad (3.55)$$

onde $\dot{Z}$ pode ser dado, por exemplo, em $ohm/Km$.

O sinal negativo da equação 3.55, assim como já foi comentado antes, tem a ver com a idéia de que há uma diminuição da tensão, aqui representada por $\Delta\dot{H}$, com a distância ao longo da linha de transmissão, lembrando que anteriormente $\dot{Z} = (r + j\omega L)$.

Considerando-se para a variação de corrente elétrica que $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}$, a equação 3.55 pode ser assim reescrita:

$$-\frac{\Delta\dot{H}}{\Delta\ell} = \dot{Z}\dot{Q} \quad \therefore \quad -\frac{\partial\dot{H}}{\partial\ell} = \dot{Z}\dot{Q} \quad \therefore \quad -\dot{Q} = \frac{1}{\dot{Z}}\frac{\partial\dot{H}}{\partial\ell} \qquad (3.56)$$

Trazendo-se, da equação 3.53, a expressão do fasor $\dot{H}$ na equação 3.56, obtém-se que:

$$-\dot{Q} = \frac{1}{\dot{Z}}\frac{\partial}{\partial\ell}[\dot{A}_1\, e^{\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} + \dot{A}_2\, e^{-\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell}]$$

Finalmente

$$-\dot{Q} = \sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}}\dot{A}_1\, e^{\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} - \sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}}\dot{A}_2\, e^{-\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}\,\ell} \qquad (3.57)$$

Tem-se, portanto, o par de equações formado pelas equações 3.53 e 3.57 que será básico na solução do problema atual.

Agora, existem duas importantes relações que devem ser levadas em consideração. São elas $\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}$ e $\sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}}$.

A segunda relação foi denominada de impedância de surtos, porém nada foi comprovado ainda nesse sentido não se passando apenas de uma alusão. Quanto à primeira relação nada ainda foi citado.

Sabe-se que $\dot{Z} = (r + j\omega L)$ e $\dot{Y} = (g + j\omega C)$ representam os parâmetros básicos, impedância e admitância, de uma linha de transmissão padrão aqui adotada para o estudo. Em geral, nas chamadas linhas de transmissão reais, os parâmetros resistência $r$ condutância $g$ são desprezíveis, em termos de valores ôhmicos, face à reatância indutiva $j\omega L$ e a reatância capacitiva $j\omega C$ da linha, respectivamente.

Deste modo, haverá uma simplificação nos parâmetros $\dot{Z}$ $e$ $\dot{Y}$ ficando como $\dot{Z} = j\omega L$ $e$ $\dot{Y} = j\omega C$.

Considerando que o plano complexo de Laplace, onde $S = j\omega$, com $r = 0$ e $g = 0$, tem-se que:

$$\dot{Z} = SL \qquad (3.58)$$

e

$$\dot{Y} = SC \qquad (3.59)$$

Com tais simplificações, as seguintes relações ficam do seguinte modo:

$$\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}} = S\sqrt{LC} \qquad (3.60)$$

e

$$\sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{L/C}} = \frac{1}{Z_0} \qquad (3.61)$$

A relação equação 3.61 já foi mencionada anteriormente e tem correspondência com a citada impedância de surtos da linha de transmissão. Convém lembrar que a expressão impedância de surtos, na realidade, é associada ao estudo das linhas de transmissão, sendo, portanto de origem elétrica.
A idéia de associação com a hidráulica, ou mais precisamente com a dinâmica do movimento dos fluidos, é apenas analógica e tem como motivação facilitar a análise.

Observa-se também que o parâmetro $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ é, por sua característica, independente da distância, fato que o torna uma característica.

Deste modo, repetindo-se as equações 3.53 e 3.57, anteriores, tem-se que:

$$\dot{H}(S,\ell) = \dot{A}_1 e^{\sqrt{LC}\,S\ell} + \dot{A}_2 e^{-\sqrt{LC}\,S\ell} \qquad (3.62)$$

e

$$-\dot{Q}(S,\ell) = \frac{1}{Z_0}\dot{A}_1 e^{\sqrt{LC}\,S\ell} - \frac{1}{Z_0}\dot{A}_2 e^{-\sqrt{LC}\,S\ell} \qquad (3.63)$$

Para que se determine a relação entre as constantes complexas $\dot{A}_1$ e $\dot{A}_2$ torna-se necessário que se lance mão das condições de contorno do problema. A figura 3.5 mostra o esboço do problema em dois pontos principais, na cota de tomada de água, ponto mais elevado, e na cota no ponto de afogamento da turbina, na região das palhetas diretrizes, ponto mais baixo, em função da distância $\ell$.

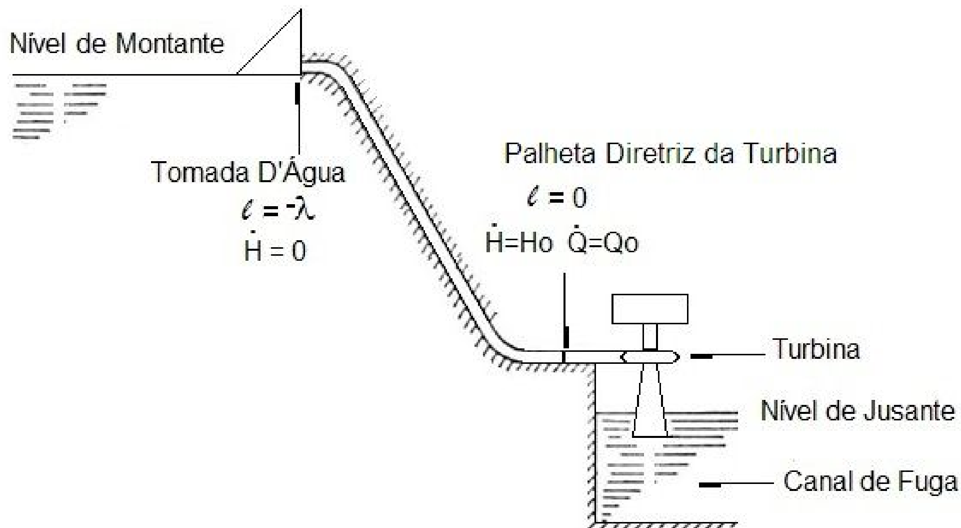



***Figura 3.5 – Esquema Básico da Tubulação Hidráulica com Turbina e Tomada de Água***

A idéia principal é deixar as duas equações básicas 3.62 e 3.63 em função apenas da constante complexa $\dot{A}_1$ de modo a facilitar a sua eliminação quando da obtenção da função de transferência no plano complexo da própria tubulação.

Deste modo, será tomada como referência a condição correspondente à cota de montante onde se definiram os seguintes valores $\ell = -\lambda$ e $\dot{H} = 0$.
Notar que estando na cota de montante, teoricamente o mesmo nível da tomada de água, entende-se que a queda útil é nula.

Assim, a partir da equação 3.62, vem que:

$$\dot{H}(S,-\lambda) = \dot{A}_1 e^{-\sqrt{LC}\,S\lambda} + \dot{A}_2 e^{\sqrt{LC}\,S\lambda} = 0$$

Conseqüentemente:

$$\dot{A}_2 = -\dot{A}_1 e^{-2\sqrt{LC}\,S\lambda} \tag{3.64}$$

Com a expressão da equação 3.64, as equações 3.62 3.63 tomam o seguinte aspecto:

$$\dot{H}(S,\ell) = \dot{A}_1 e^{\sqrt{LC}\,S\ell} + (-\dot{A}_1 e^{-2\sqrt{LC}\,S\lambda} e^{-\sqrt{LC}\,S\ell}) \tag{3.65}$$

e

$$-\dot{Q}(S,\ell) = \frac{1}{Z_0}\dot{A}_1 e^{\sqrt{LC}\,S\ell} - \frac{1}{Z_0}(-\dot{A}_1 e^{-2\sqrt{LC}\,S\lambda})e^{-\sqrt{LC}\,S\ell} \tag{3.66}$$

A função de transferência procurada da tubulação se refere ao seguinte ponto, conforme ficou definido na equação 3.23 anterior, para $\ell = 0$, já se levando em consideração as equações 3.65 e 3.66 anteriores:

$$F_{tubulação}\ (S) = \frac{\dot{H}(S,0)}{-\dot{Q}(S,0)} = \frac{\dot{A}_1 - \dot{A}_1 e^{-2\sqrt{LC}\,S\lambda}}{\frac{1}{Z_0}\dot{A}_1 + \frac{1}{Z_0}\dot{A}_1 e^{-2\sqrt{LC}\,S\lambda}}$$

Simplificando-se a equação anterior, obtém-se:

$$F_{tubulação}\ (S) = \frac{\dot{H}(S,0)}{\dot{Q}(S,0)} = \frac{\dot{H}(S)}{\dot{Q}(S)} = -Z_0 \frac{1 - e^{-2\sqrt{LC}\,\lambda S}}{1 + e^{-2\sqrt{LC}\,\lambda S}} \tag{3.67}$$

**Nota a respeito do exemplo 3.1:**

A equação 3.67 merece uma análise mais acurada em relação a cada um de seus parâmetros.
Primeiramente, observa-se o sinal negativo mostrando que o ganho da função de transferência da tubulação, aqui em analogia com a queda de tensão numa linha de transmissão em relação à corrente circulante, trata-se de um ganho negativo. O módulo do ganho nas baixas freqüências tem a característica de uma impedância e esse parâmetro é a impedância de surtos da linha aqui representada por $Z_0$.
O parâmetro $\sqrt{LC}\,\lambda$ tem a dimensão de tempo, mas que tempo seria esse? Para tal, sabe-se da teoria das linhas de transmissão que uma onda eletromagnética, na forma de um sinal harmônico do tipo apresentado anteriormente nas equações 3.31 e 3.32, tem um período de propagação que nada mais é que o inverso da sua freqüência. Também é bem sabido da mesma teoria que a velocidade de propagação da onda eletromagnética, através da linha, é um valor constante, aqui designado por $\upsilon$; o mesmo fica valendo para a propagação da onda de pressão dentro de uma tubulação hidráulica.

Sabendo-se, da teoria das ondas, que a velocidade de propagação da onda eletromagnética é dada por $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{\lambda}{t_\ell}$, onde $t_\ell$ é tempo de propagação da onda no meio e $\lambda$ é o comprimento da tubulação percorrido pela mesma, vem que:

$$t_\ell = \lambda\sqrt{LC} \tag{3.68}$$

Assim, com essa nova definição do tempo de propagação da onda, a função de transferência da tubulação e conduto forçado, em analogia com o processo de propagação das ondas eletromagnéticas numa linha de transmissão, toma o seguinte aspecto:

$$F_{tubulação}\,(S) = \frac{\dot{H}(S)}{\dot{Q}(S)} = -Z_0\,\frac{1-e^{-2T_E S}}{1+e^{-2T_E S}} \tag{3.69}$$

onde $T_E = t_\ell = \sqrt{LC}\,\lambda$, em $s$, por exemplo.

Assim, percebe-se que numa tubulação hidráulica, considerando-se o comprimento total que vai da comporta de tomada d'água até a entrada de água na turbina, localização das palhetas diretrizes, o tempo de propagação da onda de pressão corresponderá ao comprimento da tubulação pela velocidade da onda viajante dentro dessa tubulação.

Outra observação sobre a questão dos efeitos da elasticidade das paredes de uma tubulação hidráulica e da compressibilidade volumétrica da água é a forma como a função de transferência dessa tubulação se apresentou após todo o

processo dedutivo em função das considerações feitas. Para tal, vide equação 3.69. O que se nota é presença de duas funções do tipo *delay*, no plano complexo.

---

## EXEMPLO 3.2

A partir do que foi expresso através da equação 3.69, equação da função de transferência da tubulação hidráulica, quando foi feita uma comparação direta entre o fluxo de corrente através de uma linha de transmissão e o fluxo de água através de uma tubulação, encontrar as expressões para os parâmetros indutância mecânica $L$ e capacitância mecânica $C$, ambos ligados à tubulação, em função dos parâmetros associados a essa tubulação.

**Solução:**

Durante o desenvolvimento matemático, visando encontrar a função de transferência de uma tubulação hidráulica de alimentação de água para uma turbina, no qual foram levados em conta os efeitos da elasticidade das paredes da tubulação e da compressibilidade volumétrica da água ali contida, o que se obteve em termos de função de transferência foi a equação 3.24, apresentada no enunciado da questão do exemplo 3.1.

O que se pode concluir é que, na equação 3.69, anterior, são as seguintes as expressões para o tempo $T_E$, de propagação da onda no meio, e para a impedância $Z_0$, de surtos da tubulação, ambos os parâmetros em perfeita associação e analogia com os respectivos parâmetros verificados na teoria de linhas de transmissão:

$$T_E = \sqrt{\frac{\mu}{g}}\,\lambda \tag{3.70}$$

e

$$Z_0 = \frac{1}{A\sqrt{\mu g}} \tag{3.71}$$

onde $\dfrac{\mu}{g} = \left[\dfrac{1}{K} + \dfrac{D}{dE}\right]\rho$ e $\mu g = \left[\dfrac{1}{K} + \dfrac{D}{dE}\right]\rho g^2$

Podem-se obter as seguintes igualdades a partir da comparação dos parâmetros:

$$T_E = \sqrt{\frac{\mu}{g}}\,\lambda = \sqrt{LC}\,\lambda \quad \therefore \quad \sqrt{\frac{\mu}{g}} = \sqrt{LC} \quad \therefore \quad LC = \frac{\mu}{g} \tag{3.72}$$

e

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{A\sqrt{\mu g}} \quad \therefore \quad \frac{L}{C} = \frac{1}{A^2\,\mu g} \tag{3.73}$$

De maneira direta, a partir das equações 3.72 e 3.73, finalmente, têm-se as expressões para os parâmetros indutância mecânica $L$ e capacitância mecânica $C$, ambos ligados à tubulação em função dos parâmetros associados a essa tubulação. :

$$L = \frac{1}{Ag} \tag{3.74}$$

$$C = \mu A \tag{3.75}$$

Assim, pode-se afirmar que, em termos de analogia, a dinâmica operativa em regime permanente de um sistema hidráulico composto de uma tubulação adutora e seu correspondente conduto forçado, conduzindo um fluxo de um determinado fluido, no caso a água, considerados os agentes passivos do processo, é análoga à dinâmica operativa, sob o mesmo regime, de uma linha de transmissão onde a corrente elétrica corresponde à vazão enquanto que a tensão corresponde à queda líquida útil, grandezas essas variantes com o tempo e com a distância ao longo da linha da geratriz do conduto. Os parâmetros indutância mecânica $L$ e capacitância mecânica $C$, da tubulação hidráulica, dados pelas equações 3.74 e 3.75, são elementos característicos que dependem unicamente da geometria e do material empregado na fabricação do sistema de virolas da tubulação e das características próprias do fluido, no caso presente a água.

---

## 3.4. Equações da Turbina Hidráulica

A turbina hidráulica é o órgão motriz primordial sendo o agente sobre o qual convergem todos os controles primários da energia que alimenta o sistema de potência.

Ela trabalha convertendo energia cinética, de pressão e potencial, em torque mecânico e, por conseguinte, em potencia motriz.

Para o equacionamento será considerado um tipo genérico de turbina hidráulica próximo à turbina tipo Francis uma vez que o tipo de turbina determina o tipo de regulação de velocidade como será mostrado mais adiante.

A característica operativa funcional de uma turbina se apresenta conforme determinadas relações entre certas grandezas geralmente fornecidas por fabricantes durante ensaios com modelo reduzido.
Tais relações são também obtidas por intermédio de gráficos que têm o aspecto mostrado na figura 3.6 e recebem o nome de diagrama de colina da turbina hidráulica.

Nesses gráficos pode-se identificar um local operativo nominal, determinado por uma região no espaço delimitado e composto pela interseção das grandezas envolvidas, que é chamado região de operação em regime permanente.
Esta região vem ligada ao ponto de operação para qual uma determinada turbina foi projetada.

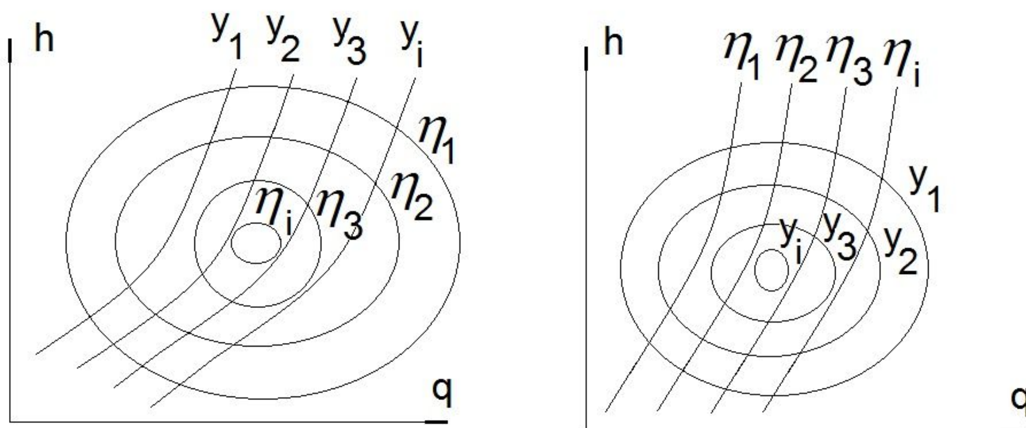



***Figura 3.6 – Curvas de Colina Típicas para uma Turbina Hidráulica em Função de seus Parâmetros Principais***

A relação entre as diferentes variáveis de estado, associadas ao ponto de trabalho de uma turbina hidráulica genérica, considerando-se duas aplicações matemáticas específicas $f$ e $g$, pode ser equacionada do modo seguinte:

$$q = f\,(h,\omega,y) \qquad (3.76)$$

$$p = g\,(h,\omega,q) \qquad (3.77)$$

onde

$q$ : vazão através da turbina

$h$ : altura de carga

$\omega$ : rotação da turbina

$y$ : abertura das palhetas diretrizes ou curso do distribuidor

$p$: potência útil entrega à turbina

$\eta$ : rendimento do processo

Tomando-se incrementos na forma de diferenciais parciais, bem próximos à região de operação descrita anteriormente, vem, para as equações 3.76 e 3.77, o seguinte desenvolvimento:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial h} dh + \frac{\partial q}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial q}{\partial y} dy \quad (3.78)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial h} dh + \frac{\partial p}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial p}{\partial q} dq \quad (3.79)$$

Como é de interesse se trabalhar com valores em pu, as variáveis das equações anteriores serão referidas ao sistema cuja base de valores é a seguinte:

$Q_0$ : vazão nominal através da turbina
$H_0$ : altura nominal de queda útil
$\omega_0$ : rotação nominal da turbina
$P_0$ *:* potência útil relativa a queda útil $H_0$ entrega à turbina
$Y_0$ : abertura das palhetas diretrizes ou curso do distribuidor relativo à potência $P_0$

Podem-se escrever os seguintes valores diferenciais das grandezas já em pu:

$$\Delta q_u = \frac{q - Q_0}{Q_0} = \frac{\Delta q}{Q_0} \quad \therefore \quad \Delta q = Q_0 \, \Delta q_u \quad (3.80)$$

$$\Delta h_u = \frac{h - H_0}{H_0} = \frac{\Delta h}{H_0} \quad \therefore \quad \Delta h = H_0 \, \Delta h_u \quad (3.81)$$

$$\Delta \omega_u = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad \therefore \quad \Delta \omega = \omega_0 \, \Delta \omega_u \quad (3.82)$$

$$\Delta y_u = \frac{y - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta y}{Y_0} \quad \therefore \quad \Delta y = Y_0 \, \Delta y_u \quad (3.83)$$

$$\Delta p_u = \frac{p - P_0}{P_0} = \frac{\Delta p}{P_0} \quad \therefore \quad \Delta p = P_0 \, \Delta p_u \quad (3.84)$$

As equações 3.78 e 3.79 permitem que se escreva a seguinte mudança, utilizando o recurso da integração:

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial q}{\partial \omega}\Delta \omega + \frac{\partial q}{\partial y}\Delta y \tag{3.85}$$

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial p}{\partial \omega}\Delta \omega + \frac{\partial p}{\partial q}\Delta Q \tag{3.86}$$

As equações anteriores, pela substituição das diferenciais das equações 3.80 a 3.84, tomam o seguinte aspecto:

$$Q_0\ \Delta q_u = \frac{\partial q}{\partial h}H_0\ \Delta h_u + \frac{\partial q}{\partial \omega}\omega_0 \Delta \omega_u + \frac{\partial q}{\partial y}Y_0\ \Delta y_u$$

$$P_0\ \Delta p_u = \frac{\partial p}{\partial h}H_0\ \Delta h_u + \frac{\partial p}{\partial \omega}\omega_0\ \Delta \omega_u + \frac{\partial p}{\partial q}Q_0\ \Delta q_u$$

ou melhor

$$\Delta q_u = \frac{H_0}{Q_0}\frac{\partial q}{\partial h}\Delta h_u + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{\partial q}{\partial \omega}\Delta \omega_u + \frac{Y_0}{Q_0}\frac{\partial q}{\partial y}\Delta y_u$$

$$\Delta p_u = \frac{H_0}{P_0}\frac{\partial p}{\partial h}\Delta h_u + \frac{\omega_0}{P_0}\frac{\partial p}{\partial \omega}\Delta \omega_u + \frac{Q_0}{P_0}\frac{\partial p}{\partial q}\Delta q_u$$

Como a turbina trabalha com regulação de velocidade supõe-se que $\Delta \omega_u \cong 0$.

A linearização das duas equações precedentes, no ponto de trabalho da turbina, conduz às seguintes equações:

$$\Delta q_u = \alpha_{11}\ \Delta h_u + \alpha_{12}\ \Delta y_u \tag{3.87}$$

onde

$$\alpha_{11} = \frac{H_0}{Q_0} \left.\frac{\partial q}{\partial h}\right|_{y=Y_0} \quad \text{e} \quad \alpha_{12} = \frac{Y_0}{Q_0} \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_{h=H_0}$$

$$\Delta p_u = \alpha_{21}\,\Delta h_u + \alpha_{22}\,\Delta q_u \tag{3.88}$$

onde

$$\alpha_{21} = \frac{H_0}{P_0} \left.\frac{\partial p}{\partial h}\right|_{q=Q_0} \quad \text{e} \quad \alpha_{22} = \frac{Q_0}{P_0} \left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{h=H_0}$$

A vazão de água através de uma turbina tipo Francis, por exemplo, é dada pela seguinte relação:

$$q = \kappa\,\upsilon \tag{3.89}$$

onde

$q$ : vazão de água

$\upsilon$ : velocidade final

$\kappa$ : coeficiente que depende da abertura das palhetas e do coeficiente $\beta$ de vazão através das palhetas diretoras da turbina

Assim

$$q = \beta\, y \sqrt{2gh} \tag{3.90}$$

onde $\beta$ : coeficiente associado à vazão das palhetas diretoras da turbina

Logo, para valores da base aqui assumida, $Q_0 = \beta Y_0 \sqrt{2gH_0}$ o que implica, para os coeficientes $\alpha_{11}$ e $\alpha_{12}$, da equação 3.87, nos seguintes valores:

$$\alpha_{11} = \frac{H_0}{Q_0} \frac{\partial}{\partial h}(\beta\, y \sqrt{2gh}) = \frac{H_0}{Q_0} \frac{2\beta Y_0\, g}{2\sqrt{2gh}} \quad \text{e para} \quad h = H_0 \quad \text{conduz a} \quad \alpha_{11} = \frac{1}{2}$$

Do mesmo modo

$$\alpha_{12} = \frac{Y_0}{Q_0}\frac{\partial}{\partial y}(\beta\, y\sqrt{2gh}) = \frac{Y_0}{Q_0}\;\beta\sqrt{2gh} \quad \text{e para} \quad h = H_0 \quad \text{conduz a} \quad \alpha_{12} = 1$$

Considerando os valores $\alpha_{11}$ e $\alpha_{12}$, linearizados na região ótima de operação de uma turbina, obtém-se a equação da variação da vazão como função da variação da queda útil e da abertura das palhetas diretrizes da turbina, em pu.

Assim, tem-se que:

$$\Delta q_u = \frac{1}{2}\Delta h_u + \Delta y_u \tag{3.91}$$

A potência útil entregue à turbina para que se processe a transformação de energia é dada pela seguinte relação:

$$P = \eta\, q\, \gamma h \tag{3.92}$$

onde $\eta$ é o rendimento da transformação

Do mesmo modo como foram calculados os valores $\alpha_{11}$ e $\alpha_{12}$ para $\alpha_{21}$ e $\alpha_{22}$, seguindo-se o mesmo raciocínio e tendo que $P_0 = \eta\, Q_0\, \gamma\, H_0$, obtém-se que:

$$\alpha_{21} = \frac{H_0}{P_0}\frac{\partial}{\partial h}(\eta\, q\, \gamma h) = \frac{H_0}{P_0}\eta\gamma\, q \quad \text{e para} \quad q = Q_0 \quad \text{conduz a} \quad \alpha_{21} = 1$$

e

$$\alpha_{22} = \frac{Q_0}{P_0}\frac{\partial}{\partial q}(\eta\, q\, \gamma h) = \frac{Q_0}{P_0}\eta\gamma\, h \quad \text{e para} \quad h = H_0 \quad \text{conduz a} \quad \alpha_{11} = 1$$

Na condição de linearização, na região ótima de operação de uma turbina, obtém-se a equação de variação da potência como função da variação da queda útil e da vazão de água em pu.

Assim, tem-se que:

$$\Delta p_u = \Delta h_u + \Delta q_u \tag{3.93}$$

A partir das expressões anteriores, será possível a obtenção da função de transferência da turbina, $\frac{\Delta p_u}{\Delta y_u}$, entre as equações 3.91 e 3.93.

$$\frac{\Delta p_u(S)}{\Delta y_u(S)} = \frac{\Delta h_u + \Delta q_u}{-\frac{1}{2}\Delta h_u + \Delta q_u} = \frac{1 + \frac{\Delta h_u}{\Delta q_u}}{1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta h_u}{\Delta q_u}} \tag{3.94}$$

A função de transferência da turbina, associada à condição de inelasticidade da tubulação, será dada pela relação $\frac{\Delta h_u(S)}{\Delta q_u(S)} = -T_W\, S$, da equação 3.30.

Assim, vem que:

$$\frac{\Delta p_u(S)}{\Delta y_u(S)} = \frac{1 - T_W\, S}{1 + \frac{1}{2}T_W\, S} \tag{3.95}$$

Analogamente, para a condição elástica, a função de transferência da turbina, associada à condição de elasticidade da tubulação, será dada por $\frac{h_u(S)}{q_u(S)} = -Z_S\, \frac{1 - e^{-2T_E S}}{1 + e^{-2T_E S}}$, da equação 3.25.

E também, considerando uma base de valores previamente escolhida, tem-se que:

$$h_u(S) = h_{u0} + \Delta h_u(S)$$
$$q_u(S) = q_{u0} + \Delta q_u(S)$$

Logo

$$h_{u0} + \Delta h_u(S) = -Z_S\, \frac{1 - e^{-2T_E S}}{1 + e^{-2T_E S}}\, [q_{u0} + \Delta q_u(S)]$$

O que permite escrever, na forma de equação de diferença, que:

$$\frac{\Delta h_u(S)}{\Delta q_u(S)} = -Z_S\, \frac{1 - e^{-2T_E S}}{1 + e^{-2T_E S}}$$

Assim, considerando a condição elástica da instalação hidráulica, vem que:

$$\frac{\Delta p_U(S)}{\Delta y_U(S)} = \frac{1 - Z_S \dfrac{1-e^{-2T_E S}}{1+e^{-2T_E S}}}{1 + \dfrac{1}{2} Z_S \dfrac{1-e^{-2T_E S}}{1+e^{-2T_E S}}} = 2\,\frac{(1-Z_S)+(1+Z_S)e^{-2T_E S}}{(2+Z_S)+(2-Z_S)e^{-2T_E S}}$$

(3.96)

---

## EXEMPLO 3.3

A máquina de uma usina hidrelétrica, quando está operando a plena carga, apresenta uma constante de tempo de inércia da água de $T_W = 4s$.

Considerando-se que em determinada ocasião essa mesma máquina venha a operar com *25%* de sua plena carga, determinar o novo valor de $T_W$ associado a essa nova condição.

Aproveitando-se desse questionamento, apresentar a nova função de transferência, no plano complexo de Laplace, associada à turbina hidráulica, para a equação 3.95.

Supor que a tubulação adutora seja uniforme de modo a manter a mesma secção em todo o percurso.

**Solução:**

A razão desse questionamento tem a ver com um erro introduzido em processos de simulação quando não se leva em conta o valor da constante de tempo de inércia da água *versus* o valor do carregamento da máquina.

Admitindo que não haja contração ou expansão volumétrica da água na tubulação, tampouco seja considerado o efeito da elasticidade das paredes da tubulação, pode-se utilizar da equação 3.27 anterior.

Deste modo, tem-se que:

$$T_W = \frac{Q_0 L}{H_0 A g}$$

onde

$Q_0$ : vazão nominal de água pela tubulação
$L$ : comprimento da tubulação
$H_0$ : queda útil nominal da instalação
$A$ : área transversal da tubulação
$g$ : aceleração da gravidade
$T_W$ : constante de tempo associada à vazão nominal

Os parâmetros $L$, $H_0$, $A$ e $g$ independem do carregamento da máquina fato que permite escrever a relação entre $T_W$ e a vazão instantânea $q$ da seguinte forma:

$$T_W = k\,q \tag{3.97}$$

onde $k = \dfrac{L}{H_0\,A\,g}$

Pela equação 3.97, a constante de tempo de inércia da água varia proporcionalmente com a relação da vazão, ou seja, com relação ao carregamento da máquina, uma função direta da abertura ou curso do distribuidor das palhetas diretrizes.

Assim, para duas condições de carregamento caracterizadas por duas vazões diferentes $Q_1$ e $Q_2$, haverá dois valores para a constante de tempo $T_W$, ou melhor:

$$\frac{Tw_1}{Tw_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \tag{3.98}$$

Sendo $Q_0$ a vazão a plena carga, pelo exposto, pode-se escrever que:

$Q_1 = 1{,}00\ Q_0$

$Q_2 = 0{,}25\ Q_0$

$Tw_1 = 4s$

Finalmente

$$Tw_2 = \frac{Q_2}{Q_1}\,Tw_1 \quad \text{e} \quad Tw_2 = \frac{0{,}25\ Q_0}{1{,}00\ Q_0}\,4 = 1 \quad \therefore \quad Tw_2 = 1s$$

Tendo em vista que a equação 3.26 anterior tem a ver com a condição operativa nominal onde a vazão $q$ a plena carga é igual $Q_0$, e que a vazão instantânea é dada pela equação 3.90, pode-se escrever, a partir da equação

3.97, uma nova expressão para um valor qualquer da constante de tempo de inércia da água em função de um valor qualquer do curso.

Assim, tem-se que:

$$T'_W = k\,q = \frac{L}{H_0\,A g} q = \frac{Q_0\,L}{H_0\,A g}\frac{1}{Q_0} q = T_W \frac{1}{Q_0} q \tag{3.99}$$

Mas, pela equação 3.90 anterior, pode-se fazer uma relação entre a vazão e o do curso do distribuidor das palhetas diretrizes. Deste modo, as seguintes relações são possíveis:

$$q = \beta\, y \sqrt{2gH_0} \tag{3.100}$$

$$Q_0 = \beta\, Y_0 \sqrt{2gH_0} \tag{3.101}$$

Levando-se as expressões de $q$ e $Q_0$, das equações 3.100 e 3.101, na equação 3.99, vem:

$$T'_W = T_W \frac{\beta\, y \sqrt{2gH_0}}{\beta\, Y_0 \sqrt{2gH_0}} = y_u\, T_W \tag{3.102}$$

Em assim sendo, a nova expressão para a função de transferência associada à turbina, considerando-se um valor qualquer $y$ do curso do distribuidor das palhetas diretrizes, em pu, diferente do valor nominal $Y_0$ referente ao curso do distribuidor à plena carga, será dada por:

$$\frac{\Delta p_u\,(S)}{\Delta y_u\,(S)} = \frac{1 - y_u T_W\, S}{1 + \frac{1}{2} y_u T_W\, S} \tag{3.103}$$

Em termos de valores, considerando a condição operativa da máquina da usina hidrelétrica do problema em questão, a função de transferência, no plano complexo de Laplace, associada à turbina hidráulica, para o carregamento de *25%*%, corresponderia a um curso do distribuidor das palhetas diretrizes de $y_u = 0{,}25\,pu$, de modo que:

$$\frac{\Delta p_u\,(S)}{\Delta y_u\,(S)} = \frac{1 - 0{,}25\ S}{1 + 0{,}125\,S}$$

---

## EXEMPLO 3.4

A teoria mostrou que existem dois tipos de abordagem quando se procura a função de transferência, no plano complexo de Laplace, associada à turbina hidráulica. Uma abordagem é aquela em que são levados em conta aspectos específicos da teoria dos materiais tais como a elasticidade das paredes da tubulação bem como a compressibilidade volumétrica do fluido, no caso a água. Essa abordagem é conhecida como abordagem elástica. A outra abordagem se trata daquela em que os aspectos de elasticidade e compressibilidade são desprezados. Essa abordagem é conhecida como abordagem inelástica.
Analisar, em termos de resposta do modelo, as implicações de se utilizar uma ou outra abordagem. Analisar as respostas de ambas as abordagens à luz da resposta em freqüência.

Adotar os seguintes dados:

Constante de inércia da água na tubulação

$T_W$ [constante de inércia da água na tubulação] $= 4\ s$

$\upsilon$ [velocidade de propagação da onda de pressão] $= 1.000\ m/s$ (*)

$\lambda$ [comprimento total da tubulação] $= 400\ m$

(*) Dado adotado da referência 35.

**Solução:**

As funções de transferência a serem analisadas podem ser obtidas diretamente a partir da equação 3.95, referente à abordagem inelástica, e da equação 3.96, referente à abordagem elástica. Seguem as funções de transferência, no plano complexo de Laplace, associada à turbina hidráulica, representativas da relação entre a potência mecânica e o curso do distribuidor das palhetas diretrizes da turbina hidráulica, no caso presente uma turbina do tipo Francis, operando à plena carga.

$$\frac{\Delta p_U(S)}{\Delta y_U(S)} = \frac{1 - T_W S}{1 + \frac{1}{2} T_W S}$$

Aplicando-se os dados fornecidos pelo enunciado do problema obtém-se a expressão numérica para o caso inelástico a ser estudado.

Logo

$$\frac{\Delta p_U(S)}{\Delta y_U(S)} = \frac{1-4S}{1+2S}$$

Para o caso elástico, há a necessidade de se calcular o valor da constante $T_E$ relativa ao tempo de propagação da onda de pressão da água dentro da tubulação o que pode ser feito a partir da velocidade de propagação da onda e do comprimento da tubulação.
Lembrando sempre da teoria das ondas, a velocidade de propagação de uma onda, quer seja esta eletromagnética ou elástica, será sempre constante, assim pode-se escrever que:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T_E} \quad \therefore \quad T_E = \frac{\lambda}{\upsilon} = \frac{400}{1000} = 0{,}4\,s$$

Outra relação anterior, a da equação 3.26, permitirá a obtenção da impedância de surtos em pu.

$$T_W = Z_S T_E \quad \therefore \quad Z_S = \frac{T_W}{T_E} \quad \therefore \quad Z_S = \frac{4}{0{,}4} = 10\,pu$$

Deste modo, levando esses valores na equação 3.96, obtém-se a expressão numérica para o caso elástico a ser estudado.

Logo

$$\frac{\Delta p_U(S)}{\Delta y_U(S)} = 2\frac{(1-Z_S)+(1+Z_S)e^{-2T_E S}}{(2+Z_S)+(2-Z_S)e^{-2T_E S}} = 2\frac{(1-10)+(1+10)e^{-0{,}8S}}{(2+10)+(2-10)e^{-0{,}8S}}$$

$$\frac{\Delta p_U(S)}{\Delta y_U(S)} = \frac{-9+11e^{-0{,}8S}}{6-4e^{-0{,}8S}}$$

Com base nas duas funções de transferência referentes às abordagens inelástica e elástica do sistema tubulação-turbina hidráulica serão simulados casos de modo que se processe a análise pedida pelo problema exemplo.

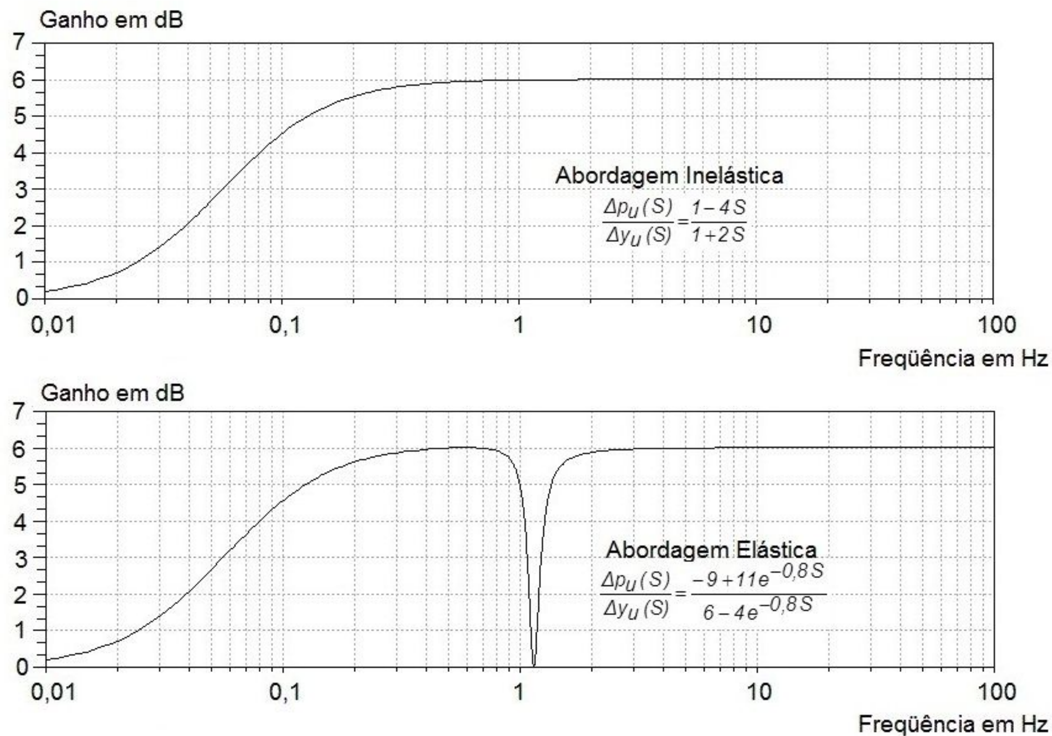



***Figura 3.7 – Ganho em Freqüência Sistema Tubulação-Turbina Hidráulica Abordagem Inelástica versus Elástica***

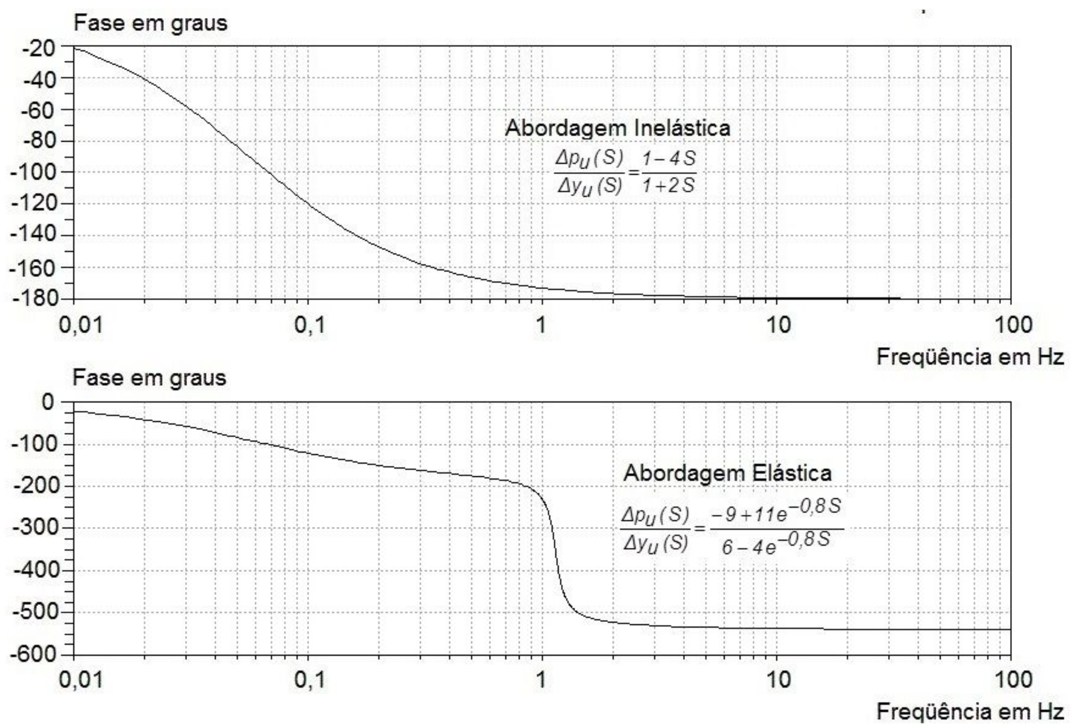



***Figura 3.8 – Fase em Freqüência Sistema Tubulação-Turbina Hidráulica Abordagem Inelástica versus Elástica***

**Nota a respeito do exemplo 3.4:**

O exemplo 3.4 teve como finalidade comparar as respostas de dois diferentes tipos de abordagens requeridas pela modelagem do processo ligado a turbinas hidráulicas no sentido de formar idéia quanto a melhor maneira de representação para simulação computacional da função de transferência de uma turbina Francis. É importante conhecer muito bem a finalidade desejada quando se utiliza do recurso da análise matemática via simulação digital. O emprego de uma modelagem inadequada pode trazer resultados conflituosos que podem não refletir a realidade física do caso em questão.

O exemplo atual mostra que, na faixa de freqüência que vai de $0{,}01$ até $1\,Hz$, as respostas tanto da abordagem elástica quanto da abordagem inelástica se confundem. Porém, a partir daí, há uma faixa muito curta em torno de $1\,Hz$ em que essas mesmas respostas já se distanciam substancialmente. Bastará fazer uma inspeção nas figuras 3.7 e 3.8 para se chegar a tal conclusão. Depois disso as respostas voltam a ficar coincidentes. Isso tem a ver com o *delay* de tempo envolvido na modelagem elástica, uma característica dessa abordagem.

Convém lembrar que, na simulação do chamado *pure time delay*, nome em inglês dado a esse tipo de não linearidade *soft*, é aplicada uma técnica conhecida na literatura do cálculo numérico como aproximantes de Padé, técnica que pode ser estudada em detalhes na referência 55.

Quanto à escolha de qual abordagem deve ser aplicada, a referência 54 dá mais detalhes conforme se queira aprofundar no assunto.

---

## 3.5. Equação da Chaminé de Equilíbrio

Os efeitos transitórios de variação da queda útil em instalações hidráulicas cuja tubulação adutora é longa podem afetar o desempenho tanto da turbina quanto do regulador de velocidade. Na prática, uma tubulação de comprimento superior a $300\,m$ pode ser considerada uma tubulação longa.

Para minimizar este problema são construídas ao longo do conduto as chamadas chaminés de equilíbrio que têm a função de dissipar e amortecer os efeitos gerados por golpes de aríete oriundos de oscilações bruscas de pressão dentro da tubulação.

A figura 3.9 mostra um esquema onde aparece uma instalação dotada de uma chaminé de equilíbrio.

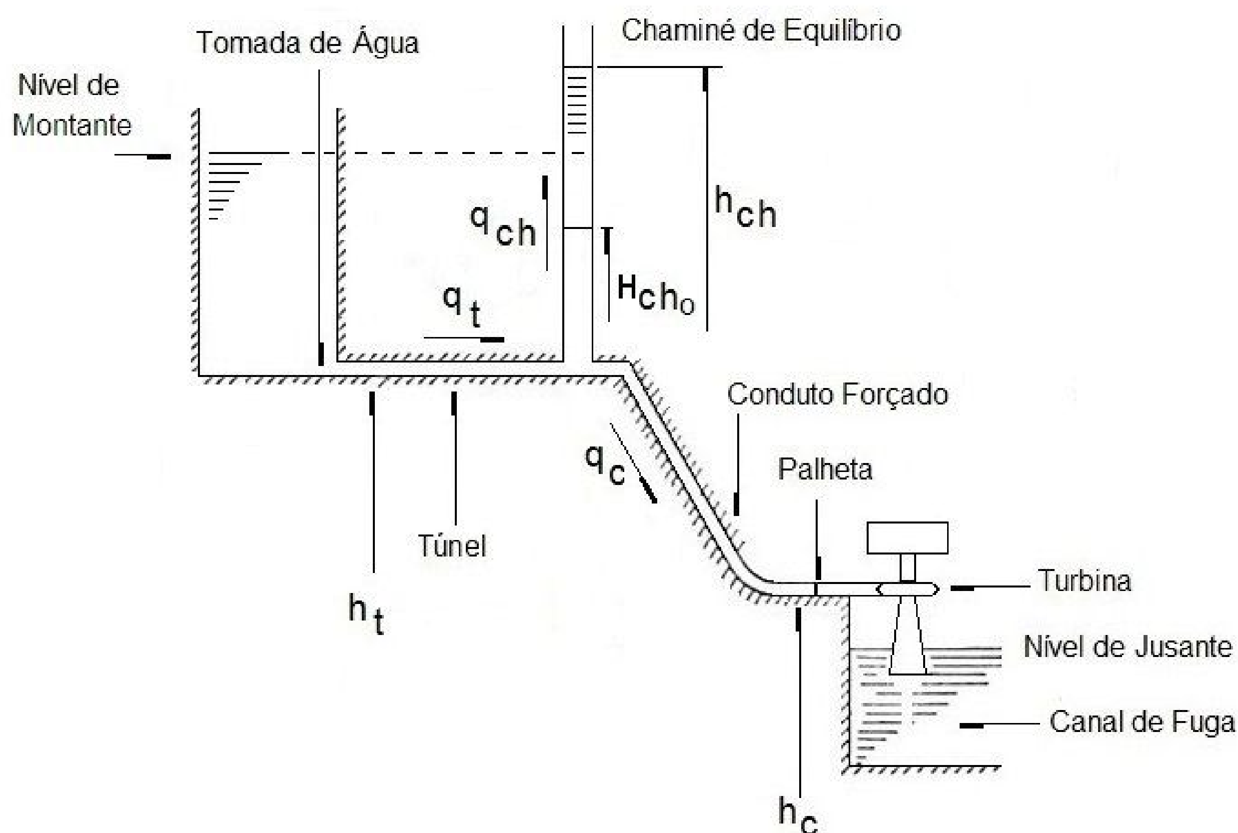



***Figura 3.9 – Instalação Hidráulica com Chaminé de Equilíbrio***

Na figura 3.9 considerar a seguinte legenda:

$h_t$ : altura de queda relativa ao túnel de adução de água

$h_{ch}$ : altura de queda relativa à chaminé de equilíbrio

$h_c$ : altura de queda relativa ao conduto forçado

$H_{ch0}$ : variação do nível de água na chaminé de equilíbrio nas condições nominais e em regime

$q_t$ : vazão relativa ao túnel

$q_{ch}$ : vazão dentro da chaminé de equilíbrio

$q_c$ : vazão relativa ao conduto forçado

Considerando-se a abordagem inelástica e aplicando diretamente a equação 3.30 anterior, que representa a função de transferência entre a queda e a correspondente vazão de água, primeiramente para o túnel e depois para o conduto forçado de uma turbina hidráulica tipo Francis, por exemplo, obtêm-se as equações inerentes a cada um dos estágios que se encontra representado na figura 3.9.

Considerando-se que a turbina esteja operando em sua plena carga e que não haja perdas no sistema hidráulico em questão:

a) para o estágio relativo ao túnel compreendido entre a tomada de água e a chaminé de equilíbrio, considerando-se o plano complexo de Laplace e a definição da base de valores, bem como o raciocínio adotado para a queda líqüida produzir trabalho mecânico, vem que:

$$\Delta h_{tu}(S) = -T_{wt}\, S\, \Delta q_{tu}(S) \qquad (3.104)$$

onde $T_{wt}$ é a constante de tempo associada à inércia da água no túnel de adução, em $s$, por exemplo

Considerando-se, na figura 3.9, que $\Delta h_{tu}(S) = \Delta h_{chu}(S)$ a equação 3.104 anterior tomará o seguinte aspecto:

$$\Delta h_{chu}(S) = -T_{wt}\, S\, \Delta q_{tu}(S) \qquad (3.105)$$

b) para o estágio relativo ao conduto forçado compreendido entre a entrada da chaminé de equilíbrio e o ponto na cota de afogamento da turbina, considerando-se o plano complexo de Laplace e a definição da base de valores, bem como o raciocínio adotado para a queda líqüida produzir trabalho mecânico, vem que:

$$\Delta h_{cu}(S) = -T_{wc}\, S\, \Delta q_{cu}(S) \qquad (3.106)$$

onde $T_{wc}$ é a constante de tempo associada à inércia da água no conduto forçado, em $s$, por exemplo

Para a chaminé de equilíbrio de área $A$, transversal ao sentido de movimentação do fluxo de água, considerando-se uma variação da vazão interna de $\Delta q_{ch} = \Delta q_t - \Delta q_c$ correspondente a uma variação $\Delta h_{ch}$ na altura de água, num tempo $\Delta t$, vem que:

$$q_{ch} = q_t - q_c = \frac{\Delta Vol}{\Delta t} = A\frac{\Delta h_{ch}}{\Delta t} = A\frac{\partial h_{ch}}{\partial t} \qquad (3.107)$$

onde $\Delta Vol = A\ \Delta h_{ch}$

Passando a equação 3.107 para o plano complexo de Laplace, e em pu numa base de valores previamente escolhida, obtém-se a seguinte equação:

$$[q_{tu}(S) - q_{cu}(S)]Q_0 = AS\, h_{chu}(S)H_0$$

Deste modo, tem-se que:

$$q_{tu}(S) - q_{cu}(S) = \frac{AH_0}{Q_0} S\, h_{chu}(S) \quad \therefore \quad q_{tu}(S) - q_{cu}(S) = T_{wch}\, S\, h_{chu}(S)$$

(3.108)

onde $T_{wch} = \dfrac{AH_0}{Q_0}$ é a constante de tempo associada ao enchimento da chaminé de equilíbrio, em $s$, por exemplo

Tomando as diferenças das variáveis de estado, e considerando os valores de base, tem-se que:

$$q_{tu}(S) = q_{tu0} + \Delta q_{tu}(S)$$
$$q_{cu}(S) = q_{cu0} + \Delta q_{cu}(S)$$
$$h_{chu}(S) = h_{chu0} + \Delta h_{chu}(S)$$

Assim, a equação 3.108 tomará o seguinte aspecto:

$$q_{tu0} + \Delta q_{tu}(S) - [q_{cu0} + \Delta q_{cu}(S)] = T_{wch}\, S\, [h_{chu0} + \Delta h_{chu}(S)]$$

Como $q_{tu0} - q_{cu0} = T_{wch}\, S\, h_{chu0}$ a equação anterior pode ser simplificada o que permite escrever a nova equação diferença:

$$\Delta q_{tu}(S) - \Delta q_{cu}(S) = T_{wch}\, S\, \Delta h_{chu}(S) \qquad (3.109)$$

Das equações 3.105 e 3.106 obtém-se, respectivamente, que:

$$\Delta q_{tu}(S) = -\frac{\Delta h_{chu}(S)}{T_{wt}\, S} \quad \text{e} \quad \Delta q_{cu}(S) = -\frac{\Delta h_{cu}(S)}{T_{wc}\, S}$$

Levando-se essas expressões matemáticas na equação 3.109 vem:

$$T_{wch}\, S\, \Delta h_{chu}(S) = -\frac{\Delta h_{chu}(S)}{T_{wt}\, S} - [-\frac{\Delta h_{cu}(S)}{T_{wc}\, S}]$$

Ou melhor

$$\Delta h_{chu}(S) = \frac{T_{wt}}{T_{wc}} [\frac{1}{T_{wch} T_{wt} S^2 + 1}] \Delta h_{cu}(S) \qquad (3.110)$$

A equação 3.110 descreve a variação do nível de água dentro da chaminé de equilíbrio em função da variação de nível no conduto forçado da instalação hidráulica, em pu, numa base de valores previamente escolhida.

---

## EXEMPLO 3.5

Considerando os resultados do item 3.5 anterior, sobre o estudo da dinâmica de uma instalação hidráulica que apresenta chaminé de equilíbrio, desenvolver o diagrama de blocos no plano complexo de Laplace pertinente a esse sistema. A modelagem deverá permitir a análise quanto aos efeitos da variação do nível no conduto sobre a variação nível de água dentro da chaminé de equilíbrio da instalação.
Considerar que a turbina esteja operando em sua plena carga e que não haja perdas de carga no sistema hidráulico em questão.

**Solução:**

Deve-se saber que, durante o desenvolvimento matemático, visando encontrar as funções de transferência aplicáveis ao processo de escoamento da água em uma tubulação hidráulica, no item 3.5 anterior, a abordagem adotada foi uma abordagem inelástica.

Para tal deve-se primeiramente promover o ordenamento das equações obtidas. Geralmente, a preferência recai sobre a utilização das equações diferença dentro de uma base de valores que deve ser definida previamente.

Assim, podem-se utilizar as equações 3.105, 3.106 e 3.109, repetidas a seguir por comodidade, em função da variável complexa $S$ de Laplace:

$$\Delta h_{chu}(S) = -T_{wt}\, S\, \Delta q_{tu}(S) \quad \therefore \quad \Delta q_{tu}(S) = -\frac{1}{T_{wt}\, S} \Delta h_{chu}(S)$$

$$\Delta h_{cu}(S) = -T_{wc}\, S\, \Delta q_{cu}(S) \quad \therefore \quad \Delta q_{cu}(S) = -\frac{1}{T_{wc}\, S} \Delta h_{cu}(S)$$

$$\Delta q_{tu}(S) - \Delta q_{cu}(S) = T_{wch}\, S\, \Delta h_{chu}(S)$$

Também é possível escrever uma quarta equação para a variação da vazão dentro da chaminé de equilíbrio, em pu, no plano complexo de Laplace:

$$\Delta q_{chu}(S) = \Delta q_{tu(S)} - \Delta q_{cu}(S) \qquad (3.111)$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\Delta h_{chu}(S) = \frac{1}{T_{wch}\,S}\Delta q_{chu}(S) \qquad (3.112)$$

O diagrama em blocos da figura 3.10, seguinte, apresentando as variáveis de estado normalizadas em pu, reagrupa de modo concatenado as equações anteriores. Senão, veja-se:

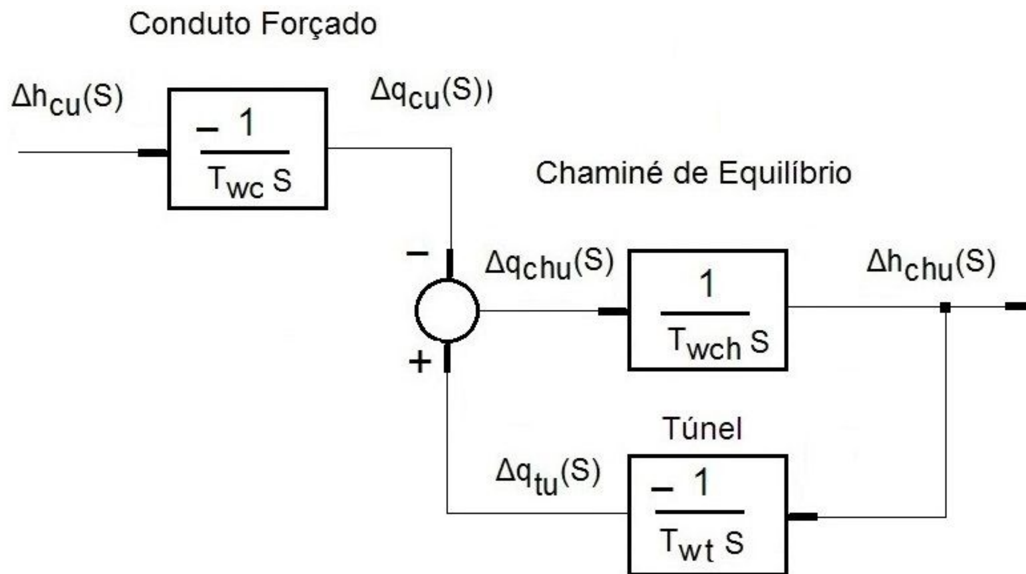



***Figura 3.10 – Diagrama em Blocos de uma Instalação Hidráulica com Chaminé de Equilíbrio em Abordagem Inelástica***

**Nota a respeito do exemplo 3.5:**

O modelo apresentado na figura 3.10, obtido a partir dos estudos realizados, representa uma situação teórica em que as perdas foram desprezadas. Evidentemente que uma simulação desse modelo mostrará uma condição onde as respostas no domínio do tempo se darão numa situação não amortecida. O amortecimento se daria pela inclusão dos efeitos de fricção das paredes do túnel e do conduto forçado contra o fluxo de água, traduzidos na forma de perdas de carga e de pressão do circuito hidráulico.

---

## <u>EXEMPLO 3.6</u>

Seja considerar uma instalação hidrelétrica em que se queira elaborar um estudo, a partir de sua adutora, que é formada por um túnel horizontal, da chaminé de equilíbrio e do conduto forçado, elementos presentes e constituintes do sistema de alimentação da energia primária da turbina hidráulica, conforme está representado na figura 3.9.
A partir da teoria até aqui apresentada, elaborar o diagrama de blocos no plano complexo de Laplace de modo que se considerem os efeitos de elasticidade das paredes do conduto forçado. Desconsiderar os efeitos de elasticidade do túnel de adução e da chaminé de equilíbrio.
A modelagem deverá permitir a análise quanto aos efeitos da variação do nível no conduto forçado sobre a variação nível de água dentro da chaminé de equilíbrio da instalação.
Considerar que a turbina esteja operando em sua plena carga e que não haja perdas de carga no sistema hidráulico em questão.

**Solução:**

A solução desse problema é semelhante à solução do exemplo 3.5 anterior, ressaltando-se apenas a condição de que o conduto forçado dessa instalação necessita da abordagem elástica, fato que foi desconsiderado na solução do exemplo anterior. Também aqui as possíveis perdas do sistema hidráulico são desprezadas.

Utilizando a equação 3.25, anterior, para descrever a função de transferência no plano complexo de Laplace, obtém-se a relação entre a variação da queda num determinado ponto do conduto forçado com relação à correspondente variação da vazão nesse mesmo ponto, porém numa abordagem elástica, assim como é desejado pelo problema em questão.

A figura 3.11 traz o diagrama em blocos pedido.

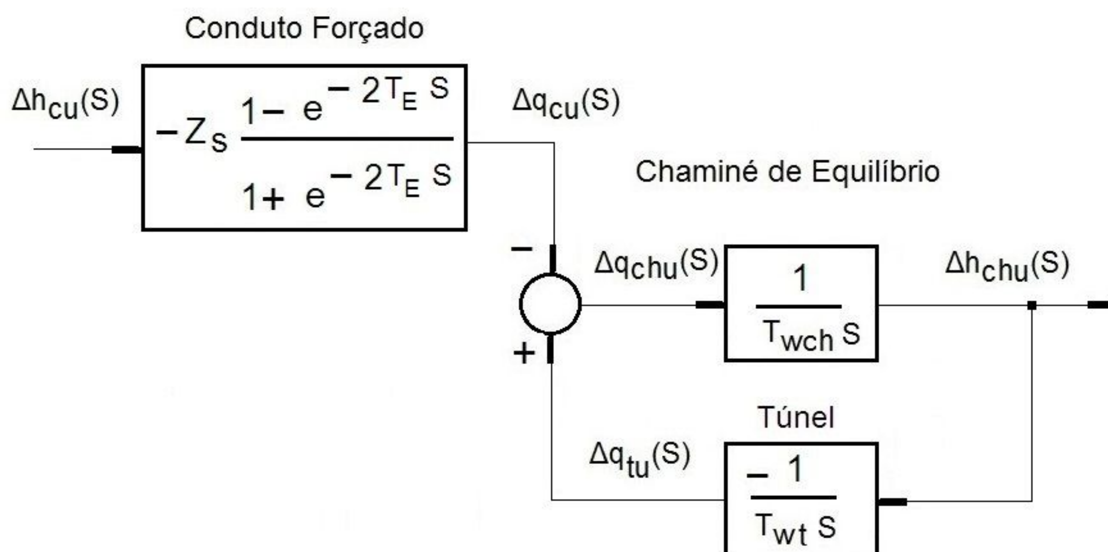


***Figura 3.11 – Diagrama em Blocos de uma Instalação Hidráulica com Chaminé de Equilíbrio em Abordagem Elástica***

---

## 3.6. Equacionamento do Regulador de Velocidade

Para o estudo do regulador de velocidade, deve-se antes lembrar que além dos efeitos da inércia de água na tubulação e da influência desta no controle da potência motriz há que se considerar o relevante efeito da constante de inércia do grupo turbina-gerador.
A associação de ambos os efeitos tem a característica de gerar um atraso na malha de regulação desde o regulador de velocidade até a ação do torque mecânico produzido no eixo do grupo gerador. Não se deve confundir o atraso aqui citado com a função retardo do tipo verificado na equação 3.25 anterior. O primeiro se relaciona com uma função de transferência cuja equação característica apresenta, pelo menos, uma constante de tempo, enquanto que a segunda se refere a uma função não linear do tipo *hard*.
A figura 3.12 elucida melhor a seqüência obedecida pela malha padrão de controle da potência motriz quando se considera uma turbina hidráulica.

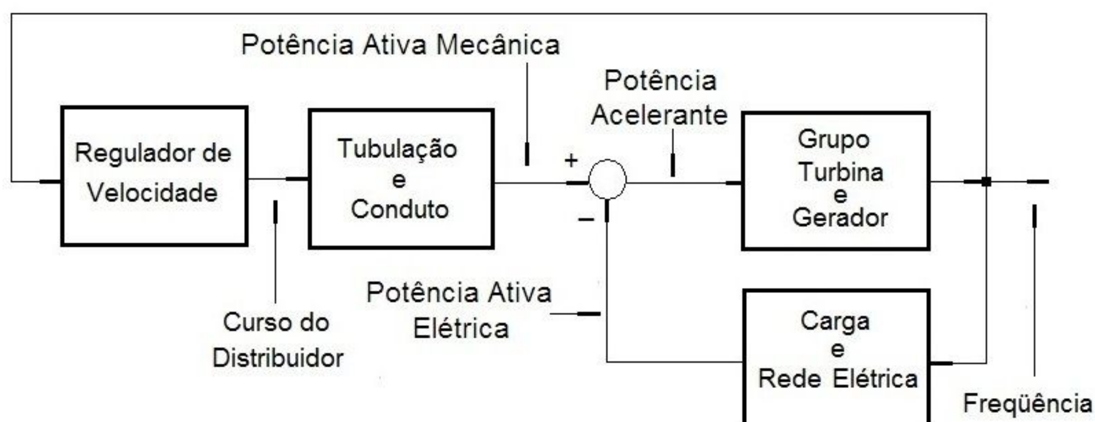



***Figura 3.12 – Malha de Controle Típica de Regulação de Velocidade da Turbina Hidráulica***

Considerando a turbina, o eixo e o gerador acoplados mecanicamente, formando um sistema mecânico de rotação único, pode-se estabelecer a seguinte equação matemática representativa da transmissão do torque motriz:

$$\tau(t) = J\frac{d}{dt}\omega(t) + D\,\omega(t) + \frac{1}{k}\int_0^t \omega(t)dt \qquad (3.113)$$

onde

$J$ : momento de inércia do conjunto girante

$D$ : coeficiente de viscosidade cinemática dos mancais de guia e escora do conjunto

$K$ : compliância torcional do eixo de acoplamento turbina - gerador

$\omega$ : velocidade angular ou freqüência de giro

$t$ : variável independente tempo

Como na prática somente o primeiro termo apresenta significação de interesse neste estudo, a equação 3.113 é simplificada para a seguinte equação:

$$\tau(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) \qquad (3.114)$$

Por outro lado, pela lei da transferência de potência instantânea em sistemas mecânicos de rotação, tem-se que:

$$p(t) = \tau(t)\ \omega(t) \qquad (3.115)$$

Assim

$$p(t) = \omega(t)\ J \frac{d}{dt} \omega(t) \qquad (3.116)$$

Sabe-se também, a partir das equações anteriores, que a equação da potência instantânea pode ser expressa pela seguinte relação:

$$p(t) = \omega_0\ J \frac{d}{dt} \omega(t) \qquad (3.117)$$

onde $\omega_0$ é a rotação nominal do conjunto girante cujo valor foi previamente adotado como valor base de velocidade de rotação

Vale a pena fazer aqui uma observação importante. É muito comum e interessante adotar como base de valores aqueles valores associados à condição nominal operativa da máquina geradora de energia principal. Valores tais como os de potência aparente trifásica, tensão entre fases, rotação, curso do distribuidor associado, entre outros, em seus valores nominais, são muitas vezes levados em conta por serem a referência da máquina. Em certos bancos de dados, alguns usuários preferem utilizar uma base de dados padrão considerando a potência aparente de $100\,MVA$ o que em nada altera o processo sendo apenas uma questão de preferencia. O que não se deve fazer é confusão com os valores que geralmente são diferentes em diferentes base de valores.

Continuando o desenvolvimento vem que:

$$J\omega_0 = \frac{2}{2} J \frac{\omega_0^2}{\omega_0} = 2 [\frac{1}{2} J \omega_0^2] \ \frac{1}{\omega_0} = 2 \frac{W}{\omega_0} \qquad (3.118)$$

onde $W$ é a energia cinética da massa girante

Considerando-se a base de valores já estipulada previamente com $P_0$ sendo a potência nominal e $\omega_0$ como sendo a velocidade nominal de rotação mecânica, a equação 3.117 em pu toma o seguinte aspecto:

$$\frac{p(t)}{P_0} = \frac{J\omega_0}{P_0} \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{2W}{P_0 \omega_0} \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{2W}{P_0} \frac{d}{dt}\omega_u(t) \qquad (3.119)$$

Ou melhor

$$p_u(t) = 2H \frac{d}{dt}\omega_u(t) \quad \therefore \quad p_u(t) = 2H \frac{d}{dt}\Delta\omega_u(t) \qquad (3.120)$$

onde $H = \frac{W}{P_0}$ é a constante de inércia do conjunto girante em s

A constante de inércia $H$ representa, fisicamente, a relação entre a energia e a potência da máquina em questão. Trata-se de uma característica própria de cada unidade de geração.

Na equação 3.120, a variável $p_u(t)$ retrata a potência acelerante que atua sobre a máquina. Estando a máquina interligada, por exemplo, ao SIN, a potência acelerante representará a diferença entre a potência mecânica gerada pela fonte primária, no caso a turbina hidráulica, e a carga elétrica suprida. Em regime operativo normal essas duas potências, desconsiderando-se as perdas, devem ser iguais. Caso contrário surgirá uma diferença que pode ser para mais ou para menos acarretando o aparecimento de uma potência acelerante ou desacelerante o que provocará uma variação na rotação da máquina em relação à freqüência síncrona, ou seja:

$$\Delta p_u(t) = \Delta p_{mec\,u}(t) - \Delta p_{elétr\,u}(t)$$

Considerando-se o plano complexo de Laplace, a base de valores já previamente estabelecida e a equação na forma de diferenças da equação 3.120, vem que:

$$\Delta\omega_u(S) = \frac{1}{2HS}\Delta p_u(S) \qquad (3.121)$$

A equação 3.121 resume a razão do estudo da estabilidade do SEP. Através desta equação pode-se observar que a presença de um torque acelerante aplicado sobre o sistema em questão bastará para garantir a existência de uma

ação acelerante aplicada ao conjunto girante condição que poderá, numa situação desfavorável, até tirá-lo da estabilidade.
Evidentemente que para se completar a equação 3.121 falta a inclusão das malhas de realimentação que introduzem efeitos outros, inclusive o que responde pelo amortecimento.
Deste modo, o bloco representativo da inércia do conjunto turbina-gerador fica definido pela equação 3.121.

---

## EXEMPLO 3.7

Comprovar a equação anterior 3.117.

**Solução:**

A equação 3.117 é a seguinte:

$$p(t) = \omega_0 \; J \frac{d}{dt} \omega(t)$$

Como foi dito anteriormente, ela representa a equação do conjunto girante e para comprová-la será utilizada a equação 3.115, reescrita a seguir:

$$p(t) = \tau(t) \; \omega(t)$$

A equação 3.115, trata-se da equação da potência instantânea transferida por uma máquina geradora, por exemplo, em função do torque mecânico desenvolvido no eixo do conjunto girante turbina-gerador multiplicado pela velocidade mecânica instantânea de giro.

Tomando as diferenças das variáveis de estado que aparecem na equação 3.115, e considerando os valores de base, tem-se que:

$$p(t) = P_0 + \Delta p(t)$$
$$\tau(t) = \tau_0 + \Delta \tau(t)$$
$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta \omega(t)$$

Levando-se as expressões inerentes a cada variável em sua respectiva posição na equação 3.116, vem que:

$$p(t) = [\omega_0 + \Delta \omega(t)] \, J \frac{d}{dt} \omega(t)$$

Abrindo as operações da equação anterior, tem-se que:

$$p(t) = \omega_0 J \frac{d}{dt}\omega(t) + \Delta\omega(t) J \frac{d}{dt}\omega(t) = \omega_0 J \frac{d}{dt}\omega(t) + \Delta\omega(t) J \frac{d}{dt}\Delta\omega(t)$$

Na equação anterior, será desconsiderada a parcela diferença de ordem dois.

Assim, tem-se, comprovando a equação 3.117 , que:

$$p(t) = \omega_0 J \frac{d}{dt}\omega(t)$$

Como já foi mencionado antes, pode-se considerar a seguinte relação da potência acelerante onde $p_u(t) \to \Delta p_u(t) = \Delta p_{mec\,u}(t) - \Delta p_{elétr\,u}(t)$.
Deste modo, a seguinte relação também é então válida:

$$\Delta p(t) = \omega_0 J \frac{d}{dt}\Delta\omega(t) = \omega_0 \Delta\tau(t) \quad (3.122)$$

---

Tendo em vista um SEP, a representação de funções de amortecimento nem sempre é considerada em função de sua ação ser conservativa no sentido de estabilidade. Para efeito de análise de estabilidade, é interessante que o estudo considere sempre a pior condição possível o que faz com que tais efeitos, muitas vezes, sejam desconsiderados dos cálculos.

Por definição, o parâmetro $D$, que reúne os efeitos de amortecimento, é dado pela seguinte relação:

$$D = \frac{\partial \tau_c(t)}{\partial \omega(t)} \quad (3.123)$$

onde

$\tau_c$ : torque relativo à carga elétrica conectada
$\omega$ : velocidade angular ou freqüência de giro do conjunto
$t$ : variável independente tempo

O parâmetro $D$ consiste da linearização dos efeitos de variação do torque em relação à variação da freqüência de rotação.

Assim, linearizando-se a equação 3.123, vem que:

$$D = \left.\frac{\partial \tau_c(t)}{\partial \omega(t)}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\Delta\tau_c(t)}{\Delta\omega(t)}$$

Logo, pode-se escrever que:

$$\frac{\Delta\omega(t)}{\Delta\tau_C(t)} = \frac{1}{D} \quad \therefore \quad \frac{\Delta\tau_C(t)}{\Delta\omega(t)} = D \qquad (3.124)$$

Representando-se a equação 3.124 em pu, na base de valores previamente estipulada, vem que:

$$\frac{1}{D_0} = \frac{\omega_0}{\tau_0}$$

Pela equação 3.115 pode-se escrever que $P_0 = \omega_0 \tau_0$.

Assim

$$\frac{1}{D_0} = \frac{\omega_0}{\tau_0} = \frac{\omega_0}{P_0/\omega_0} \quad \therefore \quad \frac{1}{D_0} = \frac{\omega^2{}_0}{P_0} \qquad (3.125)$$

Dividindo-se a equação 3.124 pela equação 3.125 vem que:

$$\frac{1/D}{1/D_0} = \frac{\dfrac{\Delta\omega(t)}{\Delta\tau_C(t)}}{\dfrac{\omega^2{}_0}{P_0}} \quad \therefore \quad \frac{1}{D/D_0} = \frac{1}{D_U} = \frac{\Delta\omega(t)}{\omega_0} \frac{1/\Delta\tau_C(t)}{\omega_0/P_0} \qquad (3.126)$$

Ainda da equação 3.115, pode-se escrever que $\frac{1}{\tau_0} = \frac{\omega_0}{P_0}$ o que permite colocar a equação 3.126 na seguinte forma:

$$\frac{1}{D_U} = \frac{\Delta\omega(t)}{\omega_0} \frac{1/\Delta\tau_C(t)}{\omega_0/P_0} = \Delta\omega_U(t) \frac{1}{\Delta\tau_{CU}(t)} \qquad (3.127)$$

Considerando, ainda, a equação 3.122 onde $\Delta p(t) = \omega_0 \Delta\tau(t)$, em pu, pode-se escrever que:

$$\frac{\Delta p(t)}{P_0} = \frac{\omega_0 \Delta\tau(t)}{\omega_0 \tau_0} \quad \therefore \quad \Delta p_U(t) = \Delta\tau_U(t) \qquad (3.128)$$

Deste modo, a equação 3.127 anterior pode tomar a seguinte forma:

$$\frac{1}{D_u} = \frac{\Delta\omega_u(t)}{\Delta p_{cu}(t)} \qquad (3.129)$$

Considerando-se o plano complexo de Laplace, e a base de valores já previamente estabelecida, a equação 3.129 ficará então:

$$\frac{1}{D_u} = \frac{\Delta\omega_u(S)}{\Delta p_{cu}(S)} \qquad (3.130)$$

Na prática, o parâmetro *D* encontra-se associado ao chamado coeficiente de auto-regulação da carga e para cargas resistivas tem valor zero. Para cargas indutivas ele varia de *1,0 a 2,0 pu/pu* .

Costuma-se subtrair, do valor referente a este parâmetro, o valor referente àquele parâmetro que se trata da auto-regulação da turbina, uma característica de amortecimento associado à parte mecânica.

A partir das deduções obtidas das análises intrínsecas dos elementos físicos da malha reguladora, que se encontra representada na figura 3.12, pode-se obter a função de transferência do regulador de velocidade conhecendo-se as peculiaridades da máquina em questão.

A figura 3.13 será utilizada para os estudos e análise da função de transferência de um regulador de velocidade padrão utilizado por turbinas hidráulicas. Notar que no diagrama em blocos apresentado foi adotada a abordagem inelástica para a função de transferência da tubulação e conduto forçado.

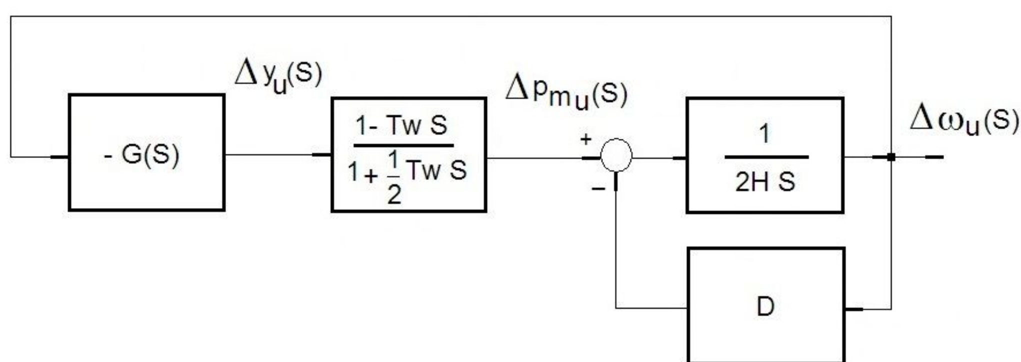



***Figura 3.13 – Malha de Regulação de Velocidade com Regulador***

---

## EXEMPLO 3.8

Em um determinado SEP, o conjunto de cargas instalado pode ser resumido em $200\,MVA$ com $\cos\phi = 0{,}8$. Sabendo-se que a potência dessas cargas variam em função direta do quadrado da freqüência elétrica de rotação do sistema, calcular o coeficiente de amortecimento gerado por esse conjunto de cargas sobre a regulação de velocidade desse SEP na base de potência de $240\,MVA$.

**Solução:**

Primeiramente, deve-se conhecer que conjunto de cargas é esse aqui referido nesse contexto.
Uma carga de $200\,MVA$ com $\cos\phi = 0{,}8$ significa que haverá uma parte resistiva e outra parte indutiva que é, na realidade, a parcela a ser influenciada pela rotação elétrica do SEP. Lembrar que a parcela resistiva de uma carga elétrica independe da freqüência ou velocidade de rotação do sistema para os fins admitidos nesse livro.

Para o ângulo elétrico, tem-se, por conseqüência, que:

$$\cos\phi = 0{,}8 \quad \therefore \quad \sin\phi = 0{,}6$$

$$\text{potência resistiva}: 200\cos\phi = 0{,}8\,x200 = 160\,MW$$

$$\text{potência indutiva}: 200\sin\phi = 0{,}6\,x200 = 120\,MVAr$$

Logo, a parcela da carga de $200\,MVA$ que sofre a influência da freqüência elétrica é de $120\,MVAr$, possivelmente formada de motores.

A equação genérica para a definição da potência das cargas em função da freqüência pode ser assim descrita:

$$p_c = k\,\omega^2$$

Aplicando, agora, a definição de coeficiente de amortecimento, tem-se que:

$$D_c = \frac{\Delta p_c}{\Delta\omega} = \left.\frac{\partial p_c}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = 2k\,\omega_0 = \frac{2k(\omega_0)^2}{\omega_0} = \frac{2p_{c0}}{\omega_0}$$

Logo

$$D_{cu} = \frac{\dfrac{\Delta p_c}{Pc_0}}{\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}} = \frac{\Delta p_{cu}}{\Delta\omega_u} = 2\ pu/pu$$

O valor encontrado de $D_{cu} = 2\ pu/pu$ se refere ao valor em pu na base da própria carga, ou seja, na base de $120\,MVAr$ .
Para o caso do presente problema, como é pedido o valor do coeficiente de amortecimento para uma base em que a potência base seja de $100\,MVA$ deverá ser promovida uma mudança de base.

Mudança de Base

Seja considerar uma expressão do coeficiente de amortecimento em pu, em duas bases distintas, onde a potência base, na base de valores 1, é dada por $Pc1_0$ enquanto a potência base, na base de valores 2, é dada por $Pc2_0$, da seguinte forma:

$$D_{c1u} = \frac{\frac{\Delta p_c}{Pc1_0}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = \frac{\Delta p_{c1u}}{\Delta\omega_u} \quad \text{e} \quad D_{c2u} = \frac{\frac{\Delta p_c}{Pc2_0}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = \frac{\Delta p_{c2u}}{\Delta\omega_u}$$

Notar que a variação da freqüência não muda, pois, em ambos sistemas, a base de velocidade será sempre a mesma, qual seja $\omega = 2\pi\,60\,rad/s$. Isso vale para SEPs do tipo do Brasil.

Ao se relacionarem ambas as expressões anteriores, pode-se obter o seguinte:

$$\Delta\omega_u = \frac{\Delta p_{c1u}}{D_{c1}} = \frac{\Delta p_{c2u}}{D_{c2}} \quad \therefore \quad \frac{D_{c2u}}{D_{c1u}} = \frac{\Delta p_{c2u}}{\Delta p_{c1u}}$$

Como $\Delta p_{c1} = \Delta p_{c2} = \Delta p_c$ vem que:

$$D_{c2u} = \frac{\Delta p_{c2u}}{\Delta p_{c1u}} D_{c1u} = \frac{\frac{\Delta p_{c2}}{Pc2_0}}{\frac{\Delta p_{c1}}{Pc1_0}} D_{c1u} = \frac{p_{c10}}{p_{c20}} D_{c1u}$$

Substituindo-se na equação precedente os valores calculados anteriormente para os parâmetros, considerando-se $Pc1_0 = 120\,MVA$ e $Pc2_0 = 240\,MVA$, obtém-se o valor pedido pelo problema em questão, qual seja:

$$D_{c2u} = \frac{120}{240} 2 = 1\,pu/pu$$

---

Como se pode afirmar, a principal função de um grupo regulador de velocidade de uma turbina hidráulica é manter a rotação desta em uma velocidade mais próxima possível de um valor fixo chamado valor de referência. Para tal um mecanismo autocomandado é sempre utilizado na ação sobre o fluxo de água que aciona uma turbina.
Pode-se perceber que a quantidade de água atuante está diretamente ligada à carga que está sendo alimentada pela máquina.
Para uma determinada carga o fluxo motriz já é definido pela abertura do distribuidor que amarra a rotação do grupo em um valor nominal.
Na figura 3.14, seguinte, encontra-se representado, esquematicamente, um regulador na sua forma mais primitiva possível, onde $a, b$ são os comprimentos dos segmentos da barra principal.
Nela se verificam os mais importantes pontos de atuação na regulação desde o sensor de velocidade até o comando das palhetas do distribuidor que são promovidos através de barras articuladas de interligação entre as partes.
As massas do pêndulo se movimentam pela ação da força centrífuga, resultado da rotação destas sobre um determinado eixo, e podem sentir qualquer variação da velocidade de rotação da turbina que, por sua vez, vem relacionada com uma variação de carga provocada por uma razão qualquer.

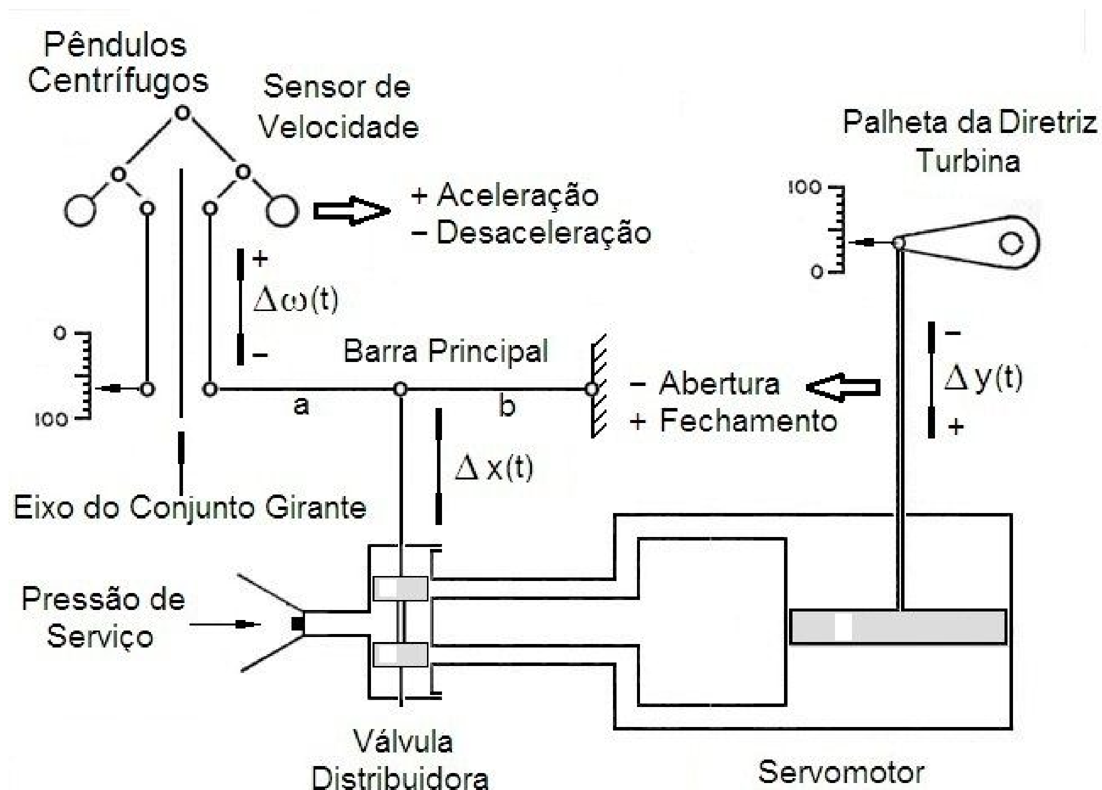



***Figura 3.14 – Regulador Automático de Velocidade Primitivo***

Através da ação centrífuga, já que as massas giram em conjunto com o eixo de rotação da turbina, o movimento é transmitido à barra principal. Esta, por sua vez, promove o deslocamento do êmbolo da válvula distribuidora liberando a

pressão de serviço para o lado desejado das câmaras do servomotor que movimenta, assim, a palheta diretriz efetuando a correção do fluxo de água deliberado sobre as pás da turbina hidráulica e, por conseguinte, a velocidade de rotação do grupo girante.
Pode-se verificar, também, que a válvula distribuidora incorpora as funções de amplificação hidráulica, ou seja, um pequeno sinal do pêndulo foi promovido em uma variação acentuada, em pressão, sobre o servomotor, de porte bem avantajado se comparado com o sensor de velocidade.
Analisando-se o diagrama representado na figura 3.14, importantes conclusões podem ser tiradas a respeito do sistema regulador de velocidade.
Através deste, iniciar-se-á um estudo sobre os parâmetros definidos na regulação de velocidade bem como suas implicações e a razão da existência dos mesmos.
Observando a figura 3.14, pode-se levantar a função de transferência do conjunto válvula distribuidora e servomotor segundo o seguinte raciocínio.

Inicialmente, a análise recairá sobre o servomotor, suposto ser formado por uma câmara cilíndrica de área $A$ transversal ao seu curso $y(t)$ cujo movimento é comandado pelo controle sobre a vazão $q(t)$ de óleo sob pressão em suas câmaras. Para essa situação, tem-se que a vazão do óleo será dada pela seguinte fórmula:

$$q(t) = A\frac{d}{dt}y(t) \tag{3.131}$$

Ou melhor

$$\Delta q(t) = A\frac{d}{dt}\Delta y(t) \tag{3.132}$$

Passando-se a equação anterior para valores pu, na base de valores onde se têm $Q_0$ como vazão nominal de óleo e $Y_0$ como abertura das palhetas relativa à potência nominal $P_0$, ambas tomadas como valor base, vem que:

$$\Delta q(t)\frac{Q_0}{Q_0} = A\frac{d}{dt}\Delta y(t)\frac{Y_0}{Y_0} \quad \therefore \quad \Delta q_u(t) = \frac{AY_0}{Q_0}\frac{d}{dt}\Delta y_u(t)$$

Assim

$$\Delta q_u(t) = \tau\frac{d}{dt}\Delta y_u(t)$$

Rearranjando e passando a equação anterior para o domínio da transformada de Laplace, obtém-se:

$$\Delta y_u(S) = \frac{1}{\tau S}\Delta q_u(S) \tag{3.133}$$

onde

:constante de tempo pura de integração do servomotor
$\Delta y_u$ : variação do curso do servomotor
$\Delta q_u$ : variação da vazão de óleo sob pressão do servomotor

Como a vazão de óleo sob pressão para o servomotor depende da posição da válvula distribuidora, tomando essa relação como linear, pode-se escrever que:

$$x(t) = k_q \, q(t) \qquad (3.134)$$

Tomando-se as diferenças das variáveis de estado e passando-se a equação 3.134 para valores pu, na base de valores onde $X_0$ representa o deslocamento relativo à vazão $Q_0$ e $k_q$ trata-se de uma constante de proporcionalidade, vem, para $X_0 = K_q Q_0$, que:

$$\Delta x_u(t) = \Delta q_u(t) \qquad (3.135)$$

Considerando-se, agora, que os movimentos sejam pequenos de modo que as transferências através da barra principal, por relações de triângulos semelhantes, sejam possíveis, pela figura 3.14 vem que:

$$- k_\omega \, \Delta\omega(t) = \frac{a+b}{b} \, \Delta x(t) \quad \therefore \quad -\frac{\omega_0}{\omega_0} k_\omega \, \Delta\omega(t) = \frac{X_0}{X_0} \frac{a+b}{b} \, \Delta x(t)$$

$$-\omega_0 \, k_\omega \, \Delta\omega_u(t) = X_0 \frac{a+b}{b} \, \Delta x_u(t) \quad \therefore \quad \Delta\omega_u(t) = -\frac{1}{k_\omega} \frac{X_0}{\omega_0} \frac{a+b}{b} \, \Delta x_u(t) \qquad (3.136)$$

onde $k_\omega$ é a constante de proporcionalidade relativa à medição do sinal de rotação do grupo

Ou melhor

$$\frac{\Delta\omega_u(t)}{\Delta x_u(t)} = -\frac{1}{k_\omega} \frac{X_0}{\omega_0} \left(\frac{a+b}{b}\right) \quad \therefore \quad \Delta x_u(t) = -k_\omega \frac{\omega_0}{X_0} \left(\frac{b}{a+b}\right) \Delta\omega_u(t) \qquad (3.137)$$

Pela equação 3.135, a expressão da equação 3.137 toma a seguinte forma:

$$\Delta q_u(t) = -\frac{1}{k} \Delta\omega_u(t)$$

onde $k = \frac{1}{k_\omega}\frac{X_0}{\omega_0}(\frac{a+b}{b})$

Passando-se a equação precedente para o domínio das transformada de Laplace vem:

$$\Delta q_U(S) = -\frac{1}{k}\Delta\omega_U(S)$$

Pela equação 3.133, a equação anterior toma a forma seguinte:

$$\Delta q_U(S) = \tau S\,\Delta y_U(S) = \frac{1}{k}\Delta\omega_U(S)$$

Ou melhor

$$\frac{\Delta y_U(S)}{\Delta\omega_U(S)} = -\frac{1}{T_G S} \qquad (3.138)$$

onde $T_G = k$

Na equação 3.138, $T_G$ é o parâmetro representativo da constante de tempo de integração do regulador de velocidade dado em $s$.

Analisando melhor a equação 3.138, pode-se concluir a inconveniência da utilização deste tipo de regulador, aqui denominado de regulador de velocidade primitivo.
Quando existir um erro de velocidade permanente, um erro de controle, o curso do servomotor estará sempre em operação uma vez que não existe realimentação da posição das palhetas diretrizes, ou do curso do servomotor que possa zerar o erro.
Este tipo de regulador apresenta também a característica isócrona que implica na falta do parâmetro chamado queda permanente, também conhecido como estatismo permanente, por não possuir realimentação permanente da posição das palhetas diretrizes.
Mais à frente será demonstrado que a operação paralela de hidrogeradores é impraticável em sistemas que somente possuem reguladores isócronos.

O bloco $G(S)$ da figura 3.13 pode ser representado pela figura 3.15 que está na forma de diagrama de blocos.

Pelas equações 3.133, 3.135, 3.137, aqui repetidas, desenvolve-se o diagrama em blocos, no plano complexo de Laplace, seguinte:

$$\Delta y_U(S) = \frac{1}{\tau S}\Delta qu(S) \qquad \Delta x_U(t) = \Delta q_U(t) \qquad \Delta x_U(S) = -\frac{1}{k}\Delta\omega_U(S)$$

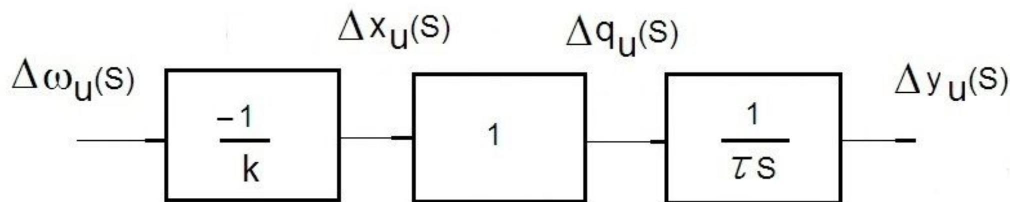



***Figura 3.15 – Diagrama em Blocos do Regulador da Figura 3.14***

Como foi citado no caso analisado, o regulador primitivo não resolveria o problema de repartição de carga entre hidrogeradores operando em paralelo e nem promoveria a devida compensação de prováveis atrasos existentes na malha de controle da velocidade.
A falta de compensação dos atrasos provoca um problema de oscilação na malha de controle solucionado com a introdução da queda transitória ou estatismo transitório como será discutido mais à frente.

Será visto agora o procedimento de introdução de uma realimentação permanente, cujo sinal se trata da realimentação de uma variável de estado proporcional ao curso das palhetas diretrizes ou da posição da haste do servomotor, que resolve apenas o problema da regulação de carga entre máquinas em rede interligada, ou seja, na operação em paralelo. A realimentação se dá em ação de soma junto ao sinal proveniente do sensor de medida da velocidade do conjunto girante.

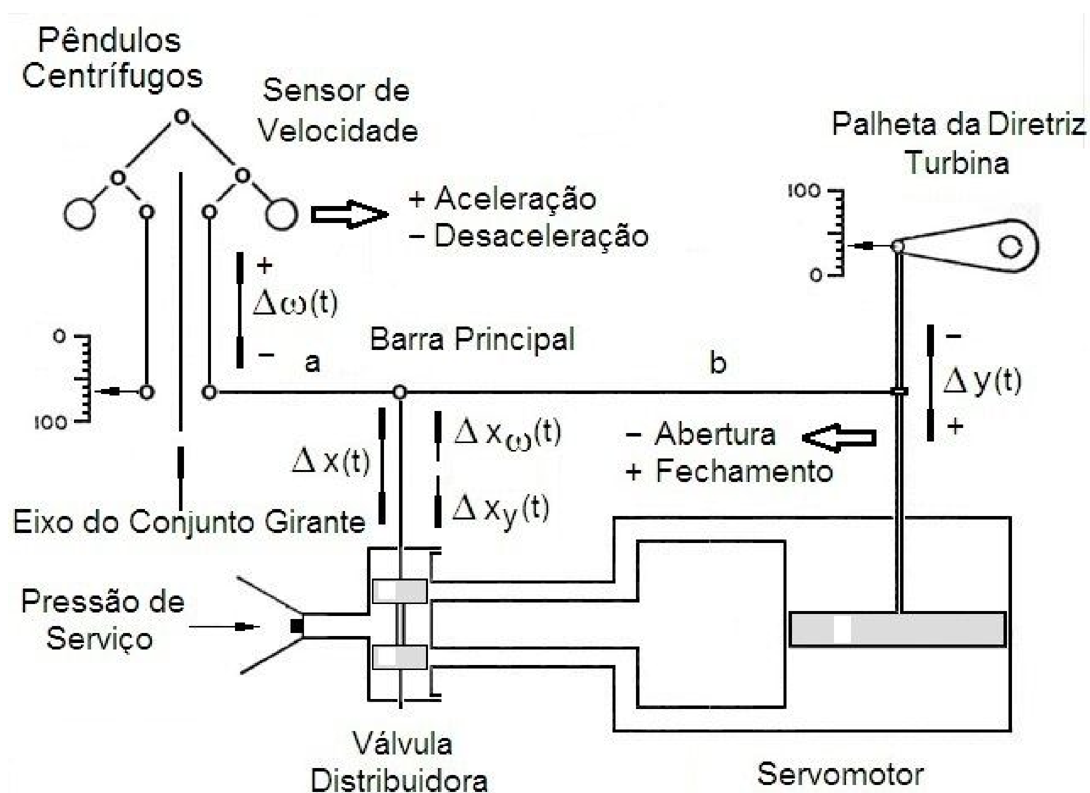


***Figura 3.16 – Regulador Automático de Velocidade com Realimentação Permanente de Posição das Palhetas do Distribuidor***

Considerar na figura 3.16 que:

$\Delta x_\omega$ : curso da válvula distribuidora associado à ação do medidor da rotação
$\Delta x_y$ : curso da válvula distribuidora associado à ação da realimentação do servomotor
$a, b$ : comprimentos dos segmentos da barra principal

Na figura 3.16, a introdução da realimentação foi obtida acoplando-se a barra principal ao eixo de deslocamento do servomotor.

Tomando as diferenças das variáveis de estado para valores pu, na base de valores onde $X_0$ representa o deslocamento relativo à vazão $Q_0$ e $k_q$ trata-se de uma constante de proporcionalidade, vem, para $X_0 = K_q Q_0$, que o movimento $\Delta x_u(t)$ dependerá da ação $\Delta x_{\omega_u}(t)$ ligada à variação da velocidade de rotação do grupo $\Delta\omega_u(t)$ e da ação $\Delta x_{y_u}(t)$ ligada à variação do curso do servomotor $\Delta y_u(t)$ que foi obtida através da introdução da realimentação permanente.

Assim, já se considerando o plano complexo de Laplace e a base de valores já previamente estabelecida, pode-se escrever que:

$$\Delta x_u(S) = \Delta x_{\omega u}(S) + \Delta x_{yu}(S) \qquad (3.139)$$

Da relação de semelhança de triângulos, considerando-se que os deslocamentos possam ser tratados como se fossem deslocamentos retilíneos, obtêm-se as expressões para os deslocamentos $\Delta x_{\omega u}(S)$ e $\Delta x_{yu}(S)$.

Para o deslocamento relativo ao medidor de rotação do conjunto girante:

$$\frac{-k_\omega \Delta\omega(S)}{\Delta x_\omega(S)} = \frac{a+b}{b} \quad \therefore \quad -\frac{\omega_0}{\omega_0} k_\omega \Delta\omega(t) = \frac{X_0}{X_0}\frac{a+b}{b} \Delta x_\omega(t)$$

Ou melhor

$$-\omega_0 k_\omega \Delta\omega_u(t) = X_0 \frac{a+b}{b} \Delta x_{\omega_u}(t) \quad \therefore \quad \Delta\omega_u(t) = -\frac{1}{k_\omega}\frac{X_0}{\omega_0}\frac{a+b}{b}\Delta x_{\omega_u}(t) \qquad (3.140)$$

Do mesmo modo, seguindo-se semelhante raciocínio, para o deslocamento relativo à realimentação do curso de servomotor, vem que:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{-\Delta x_{yu}(S)} = \frac{a+b}{a}$$

Ou melhor,

$$\Delta x_{yu}(S) = -\frac{a}{a+b}\Delta y_u(S) \qquad (3.141)$$

Notar que, pela influência do controle, as ações referentes aos deslocamentos $\Delta x_{\omega u}(S)$ e $\Delta x_{yu}(S)$ são opostas fato que explica o sinal negativo apresentado na relação mostrada na equação 3.141.

Deste modo, a equação 3.139 tomará o seguinte aspecto:

$$\Delta x_u(S) = \Delta x_{\omega u}(S) + \Delta x_{yu}(S) = -k_\omega \frac{\omega_0}{X_0}\frac{b}{a+b}\Delta\omega_u(S) - \frac{a}{a+b}\Delta y_u(S)$$

Ou melhor

$$\Delta x_u(S) = -k_1\ \Delta\omega_u(S) - k_2\ \Delta y_u(S) \qquad (3.142)$$

onde

$$k_1 = \frac{1}{k} = k_\omega \frac{\omega_0}{X_0}\frac{b}{a+b}$$

$$k_2 = \frac{a}{a+b}$$

Pelas equações 3.133 e 3.135, obtém-se que:

$$S\ \Delta y_u(S) = \Delta q_u(S) \quad \text{e} \quad \Delta x_u(S) = \Delta q_u(S)$$

De onde se pode extrair que:

$$S\ \Delta y_u(S) = \Delta x_u(S) \quad \therefore \quad S\ \Delta y_u(S) = k_1\ \Delta\omega_u(S) - k_2\ \Delta y_u(S)$$

$$\Delta y_u(S) = \frac{1}{\underset{\tau}{S}}[-k_1\ \Delta\omega_u(S) - k_2\ \Delta y_u(S)] \qquad (3.143)$$

Com uma pequena manipulação algébrica da equação 3.143, chega-se a:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta\omega_u(S)} = \frac{-k_1}{k_2 + \tau S} = \left(-\frac{k_1}{k_2}\right)\left(\frac{1}{1+\tau/k_2\, S}\right)$$

Ou melhor

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta\omega_u(S)} = \left(-\frac{1}{b_{pu}}\right)\left(\frac{1}{1+T_G\, S}\right) \qquad (3.144)$$

onde

$b_{pu}$ é um parâmetro chamado de queda permanente de velocidade ou estatismo permanente e dado por

$$b_{pu} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\dfrac{a}{a+b}}{k_\omega \dfrac{\omega_0}{X_0}\dfrac{b}{a+b}} = \frac{a}{b}\frac{1}{k_\omega}\frac{X_0}{\omega_0}$$

e

$T_G$ é a chamada constante de tempo do regulador $T_G = \tau/k_2 = \frac{a+b}{a\,\tau}$ dado em s.

A figura 3.17 mostra o diagrama para o bloco $G(S)$ da figura 3.13 quando se considera um regulador automático de velocidade com realimentação permanente de posição das palhetas do distribuidor que está representado na figura 3.16. Para o perfeito entendimento do que foi baseado para a montagem do diagrama em blocos bastará recorrer à equação 3.143.

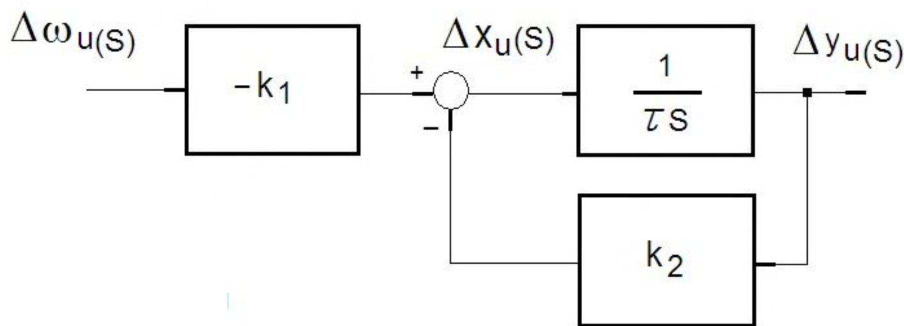



***Figura 3.17 – Diagrama 1 em Blocos do Regulador da Figura 3.16***

Considerando-se agora a equação 3.144, em que os parâmetros se encontram concentrados, um novo diagrama, porém de mesmo teor que aquele mostrado na figura 3.17, pode ser visto na figura 3.18.

A idéia agora é representar o sistema de controle pela óptica de parâmetros como, por exemplo, o da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente $b_p$ e o da constante de tempo do regulador $T_G$.

A transformação é direta e pode ser realizada com a divisão por $k_2$ de todos os blocos do diagrama representado na figura 3.17.

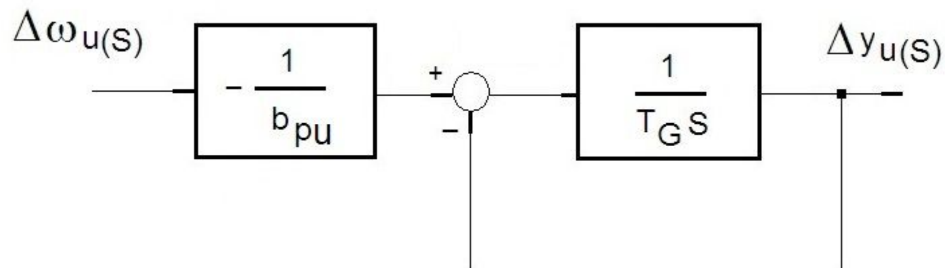



***Figura 3.18 – Diagrama 2 em Blocos do Regulador da Figura 3.16***

---

## EXEMPLO 3.9

Encontrar a resposta ao degrau na referência de velocidade, no domínio do tempo, do regulador de velocidade cujo diagrama é mostrado na figura 3.18. Considerar, para tal, os seguintes parâmetros:

- estatismo permanente $b_{pu} = 0{,}05\ pu/pu$

- constante de tempo do regulador $T_G = 0{,}2\,s$

- degrau de $\Delta\omega_u(t) = -0{,}1\,pu$

Considerar também as condições iniciais nulas.

**Solução:**

Para a solução desse problema, dispõe-se de dois caminhos, a solução analítica através do cálculo manual ou a solução numérica via simulação digital através de softwares específicos. Evidentemente que ambas deverão fornecer o mesmo resultado.

A função de transferência para o modelo é dada pela equação 3.144 e é representada a seguir.

$$\frac{\Delta y_U(S)}{\Delta \omega_U(S)} = \left(-\frac{1}{b_{pu}}\right)\left(\frac{1}{1+T_G S}\right)$$

Nota-se, pelo enunciado do problema, que os dados já se encontram em pu numa base de valores comum e determinada.

Assim:

$$\frac{\Delta y_U(S)}{\Delta \omega_U(S)} = \left(-\frac{1}{0,05}\right)\left(\frac{1}{1+0,2S}\right)$$

Como visto no capítulo 2, a função degrau apresenta a seguinte característica:

$$\pounds\left[k\,u_{-1}(t)\right] = \frac{k}{S}$$

onde $k\,u_{-1}(t)$ a representação da função degrau de amplitude $k$ no plano temporal

O sinal de entrada no plano complexo de Laplace, para o problema atual, será então:

$$\pounds\left[\Delta\omega(t)\right] = \pounds\left[-0,1u_{-1}(t)\right] = \frac{-0,1}{S}$$

Deste modo, a resposta $\Delta y(S)$ de saída do sistema, variação do curso de servomotor, pela aplicação de um sinal de degrau na referência, no presente caso será então:

$$\Delta y_U(S) = \left(-\frac{1}{0,05}\right)\left(\frac{1}{1+0,2S}\right)\Delta\omega_U(S) = -20\,\frac{1}{1+0,2S}\left(\frac{-0,1}{S}\right) = 2\left(\frac{1}{1+0,2S}\right)\left(\frac{1}{S}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{1+0,2S}\right)\left(\frac{1}{S}\right) = \left(\frac{2}{0,2}\right)\left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{1}{1/0,2+S}\right) = \frac{10}{S(5+S)} = \frac{k_1}{S} + \frac{k_2}{S+5}$$

Aplicando a técnica da expansão de Heaviside, vista no capítulo 2, tem-se que:

$$k_1 = \lim_{S \to 0} S\,\frac{10}{S(S+5)} = 2$$

$$k_2 = \lim_{S \to -5} (S+5)\frac{10}{S(S+5)} = -2$$

Logo, obtém-se o polinômio em $\Delta y(S)$ da resposta no plano complexo.

$$\Delta y_u(S) = \frac{2}{S} - \frac{2}{S+5} = 2\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S+5}\right)$$

A resposta $\Delta y(t)$ de saída do sistema, a variação do curso de servomotor pela aplicação de um sinal de degrau na referência de velocidade do regulador mostrado na figura 3.18, sinal $\omega_u(t) = 0{,}1 u_{-1}(t)$, no presente caso será então:

$$\Delta y_u(t) = 2(1 - e^{-5t}) = 2(1 - e^{-t/0{,}2})$$

A figura 3.19 traz o registro da resposta do regulador de velocidade ao degrau aplicado na referência de velocidade, resultado da simulação promovida considerando-se os dados fornecidos pelo enunciado do problema.
Pode-se notar que a constante de tempo do regulador $T_G = 0{,}2\,s$ influencia totalmente a resposta de saída. Na prática, considerando-se que o foco do presente estudo seja controlar a velocidade de uma determinada turbina hidráulica do tipo Francis, Pelton ou Kaplan, por exemplo, isso não será possível de maneira plena em função do processo a ser controlado que exigirá outro bloco com a função de compensação dos atrasos existentes na malha de regulação, tema que será visto mais adiante. Haverá a necessidade de se incorporar ao regulador, através de uma malha de realimentação, o bloco da queda transitória de freqüência ou estatismo transitório.

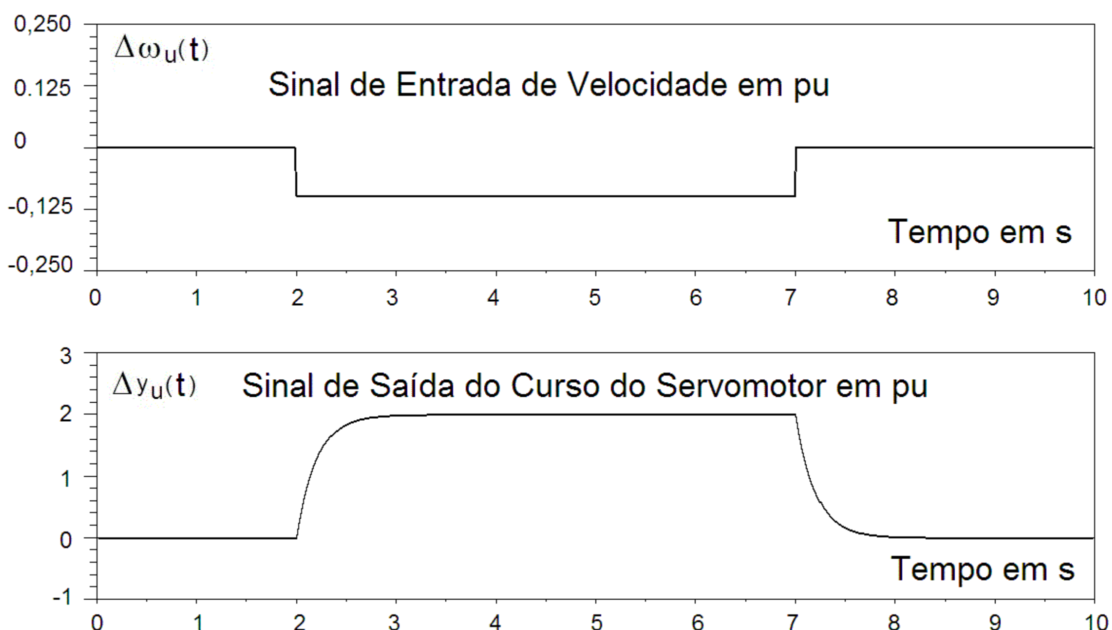


*Figura 3.19 – Resposta ao Degrau Aplicado na Referência de Velocidade Regulador de Velocidade do Exemplo 3.8*

**Nota a respeito do exemplo 3.8:**

Esse tipo de ensaio específico será abordado com mais profundidade quando se estudar o levantamento de características do regulador de velocidade através de ensaios especiais. A constante de tempo do regulador, trata-se de uma das constantes de tempo que aparecem na função de transferência do regulador de velocidade real no plano complexo de Laplace.

---

Observando a equação 3.144, pode-se constatar a influência do parâmetro $bp$, relativo à queda de velocidade permanente ou estatismo permanente, que no regime associado define a seguinte equação:

$$b_{pu} = -\frac{\Delta\omega_u(S)}{\Delta y_u(S)} \tag{3.145}$$

Sabe-se que a potência mecânica é função da abertura das palhetas e, para $\Delta\omega_u = 0$ e $\Delta h_u = 0$, linearizada no ponto de regime permanente, que

$$\Delta y_u = \Delta p_u \tag{3.146}$$

$$b_{pu} = -\frac{\Delta\omega_u(S)}{\Delta p_u(S)} \tag{3.147}$$

A relação 3.145 se refere à chamada queda permanente ou estatismo permanente de abertura enquanto a relação 3.147 se refere à chamada queda permanente ou estatismo de potência.
Supondo-se a linearização da equação 3.146, os valores de queda permanente ou estatismo permanente, tanto em abertura como em potência, se confundem e se fala em apenas queda permanente de velocidade que no Brasil é padronizado em $bp = 0,05\ pu/pu$ na base de valores nominais da máquina considerada.

Considerando agora um valor padronizado de $bp = 0,05\ pu/pu$ ou $5\%$, na base de valores nominais de uma determinada área de geração, pode-se traçar o seguinte gráfico para a queda permanente em potência ativa gerada.

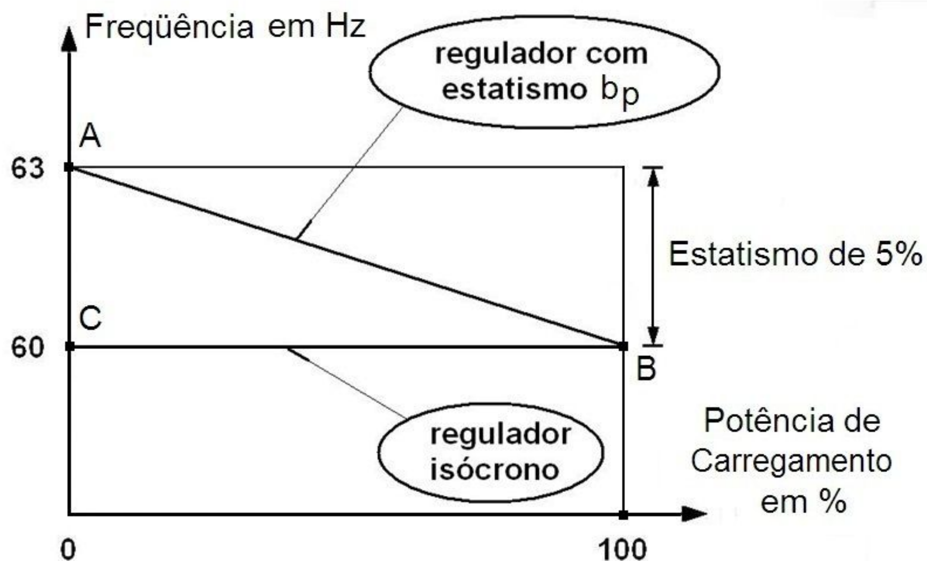



***Figura 3.20 – Curva Característica da Queda ou Estatismo Permanente Área de Geração Operando no Ponto de 100% de Carga***

Notar que, caso se esteja operando, por exemplo, com uma área de geração em *100%* de sua capacidade e sendo a queda permanente de velocidade do sistema de controle ajustado em $bp = 0{,}05\, pu/pu$, da potência nominal da geração desta mesma área, o ponto de serviço no gráfico da figura 3.20 será o ponto *B*.

Caso, por algum motivo, ocorra uma perda de carga, por exemplo, de *100%* da carga que a área de geração alimentava, haverá um acréscimo na freqüência segundo o gráfico da queda permanente. Quando se alimentava uma carga igual ao valor de *100%* da geração, trabalhava-se no ponto *B* do gráfico da figura 3.20 e ao se perder, por qualquer motivo, *100%* da carga alimentada passou-se para um novo ponto, o ponto *A*.

Isto significa que em *B* a freqüência, ou a velocidade, do sistema representando a área de geração encontra-se em $60\,Hz$, que é a velocidade base nominal, e que em *A,* a freqüência resultante, após a perda da carga, passou a ser $63\,Hz$.

Desta maneira, faz-se o seguinte raciocínio relativo à queda permanente neste exemplo anterior:

- houve uma variação de carga de $\Delta p = -100\%$ ou $\Delta pu = -1\, pu$

- houve uma correspondente variação de velocidade de $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, ou melhor, $\Delta\omega = 63 - 60 = +3\,Hz$ que na base de $60\,Hz$ valerá $\Delta\omega_u = +3/60 = +0{,}05\, pu$.

Assim, o valor da queda permanente, utilizando-se a equação 3.147 anterior, em por unidade, na base de potência nominal da área geradora e na base de velocidade nominal elétrica de $60\,Hz$, será:

$$b_{pu} = -\frac{\Delta\omega_u(S)}{\Delta p_u(S)} = -\frac{0,05\,pu}{-1\,pu} = 0,05\,\frac{pu}{pu}$$

Quando o regulador de velocidade é isócrono, tem-se que $bp = 0$ o que, na equação 3.147 anterior, garantirá a condição $\Delta\omega = 0$.
No gráfico da figura 3.20, a curva de um sistema isócrono de regulação de velocidade seria a reta $\overline{CB}$ paralela ao eixo das abscissas.

Para o caso em que haja duas máquinas interligadas a um mesmo sistema tendo cada uma delas um valor próprio de queda permanente de velocidade em pu, numa base comum de valores, a seguinte análise pode ser feita.

Pela figura 3.21, seguinte, obtém-se, para cada uma das máquinas geradoras, as seguintes expressões da queda permanente:

Máquina 1: $b_{pu1} = -\frac{\Delta\omega_{u1}}{\Delta P_{u1}}$

Máquina 2: $b_{pu2} = -\frac{\Delta\omega_{u2}}{\Delta P_{u2}}$

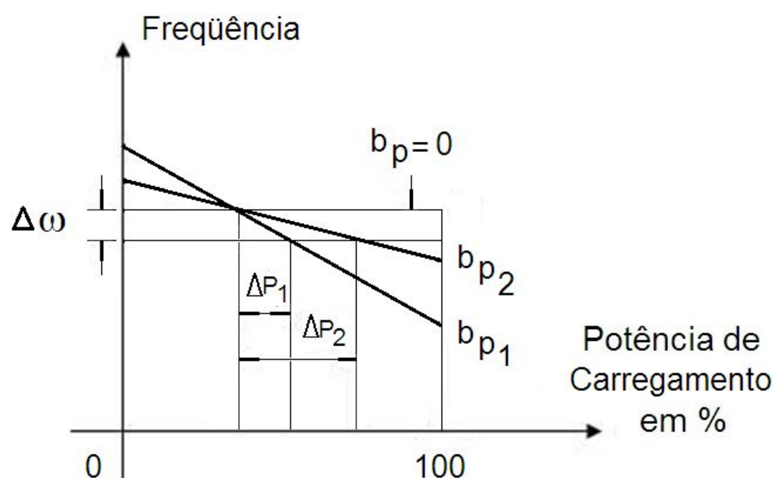



***Figura 3.21 – Características para Duas Máquinas Geradoras Operando em Paralelo***

Como o regime operativo é permanente, entende-se que por se trabalhar apenas com geradores, qualquer que seja o impacto transitório, o desvio final de velocidade será sempre o mesmo para todas as máquinas uma vez que o sistema é síncrono, assim pode-se considerar que $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega$.

Logo, as equações anteriores para as maquinas 1 e 2 tomam o seguinte aspecto:

$$b_{pu1} = -\frac{\Delta\omega_u}{\Delta Pu_1} \quad \therefore \quad \Delta P_{u1} = -\frac{\Delta\omega_u}{b_{pu1}} \tag{3.148}$$

$$b_{pu2} = -\frac{\Delta\omega_u}{\Delta Pu_2} \quad \therefore \quad \Delta P_{u2} = -\frac{\Delta\omega_u}{b_{pu2}} \tag{3.149}$$

A soma das potências individuais fornecerá a potência total desenvolvida pelo sistema formado pelas duas máquinas geradoras, ou seja:

$$\Delta P_{u1} + \Delta P_{u2} = \Delta P_u \quad \therefore \quad -\frac{\Delta\omega_u}{b_{pu1}} - \frac{\Delta\omega_u}{b_{pu2}} = \Delta P_u$$

e

$$\left(\frac{1}{b_{pu1}} + \frac{1}{b_{pu2}}\right) = -\frac{\Delta P_u}{\Delta\omega_u} = \frac{1}{b_{pu\,eq}}$$

Assim, tem-se que:

$$\frac{1}{b_{pu\,eq}} = \frac{1}{b_{pu1}} + \frac{1}{b_{pu2}} \tag{3.150}$$

Assim, conclui-se que é possível existir um valor equivalente para queda permanente de velocidade ou estatismo permanente relativo à associação das duas áreas de geração em função dos valores individuais de cada uma das quedas permanente e que pela equação anterior será:

$$b_{pu\,eq} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b_{pu1}} + \frac{1}{b_{pu2}}\right)} \tag{3.151}$$

Generalizando-se a equação da queda permanente de velocidade para *n* áreas geradoras, operando em rede interligada, vem:

$$b_{pu\,eq} = \frac{-1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_{pu\,i}}} \quad i=1,2,3,... \tag{3.152}$$

Para as duas áreas anteriores, tem-se então que:

$$\frac{b_{pu1}\,b_{pu2}}{b_{pu1}+b_{pu2}} = \frac{-\Delta\omega_u}{\Delta P_u} \quad \therefore \quad \Delta\omega_u = -\frac{b_{pu1}\,b_{pu2}}{b_{pu1}+b_{pu2}}\,\Delta P_u \tag{3.153}$$

Levando-se nas equações 3.148 e 3.149 a expressão de $\Delta\omega$, da equação 3.153, a parcela de carga assumida por área será:

- para a área 1:

$$\Delta P_{u1} = \frac{b_{pu2}}{b_{pu1}+b_{pu2}}\,\Delta P_u \tag{3.154}$$

- para a área 2:

$$\Delta P_{u2} = \frac{b_{pu1}}{b_{pu1}+b_{pu2}}\,\Delta P_u \tag{3.155}$$

As equações 3.154 e 3.155 estipulam a lei de repartição de carga entre duas áreas geradoras com valores próprios de queda permanente de velocidade ou estatismo permanente, na mesma base de valores, operando em paralelo.
Percebe-se que a área 1 absorveu uma parcela da carga total ditada pela equação 3.154 e que a área 2 absorveu uma parcela da carga total ditada pela equação 3.155. Os valores atuais de carga vão depender diretamente dos valores de queda permanente de velocidade ou estatismo permanente de áreas opostas.

Caso ambos os reguladores de velocidade sejam isócronos tem-se que $b_{pu1} = b_{pu2} = 0$ o que, substituídos nas equações 3.154 e 3.155, conduzam a:

$$\Delta P_{u1} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{ indeterminado!!!}$$

e

$$\Delta P_{u2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{ indeterminado!!!}$$

A indeterminação, fisicamente, vem significar que as áreas geradoras não saberão que montante de carga irão absorver. Na prática, tentativas realizadas

nesse sentido culminaram com uma fortíssima oscilação da potência ativa elétrica entre as unidades em questão enquanto que os reguladores de velocidade dessas unidades permaneceram sem atuação sobre as palhetas diretrizes que permaneceram paradas em suas posições iniciais.
Portanto, na operação em rede interligada, a lei de repartição de carga entre as áreas geradoras envolvidas dependerá do valor da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente.
A operação interligada entre áreas geradoras, todas dotadas de reguladores de velocidade isócronos, é impraticável como foi comprovado nos cálculos anteriores.
Por outro lado, considerando-se ainda o sistema formado pelas duas áreas geradoras anteriores; no caso de apenas o regulador de velocidade da área 1 ser isócrono, portanto com $b_{pu1} = 0$, continuando a área 2 com o regulador astático, ou seja, regulador de velocidade com estatismo presente e em um determinado valor, $b_{pu2} = 0{,}05$ pu/pu, por exemplo, também pelas equações 3.154 e 3.155, obtém-se que:

$$\Delta P_{u1} = \frac{b_{p2}}{0 + b_{p2}} \Delta P_u = \Delta P_u$$

e

$$\Delta P_{u2} = 0$$

A situação mostra que a área geradora 1, dotada de um regulador de velocidade isócrono, absorveu toda a carga enquanto a área 2, dotada de um regulador de velocidade astático, não absorveu nada.
Sendo as áreas 1 e 2 formadas de máquinas síncronas geradoras, corre-se o risco de a máquina dotada de regulador isócrono vir a operar como motor se houver uma variação de carga inferior à potência que esta máquina vem deliberando. A figura 3.22 explica melhor esta situação peculiar.

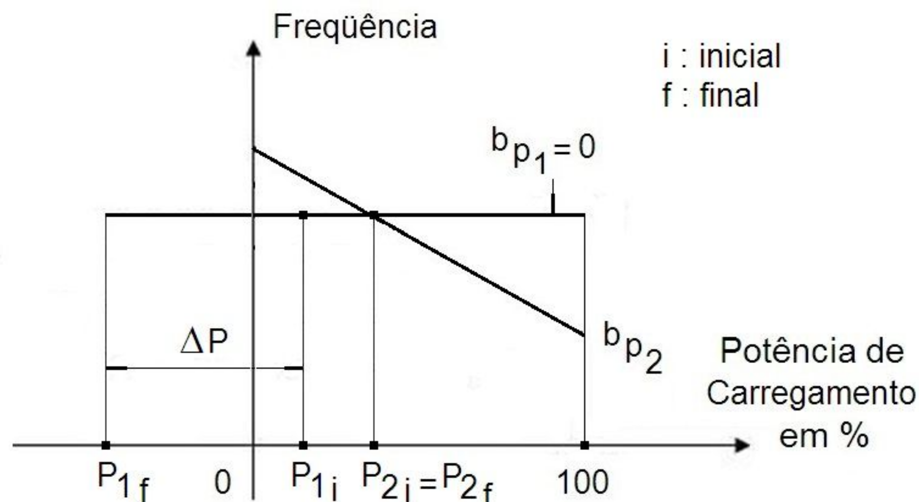


*Figura 3.22 – Características para uma Área Isócrona e outra Astática*

Notar que $P_{1f} < P_{1i}$, como há sobra de energia, a máquina dotada de regulação isócrona tenderá a absorver a parcela a mais, motorizando-se.

Outro exemplo de área dotada de regulação de velocidade isócrona, trata-se do barramento infinito teórico.
Sendo o barramento infinito caracterizado como uma área de regulação de velocidade isócrona, na forma tal qual foi descrito até aqui, torna-se impraticável a interligação, por exemplo, de uma máquina dotada de regulador de velocidade isócrono a um sistema tipo barra de uma SE. A situação é a mesma que se tentar trabalhar com duas áreas geradoras com regulação isócrona de velocidade.
A utilização de reguladores de velocidade isócronos só é válida em sistemas operando em rede isolada do tipo diesel de emergência ou de pequenas centrais hidrelétricas tomando-se o devido cuidado de isolar eletricamente os geradores cuja regulação de velocidade seja isócrona.
Lembrar também que, em instalações dotadas de 2 ou mais sistemas diesel de emergência, os geradores diesel e as suas respectivas cargas devem apresentar circuitos separados de modo que o sistema de comando e seleção de cargas não permita a operação desses dispositivos em paralelo.
Nos casos anteriores, lembrar que a máquina dotada de regulação isócrona deverá apresentar grande capacidade para as operações de variação de carga.

Continuando as análises acerca do regulador de velocidade, e buscando um tipo de regulador que atenda aos requisitos operacionais desejados para um perfeito controle automático, lembra-se que ficou faltando a solução do problema do atraso inserido na malha de regulação de velocidade da turbina hidráulica em função da presença de inércias mecânico-hidráulicas próprias do processo.
Para as turbinas hidráulicas, devido às características já mencionadas, surgiu a necessidade de definição de um dispositivo compensador dos efeitos indesejáveis à regulação de velocidade provocados pela ação de inércias do processo.
De estudos, concluiu-se que o processo de compensação via realimentação era o mais lógico e o mais prático sendo que esta nova implementação deveria criar uma ação de oposição à operação do sistema de controle da velocidade frente a desvios rápidos e bruscos de freqüência ou da velocidade de rotação da turbina.
Este dispositivo não poderia, porém, interferir no controle normal da velocidade cujos fenômenos da variação da freqüência de rotação da turbina são caracterizados por movimentos mais lentos e definidos como normais segundo características próprias da área controlada.
Surgiu então o regulador que, além da queda permanente ou estatismo permanente, apresentava a chamada queda transitória de velocidade ou estatismo transitório que nos primeiros reguladores de velocidade mecânico-hidráulicos era elaborada a partir de um dispositivo conhecido pelo nome de *spring-dash-pot*, obtido pela associação série de um amortecedor a óleo de

acionamento com uma mola cujos efeitos agregados resolveriam o problema do atraso na resposta global da malha de regulação de velocidade. Convém lembrar que, um dos efeitos indesejáveis gerados por atrasos existentes na malha de regulação de velocidade da turbina hidráulica é a presença de oscilações sustentadas durante as manobras normais de controle. Essas oscilações trazem consigo problemas tais como excursões desnecessárias dos servomotores das palhetas diretrizes podendo ocasionar baixa pressão do sistema hidráulico vindo até comandar desligamentos de geradores por ação de *trip* da proteção de baixa pressão de óleo de serviço. Como, via de regra, a proteção de baixa pressão de óleo de serviço, principalmente em grandes instalações hidrelétricas, sempre vem acompanhada de fechamento de comporta, ocorrências desse tipo geram grandes transtornos e perda de tempo para a recomposição e restabelecimento da geração.

Fisicamente, o dispositivo da queda transitória de velocidade tem como função introduzir, no grupo de regulação, a ação de um compensador que reduz o ganho do regulador nas altas freqüências, mantendo, porém, inalterado o ganho permanente nas baixas freqüências de oscilação da velocidade da turbina. Para os sistemas atuais – ano 2010 – a faixa de alta freqüência é verificada a partir de $1Hz$, com medições realizadas na região do Triângulo Mineiro. Normalmente, a faixa de alta freqüência é caracterizada por valores de freqüência superiores àqueles verificados na dinâmica operativa do conduto e da tubulação que geralmente permanecem entorno da faixa de $0,5Hz$, um valor também medido em grandes instalações hidrelétricas.
A figura 3.23 mostra o esquema básico de um regulador de velocidade dotado de queda permanente e de queda transitória de velocidade.

Pela figura 3.23, analogamente à equação 3.139 anterior, no domínio da transformada de Laplace e dentro dos valores pu da base de valores estipulada previamente, tem-se, para o movimento $\Delta x$ da haste da válvula distribuidora, que:

$$\Delta x_U(S) = \Delta x_{UU}(S) + \Delta x_{ZU}(S) \qquad (3.156)$$

Aqui, a equação 3.156 tem como objetivo relacionar o movimento $\Delta x$ da válvula distribuidora com os movimentos $\Delta x_U$ e $\Delta x_Z$, respectivamente, do sensor de velocidade de rotação do grupo e do eixo comum do conjunto amortecedor-mola.

Através da semelhança de triângulos, obtém-se, para a equação anterior, que:

$$\Delta x_U(S) = \frac{d}{c+d}\Delta u_U(S) + \frac{c}{c+d}\Delta z_U(S) \qquad (3.157)$$

Mas sabe-se que:

$$\Delta u_U(S) = -k_\omega \frac{\omega_0}{X_0} \Delta\omega(S) + \Delta t_U(S) \quad (3.158)$$

Aqui também, através da semelhança de triângulos, obtém-se, para a equação anterior, o seguinte desenvolvimento:

$$\Delta u_U(S) = -k_\omega \frac{\omega_0}{X_0} \Delta\omega_U(S) - \frac{a}{a+b} \Delta y_U(S) \quad (3.159)$$

Para a equação de $\Delta z_U(S)$, considerando pequenos movimentos, tem-se, pela relação de forças do sistema mecânico de translação que compõe o sistema amortecedor-mola da figura 3.23:

$$\frac{\Delta z_U(S)}{\Delta v_U(S)} = \frac{f_U(S)}{f_V(S)} \quad (3.160)$$

onde

$f_U$ : força associada ao sensor de velocidade do conjunto girante
$f_V$ : força associada ao eixo de acoplamento amortecedor - mola

Chamando de $k$ a compliância da mola e de $D$ o coeficiente de viscosidade cinemática do amortecedor tem-se que:

Força $f_V(t)$ no ponto $A$:

$$f_V(t) = D v(t) + \frac{1}{k} \int_0^t v(t) dt \quad (3.161)$$

No domínio da transformada de Laplace a equação anterior toma a seguinte forma:

$$f_V(S) = (D + \frac{1}{kS}) \upsilon(S) \quad (3.162)$$

onde $\upsilon$ é a velocidade de translação do eixo de acoplamento amortecedor-mola




***Figura 3.23 – Regulador Automático de Velocidade com Realimentações Permanente e Transitória de Posição das Palhetas do Distribuidor***

Força $f_Z(t)$ no ponto $B$:

$$f_Z(t) = Dv(t) \qquad (3.163)$$

No domínio da transformada de Laplace a equação anterior fica:

$$f_Z(S) = D\upsilon(S) \qquad (3.164)$$

Levando-se as expressões das equações 3.162 e 3.164 na equação 3.160 vem:

$$\frac{\Delta z_u(S)}{\Delta v_u(S)} = \frac{T_A S}{1+T_A S} \qquad (3.165)$$

onde $T_A = kD$ é a constante de tempo do sistema amortecedor-mola também conhecida como constante de tempo da queda transitória de velocidade ou estatismo transitório

Ainda da figura 3.23, obtém-se a seguinte relação $\frac{\Delta v_u(S)}{\Delta y_u(S)} = -\frac{e}{f}$ que multiplicada pela equação 3.165, membro a membro, permite que se escreva:

$$\frac{\Delta z_u(S)}{\Delta y_u(S)} = -\frac{e}{f}\frac{T_A S}{1+T_A S} \qquad (3.166)$$

A partir das equações 3.159 e 3.166, a equação 3.157 passa a apresentar a seguinte forma:

$$\Delta x_u(S) = \frac{d}{c+d}\left[-k_\omega \frac{\omega_0}{X_0}\Delta\omega_u(S) - \frac{a}{a+b}\Delta y_u(S)\right] - \frac{c}{c+d}\frac{e}{f}\frac{T_A S}{1+T_A S}\Delta y_u(S)$$

Ou melhor

$$\Delta x_u(S) = -k_\omega \frac{\omega_0}{X_0}\frac{d}{c+d}\Delta\omega_u(S) - \frac{ad}{(c+d)(a+b)}\Delta y_u(S) - \frac{c}{c+d}\frac{e}{f}\frac{T_A S}{1+T_A S}\Delta y_u(S)$$

Resumindo a equação anterior, com a presença de parâmetros concentrados, tem-se que:

$$\Delta x_u(S) = -k_1\,\Delta\omega_u(S) - k_2\,\Delta y_u(S) - k_3\frac{T_A S}{1+T_A S}\Delta y_u(S) \qquad (3.167)$$

onde

$$k_1 = k_\omega \frac{\omega_0}{X_0}\frac{d}{c+d}$$

$$k_2 = \frac{ad}{(c+d)(a+b)}$$

$$k_3 = \frac{c}{c+d}\frac{e}{f}\frac{T_A S}{1+T_A S}$$

Da figura 3.23 também se pode extrair que:

$$\Delta y_u(S) = \frac{1}{\tau S} \Delta x_u(S) \tag{3.168}$$

Levando-se a expressão de $\Delta x_u(S)$, da equação 3.168, na equação 3.167 vem:

$$S\,\Delta y_u(S) = -k_1\,\Delta\omega_u(S) - k_2\,\Delta y_u(S) - k_3 \frac{T_A S}{1+T_A S} \Delta y_u(S) \tag{3.169}$$

Logo

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta\omega_u(S)} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{1+T_A S}{1+(\frac{\tau}{k_2}+T_A+\frac{k_3}{k_2}T_A)S+\frac{\tau}{k_2}T_A S^2}$$

Normalmente $T_A \gg \frac{\tau}{k_2}$ o que permite simplificar a equação precedente da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta\omega_u(S)} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{1+T_A S}{1+(1+\frac{k_3}{k_2})T_A S+\frac{\tau}{k_2}T_A S^2} \tag{3.170}$$

Analisando melhor o polinômio denominador da equação 3.170, pode-se obter o seguinte desenvolvimento onde aprecem as duas constantes de tempo $T_1$ e $T_2$:

$$1+(1+\frac{k_3}{k_2})T_A S + \frac{T}{k_2}T_A S^2 \equiv (1+T_1 S)\,(1+T_2 S) = 1+(T_1+T_2)S+T_1 T_2 S^2$$

Pela condição de identidade polinomial obtêm-se as seguintes relações:

$$T_1+T_2 = (1+\frac{k_3}{k_2})T_A$$

e

$$T_1 T_2 = \frac{\tau}{k_2} T_A$$

Como na prática $T_1 \gg T_2$ vem que $T_1 \cong (1+\frac{k_3}{k_2})T_A$.

Deste modo:

$$T_2 \cong \frac{}{k_2} T_A \frac{1}{T_1} = \frac{}{k_2(1+\frac{k_3}{k_2})}$$

Caso a parcela $\frac{}{k_2}$ seja considerada tem-se que:

$$T_1 \cong (1+\frac{k_3}{k_2})T_A + \frac{}{k_2}$$

e

$$T_2 \cong \frac{}{k_2(1+\frac{k_3}{k_2}) + \frac{\tau}{T_A}}.$$

Analisando a equação 3.170, nota-se que em regime permanente, tendo-se uma função de transferência na forma polinomial do sistema regulador de velocidade da turbina hidráulica, para se calcular o valor do ganho em regime permanente, bastará fazer a variável da transformada igual à zero de modo que a relação fica resumida a seguinte relação:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{k_1}{k_2} = -\frac{1}{b_{pu}}$$

Logo, o valor da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente será $b_{pu} = \frac{k_2}{k_1}$ em pu/pu, do mesmo modo que o valor da queda transitória de velocidade ou estatismo transitório será $b_{tu} = \frac{k_3}{k_1}$ em pu/pu.

Assim, as constantes de tempo $T_1$ e $T_2$ ficam do seguinte modo definidas:

a) constante de tempo $T_R$ de escoamento ou de *washout*:

$$T_R = T_1 = (1+\frac{k_3/k_1}{k_2/k_1})T_A + \frac{\tau/k_1}{k_2/k_1} = (1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A + \frac{T_y}{b_{pu}} \qquad (3.171)$$

b) constante de tempo $T_G$ do regulador:

$$T_G = T_2 = \frac{}{k_2(1+\frac{k_3/k_1}{k_2/k_1}) + \frac{\tau}{T_A}} = \frac{\tau/k_2}{(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}}) + \frac{\tau/k_2}{T_A}} = \frac{\frac{T_y}{b_{pu}}}{(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}}) + \frac{T_y}{b_{pu}T_A}} \qquad (3.172)$$

A constante de tempo $T_y = \; /k_1$ é conhecida como constante de tempo de integração da soma dos efeitos da válvula distribuidora a do servomotor. Muitas vezes, por simplificação, é apenas chamada de constante de tempo do servomotor.

Com isto, a equação resumida do regulador de velocidade da turbina hidráulica, regulador dotado de queda transitória ou estatismo transitório, será:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = \frac{-1}{b_{pu}} \frac{(1+T_A S)}{(1+T_R S)(1+T_G S)} \qquad (3.173)$$

No caso em que a parcela $\frac{T_y}{b_p}$ seja desconsiderada na equação 3.171, tem-se que:

$$T_R = (1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A \qquad (3.174)$$

e no caso em que a parcela $\frac{T_y}{b_{pu}T_A}$ seja desconsiderada no denominador da equação 3.172, tem-se que:

$$T_G = \frac{T_y}{b_{pu}(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})} \qquad (3.175)$$

Como na prática $T_R >> T_G$, o que se faz é desprezar, também, a constante de tempo $T_G$ de modo que a função de transferência final, simplificada, seja a seguinte:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = \frac{-1}{b_{pu}} \frac{(1+T_A S)}{(1+T_R S)} = \frac{-1}{b_{pu}} \frac{(1+T_A S)}{1+(1+\frac{b_t}{b_p})T_A S} \qquad (3.176)$$

Através do processo da realimentação transitória, culminando com a introdução do parâmetro queda transitória de velocidade ou estatismo transitório por meio de uma escolha adequada de valores, tanto para o valor do estatismo quanto para sua constante de tempo, prova-se que o problema da inconveniência das oscilações rápidas da velocidade tem seu efeito minimizado uma vez que este bloco compensador introduz um valor elevado de regulação reduzindo o ganho do regulador nas altas freqüências, não alterando o ganho inicial para as baixas freqüências.

A figura 3.24 traz estampado o diagrama em blocos, no plano complexo de Laplace, do sistema regulador de velocidade dotado de queda transitória ou estatismo transitório.

Para tal, bastará a utilização da equação 3.169, numa forma mais adequada, conforme é mostrado na equação 3.177, seguinte.

$$\Delta y_U(S) = \frac{1}{\tau S}\left[-k_1\,\Delta\omega_U(S) \;-\; k_2\,\Delta y_U(S) \;-\; k_3\,\frac{T_A S}{1+T_A S}\,\Delta y_U(S)\right] \quad (3.177)$$

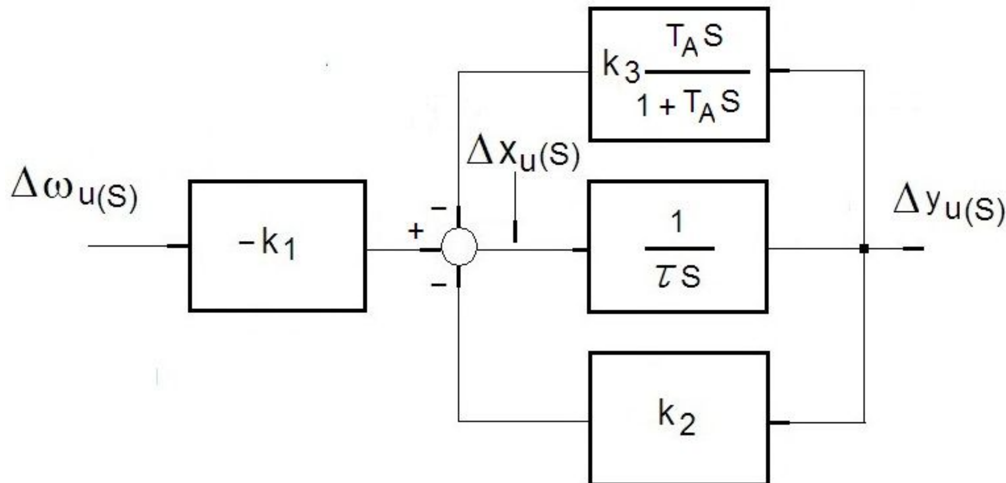



***Figura 3.24 – Diagrama em Blocos do Regulador de Velocidade da Figura 3.23***

Para uma melhor fixação das idéias, em todas as análises utilizaram-se modelos puramente mecânicos, porém os atuais modelos de reguladores de velocidade apresentam nas partes de comando, tacométrica e de pré-amplificação componentes eletrônicos que atuam sobre um dispositivo atuador, geralmente do tipo eletro-hidráulico, que converte pulsos eletrônicos em movimentos de uma válvula piloto que, por sua vez atua na válvula distribuidora que comanda, por fim, o curso do servomotor das palhetas do distribuidor.

Também nos reguladores modernos os sinais de realimentação são reconvertidos em sinais elétricos mediante o uso dos chamados transdutores.

São utilizadas também implementações que visam a comutação de parâmetros como, por exemplo, a queda transitória de maneira automática segundo a modalidade operativa, por exemplo, operação em modo rede interligada ou em modo rede isolada.

Lembrar que o ajuste ideal para os parâmetros de um regulador de velocidade vem intimamente ligado às características do sistema a que este se encontra vinculado em função da modalidade operativa como será visto mais à frente.

---

## EXEMPLO 3.10

Um gerador de uma UHE de potência $10\,MVA$, trabalhando isolado, está alimentando um conjunto de cargas de $10\,MW$. Sabendo-se que o regulador de velocidade tem estatismo permanente de $5\%$ na capacidade da máquina encontrar o valor final da freqüência elétrica caso haja um desligamento de $5\,MW$ da carga.
Considerar, para tal, que todas as cargas sejam resistivas.

**Solução:**

Primeiramente deve-se fazer a verificação quanto à base de valores adotada para a solução do problema.

Potência base do sistema: $P_0 = 10\,MVA$

Freqüência base: $\omega_0 = 2\pi\,60 \cong 377\,rad/s \;\;\therefore\;\; f_0 = 60\,Hz$

Potência gerada pelo sistema atual: $P_0 = 10\,MW \;\;\therefore\;\; p_u = \dfrac{p}{P_0} = \dfrac{10}{10} = 1\,pu$

Carga desligada: $\Delta p = 5\,MW \;\;\therefore\;\; \Delta p_u = \dfrac{\Delta p}{P_0} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5\,pu$

A equação da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente de potência do regulador de velocidade da máquina em questão é dada pela equação 3.147, repetida a seguir.

$$b_{pu} = -\frac{\Delta\omega_u}{\Delta p_u} = -\frac{\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}}{\dfrac{\Delta p}{P_0}}$$

O valor fornecido pelo enunciado do problema para o estatismo permanente encontra-se na base da máquina, ou seja, $P_0 = 10\,MVA$ e $\omega_0 = 60\,Hz$.

Na equação anterior do estatismo notar que:

$b_p$ é dada em pu/pu e vale $5\%$, ou seja, $b_{pu} = 0{,}05$ pu/pu
$\Delta\omega$ é dada em $rad/s$ e é o que se quer
$\omega_0$ é dada em $rad/s$ e está associada à freqüência de $60\,Hz$
$\Delta p$ é dada em $MW$ e vale $5\,MW$ ou $\Delta p_u = 0{,}5\,pu$
$P_0$ é dada em $MW$ e vale $10\,MW$ ou $P_{0u} = 1\,pu$

Nesse exemplo será adotada a solução gráfica por razões didáticas, porém o leitor poderá efetuar os cálculos de maneira analítica para verificação.

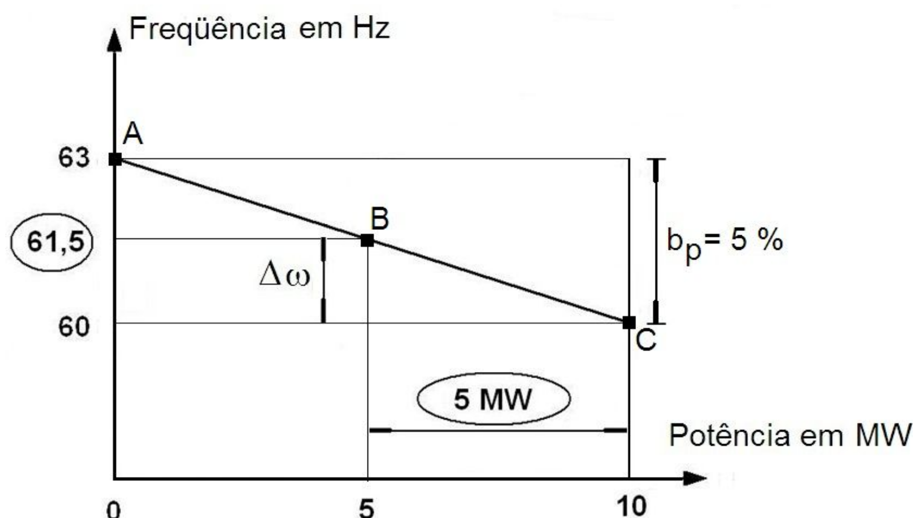



***Figura 3.25 – Curva de Carga do Exemplo 3.10***

No gráfico da figura 3.25, percebe-se que o sistema se encontrava em operação, inicialmente, no ponto C, despachando uma potência ativa de $10\,MW$, portanto, alimentando cargas resistivas em sua totalidade. Como a regulação automática de velocidade é regida pelo estatismo permanente $b_p = 0{,}05$ pu/pu, ao se perder metade da carga ou $\Delta p_U = -0{,}5\,pu$ a freqüência em regime permanente subiu na proporção, dando no ponto B do gráfico. Nesse ponto a freqüência de equilíbrio atingirá os $61{,}5\,Hz$ e continuará a alimentar as cargas remanescentes. Isso se dá por dois motivos: o primeiro é que a regulação automática de velocidade é regida pelo estatismo permanente $b_p = 0{,}05$ pu/pu, na base da máquina; segundo porque o sistema é isolado sendo que é a própria máquina que dita a freqüência final como ocorreria caso a essa máquina estivesse conectada a um barramento infinito.

---

## <u>EXEMPLO 3.11</u>

Um gerador de uma UHE de potência $10\,MVA$, trabalhando isolado, está alimentando um conjunto de cargas de $10\,MW$. Sabendo-se que o regulador de velocidade utilizado é do tipo isócrono encontrar o valor final da freqüência elétrica caso haja um desligamento de $5\,MW$ da carga.
Considerar, para tal, que todas as cargas sejam resistivas.

**Solução:**

O problema atual é semelhante àquele verificado no exemplo 3.10, anterior, diferindo apenas no fato de que o regulador agora se trata de um regulador de velocidade do tipo isócrono, ou seja, de estatismo permanente nulo, matematicamente $b_p = 0$.

No gráfico da figura 3.26, do mesmo modo que no exemplo anterior, percebe-se que o sistema se encontrava em operação, inicialmente, no ponto C, despachando uma potência ativa de $10\,MW$, portanto, alimentando cargas resistivas em sua totalidade. Como a regulação automática de velocidade é regida pelo estatismo permanente $b_p = 0$, ou seja, um regulador de velocidade isócrono, ao se perder metade da carga ou $\Delta p_U = -0{,}5\,pu$, a freqüência em regime permanente não se alterou e o sistema continuou a alimentar as cargas remanescentes. Em outras palavras, a despeito da variação da carga, a freqüência permaneceu em $60\,Hz$.
Esse arranjo acaba sendo uma boa opção de controle para sistemas que trabalham isolados

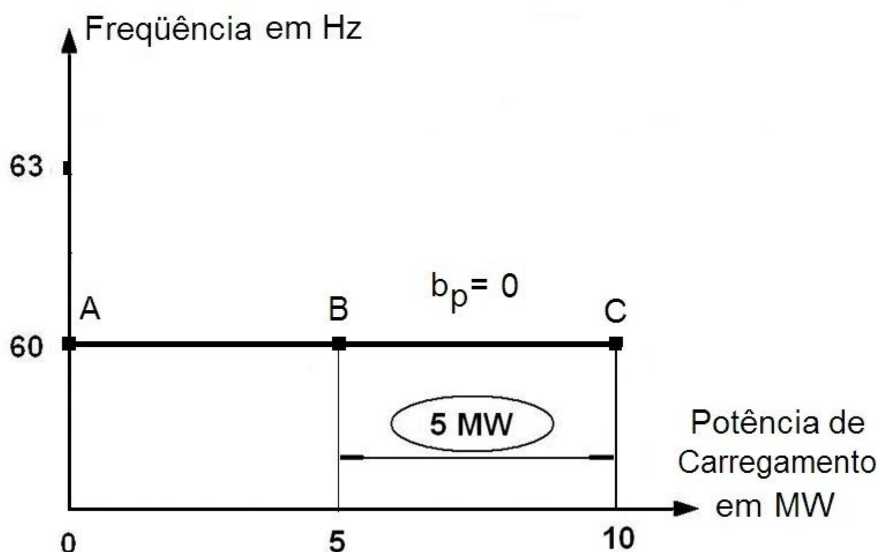



***Figura 3.26 – Curva de Carga do Exemplo 3.11***

Nota a respeito do exemplo 3.11:

A regulação isócrona de velocidade é muito adotada para sistemas com seletividade de cargas tais como sistemas de Diesel de emergência ou em sistemas que dispõem de apenas uma unidade geradora. O problema da regulação isócrona de velocidade é a impossibilidade de se trabalhar com unidades de geração em paralelo. Trata-se de uma boa medida para unidades

de geração que trabalham de maneira isolada. Embora seja uma boa medida para sistemas que trabalham com unidades isoladas, deve-se saber que a carga máxima conectada a cada unidade não poderá exceder à carga máxima unitária sob o risco de sobrecarga e possível dano ao gerador. Também é importante saber que as unidades que trabalham com regulador de velocidade isócrono não poderão dispor de dispositivos de seleção e de divisão de cargas com outras unidades, nem no modo automático tão menos manual.

---

A figura 3.24, que representa o diagrama em blocos de um regulador de velocidade de uma turbina hidráulica padrão, dotado de certos recursos como os estatismos permanente e transitório, a partir do que foi chamado de regulador primitivo cujo diagrama encontra-se estampado na figura 3.14, ainda não se trata de uma estrutura padrão conhecida. Trata-se apenas de um diagrama de um modelo bem particular aqui desenvolvido para efeito de conhecimento em termos didáticos apenas.

A equação 3.173 é a equação padrão que se mostra apresentada na literatura técnica de regulação de velocidade de turbinas hidráulicas, equação que reconhecidamente representa a função de transferência de um regulador de velocidade padrão.
Na figura 3.27 tem-se o diagrama em blocos do regulador de velocidade com os parâmetros principais indicados na equação 3.173, sem a representação da função de transferência da válvula piloto, dispositivo que será abordado em seguida.

---

## <u>EXEMPLO 3.12</u>

Mostrar que o diagrama em blocos da figura 3.27 seguinte tem sua função de transferência no plano complexo de Laplace dada pela equação 3.176.
Considerar que todos os parâmetros e variáveis de estado envolvidos têm a mesma identificação vista até aqui e se encontrando perfeitamente normalizados em pu numa base comum de valores.

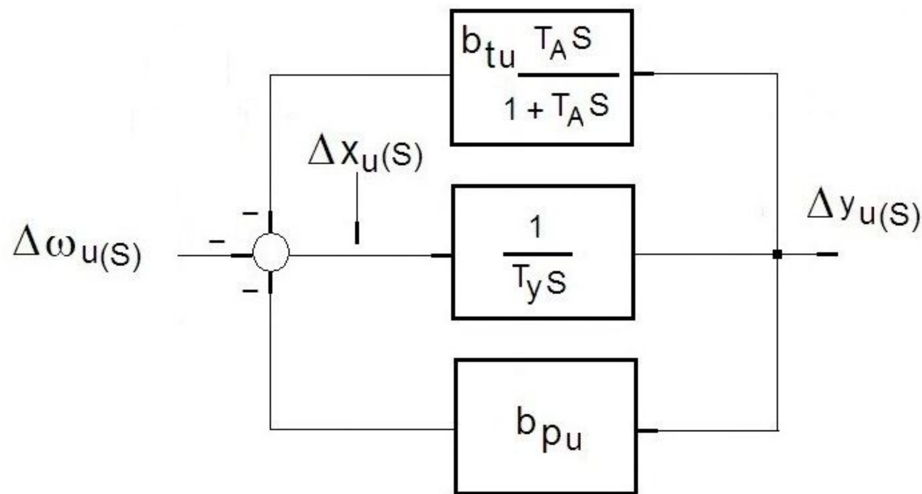



***Figura 3.27 – Diagrama em Blocos do Exemplo 3.12***

**Solução:**

Como uma possível resposta a uma função singular do tipo degrau, aplicada na referência de velocidade do diagrama em blocos da figura 3.27, por exemplo, venha a gerar um polinômio racional na forma de frações próprias, é admissível a obtenção da função de transferência global para esse caso. A idéia é que se possa efetuar a comparação com a equação 3.176, aqui repetida por comodidade. A equação 3.176 é a seguinte:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = \frac{-1}{b_{pu}}\frac{(1+T_A S)}{(1+T_R S)} = \frac{-1}{b_{pu}}\frac{(1+T_A S)}{1+(1+\frac{b_t}{b_p})T_A S}$$

Para a obtenção da função de transferência global do modelo do diagrama em blocos da figura 3.27, será utilizada a clássica relação saída pela entrada, da equação 2.78, com base na figura 2.9. Esta equação estabelece o seguinte, tomando-se como entrada a variação da velocidade de rotação e como saída a variação do curso do servomotor ou a posição da haste de comando das palhetas diretrizes do distribuidor da turbina hidráulica:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{g(S)}{1+g(S)h(S)}$$

No caso presente, tem-se que:

$$g(S) = \frac{1}{T_y S}$$

e

$$h(S) = b_{pu} + b_{tu}\frac{T_A S}{1+T_A S} = \frac{b_{pu} + (b_{pu} + b_{tu})T_A S}{1+T_A S}$$

Assim, a função de transferência, no plano complexo, tomará o seguinte aspecto em função das funções de transferência específicas de cada bloco:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{\frac{1}{T_y S}}{1+\frac{1}{T_y S}[\frac{b_{pu} + (b_{pu} + b_{tu})T_A S}{1+T_A S}]} =$$

$$= -\frac{1+T_A S}{T_y S(1+T_A S) + b_{pu} + (b_{pu} + b_{tu})T_A S}$$

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1+T_A S}{b_{pu} + [(b_{pu} + b_{tu})T_A + T_y]S + T_y T_A S^2} =$$

$$= -\frac{1}{b_{pu}}\frac{1+T_A S}{1+[(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A + \frac{T_y}{b_{pu}}] S + \frac{T_y T_A}{b_{pu}} S^2}$$

Agora, deve-se fazer uma análise técnica quanto a possíveis simplificações. Para tal, tomando como método de avaliação as análises e os valores típicos atribuídos a parâmetros de sistemas de regulação de velocidade de turbinas hidráulicas, apresentados nas referências 1 e 22, a equação anterior pode ser resumida na seguinte relação:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}}\frac{1+T_A S}{1+[(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A + \frac{T_y}{b_{pu}}] S}$$

Nota-se que o termo de segunda ordem no polinômio característico da função de transferência analisada acabou desprezado. Essa simplificação é adotada na literatura de regulação. Também a condição de se ter $(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A >> \frac{T_y}{b_{pu}}$ pode ser aceita sem comprometer o resultado final o que permite outra simplificação.

Assim, tem-se, finalmente, que:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{1+T_A S}{1+[(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A]S} = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{(1+T_A S)}{(1+T_R S)}$$

**Nota a respeito de exemplo 3.12:**

Nas experiências de levantamento de funções de transferência de sistemas de regulação de velocidade, via de regra, os registros obtidos de ensaios de campo sempre mostraram que, para sistemas de regulação de velocidade do tipo padrão, a consideração da constante de tempo do regulador, constante $T_G$, cujo valor foi desprezado nos cálculos do presente problema, praticamente não aparece.
Os registros da figura 3.28 se referem a duas situações onde foram realizadas simulações:

a) simulação cujo modelo foi validado por intermédio de ensaios de campo referente a uma instalação hidrelétrica de porte;

b) simulação utilizando-se os cálculos quando foram considerados os parâmetros $\frac{T_y}{b_{pu}}$ da equação 3.171 e $\frac{T_y}{b_{pu}T_A}$ da equação 3.172.

Os valores dos parâmetros levantados no campo são os seguintes:

$b_{pu} = 0{,}05\ pu/pu$

$b_{tu} = 0{,}5\ pu/pu$

$T_A = 5{,}2\ s$

$T_y = 0{,}2\ s$

$\Delta \omega_0 = 0{,}1\ pu$ [degrau na referência de velocidade]

A partir dos dados, obtêm-se os parâmetros seguintes:

- a partir da equação (3.174)

$$T_R = (1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A + \frac{T_y}{b_{pu}} = (1+\frac{0{,}5}{0{,}05})5{,}2 + \frac{0{,}2}{0{,}05} = 57{,}2 + 4 = 61{,}2\ s$$

- a partir da equação (3.175)

$$T_G = \frac{T_y}{b_{pu}(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})} = \frac{0{,}2}{0{,}05(1+\frac{0{,}5}{0{,}05})} = 0{,}36\ s$$

As duas funções de transferência a serem comparadas serão então:

$$\frac{\Delta y_U(S)}{\Delta \omega_U(S)} = -\frac{1}{0.05}\,\frac{1+5.2S}{1+61{,}2S} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta y_U(S)}{\Delta \omega_U(S)} = -\frac{1}{0.05}\,\frac{1+5.2S}{(1+61{,}2S)(1+0{,}36S)}$$

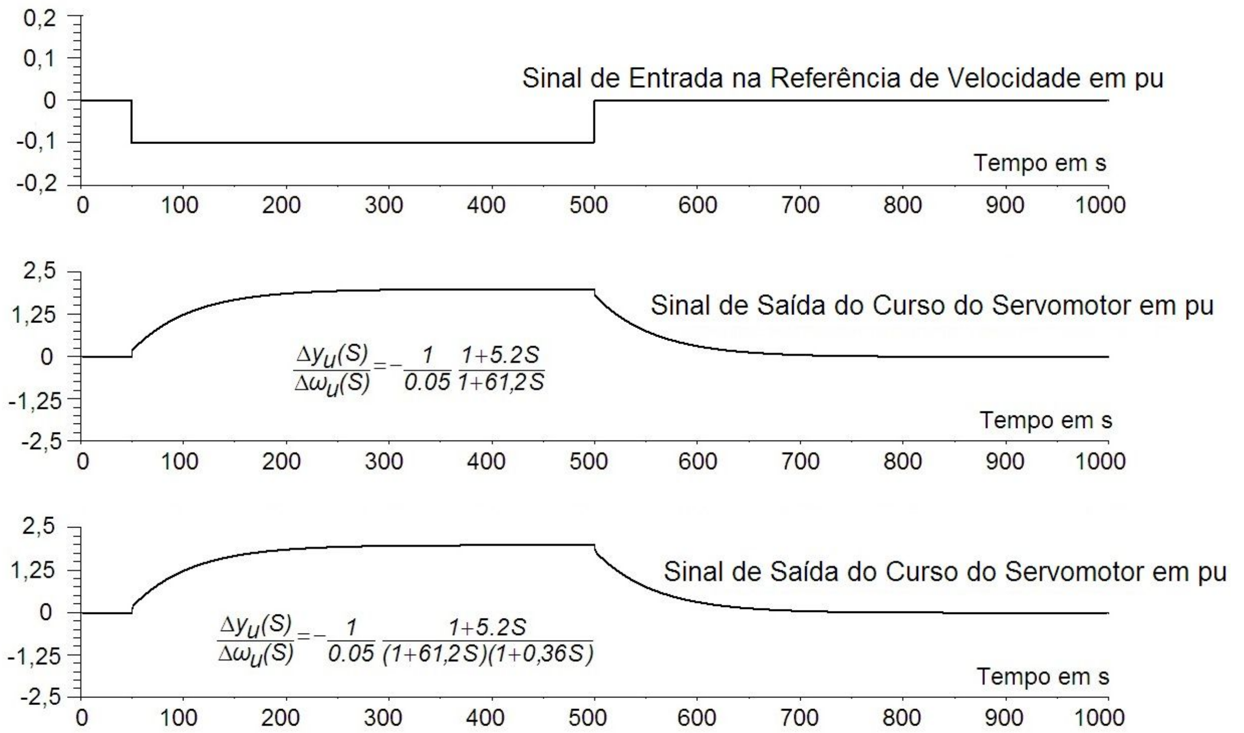



***Figura 3.28 – Respostas ao Degrau na Referência do Regulador de Velocidade para Comparação de Funções de Transferência***

Nota-se que as duas respostas registradas na figura 3.28 estão muito próximas garantindo que ao se desprezar a constante de tempo $T_G$, na função de transferência do regulador de velocidade da figura 3.27, praticamente não se introduziram alterações substanciais na resposta do sistema.

---

Nos modelos de regulador de velocidade desenvolvidos para turbinas hidráulicas, apresentados anteriormente, acabou-se suprimindo, para efeito didático, um importante dispositivo que por sua capacidade de resposta se identifica como o centro do controle. Trata-se da válvula proporcional também conhecida por válvula piloto, atuador mecânico-hidráulico, atuador eletro-hidráulico, atuador eletrônico-hidráulico entre outros nomes.
Na realidade, tais dispositivos são dotados de tempos de resposta bem diminutos em relação aos demais dispositivos do regulador de velocidade sendo que, em estudos de estabilidade no âmbito dos SEPs, sua representatividade acaba por ser desprezada.
Ainda assim, houve situações em que o estudo via modelagem dos SEPs não funcionou quando o problema estava ocultado no sistema atuador da válvula proporcional.

Fato é que, para o projetista ou o engenheiro de controle, o grau de aprofundamento da modelagem dependerá unicamente do julgamento técnico a ser adotado na sua análise crítica.
Os reguladores de velocidade de tecnologia dos anos 50 e 60 dispunham de um conjunto em que a válvula proporcional vinha associada a um grupo do tipo amortecedor-mola, sediado dentro de um cárter, mergulhado em óleo lubrificante. Geralmente, esse dispositivo era diretamente acoplado ao conjunto de pêndulos que girava e trabalhava como sensor de velocidade ou tacômetro do regulador.
Nos anos 70 apareceram os atuadores eletro-hidráulicos e eletrônico-hidráulicos de tecnologia analógica. Eram dispositivos únicos, de grande porte, que se utilizava de um sistema de imãs permanentes. Eram pesados, porém guardavam excelente resposta tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência.
Nos anos 80 e depois, apareceram os sistemas integrados onde a válvula proporcional vinha diretamente acoplada ao dispositivo eletrônico de conversão e comando. São sistemas eletrônico-hidráulicos de tecnologia digital que trabalham com realimentação própria do *spool* da servoválvula.
Uma das principais funções da válvula proporcional é promover o controle, de modo linear, do fluxo de óleo de acionamento para o servomotor principal de comando das palhetas diretrizes do distribuidor da turbina hidráulica através da ação de amplificação hidráulica intermediada pela válvula distribuidora. Praticamente, a vazão de óleo para o servomotor principal depende do deslocamento da válvula proporcional e da diferença de pressão assim gerada. Essa relação tem de ser linear para garantir que o controle também o seja.
Em válvulas proporcionais que utilizam o controle eletrônico o procedimento é o mesmo que aquele verificado nas válvulas do tipo mecânico sendo o equacionamento básico análogo.
As válvulas proporcionais geralmente apresentam resposta a altas freqüências se comparadas com a faixa normal de trabalho do sistema de regulação de velocidade de turbinas hidráulicas. Essa característica é proposital e os fabricantes vêm se aperfeiçoando ao longo dos anos.

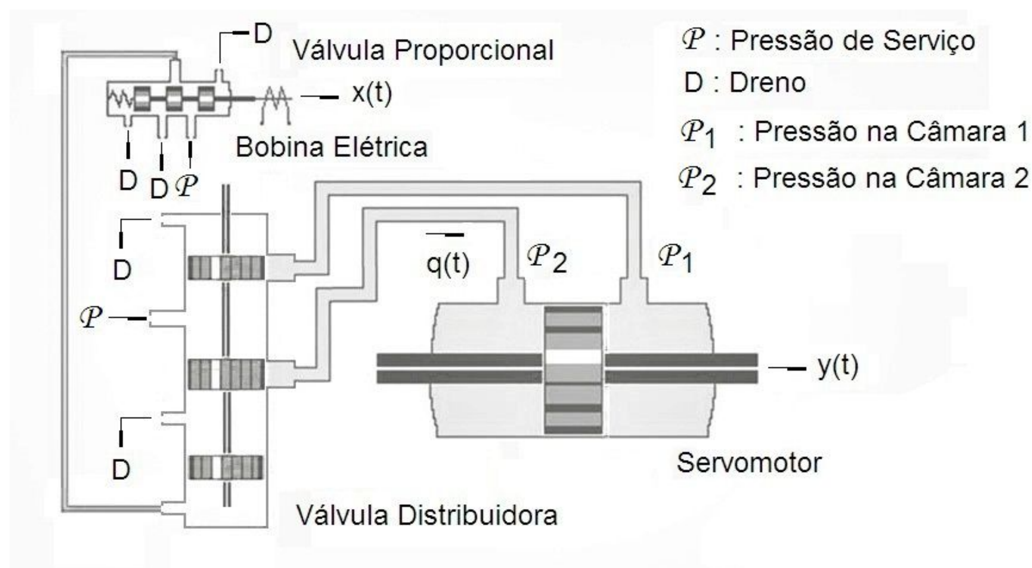



***Figura 3.29 – Distribuidor Hidráulico***

Na figura 3.29 considerar a seguinte legenda:

$q(t)$ : vazão de óleo de acionamento para o servomotor
$\mathcal{P}_1$ : pressão na câmara 1 do cilindro do servomotor
$\mathcal{P}_2$ : pressão na câmara 2 do cilindro do servomotor
$x(t)$ : deslocamento do *spool* da válvula proporcional
$y(t)$ : deslocamento do cilindro do servomotor
$t$ : variável independente tempo

A figura 3.29 traz um sistema de distribuição hidráulico dotado de uma válvula proporcional do tipo eletro-hidráulico. No esquema, vê-se a presença da válvula proporcional com a representação de uma bobina elétrica responsável por receber os estímulos elétricos que ora comandam a abertura ora o fechamento do servomotor. Na figura 3.29 encontram-se representados, então, a válvula proporcional, a válvula distribuidora e o servomotor das palhetas diretrizes da turbina hidráulica.

De maneira resumida, a válvula proporcional pode ser representada didaticamente pela figura 3.30.

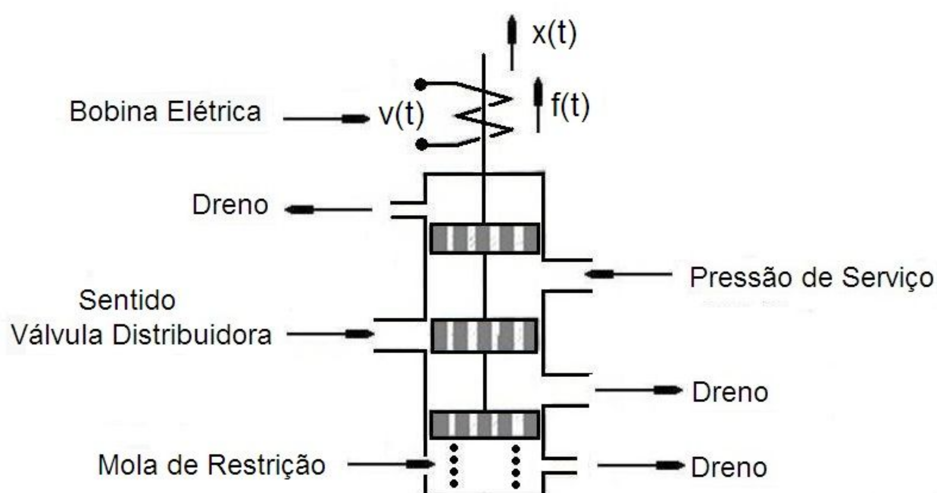



***Figura 3.30 – Válvula Proporcional do Tipo Eletro-Hidráulico***

Na figura 3.30 considerar a seguinte legenda:

$x(t)$ : curso da válvula proporcional
$f(t)$ : força atuante sobre o *spool* da válvula proporcional
$v(t)$ : tensão elétrica aplicada à bobina de comando
$t$ : variável independente tempo

Pela construção da válvula proporcional, há necessidade de circulação de uma corrente elétrica residual pela bobina para que haja centragem do conjunto que forma o êmbolo durante a operação. Esta corrente provocará o aparecimento de uma força eletromagnética, contrária à força de mola de restrição, centrando o *spool* da válvula. Agora, o único sinal que promoverá movimentos, seja de abertura, ou seja, de fechamento será aquele deliberado pela tensão $v(t)$.

Sabendo-se de antemão que o modelo a ser adotado para a representação da ação da válvula proporcional é semelhante ao modelo de um circuito DMK – série, já estudado no capítulo 2, as seguintes equações são válidas:

$$f(t) = k_1 v(t) \tag{3.178}$$

$$f(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) \tag{3.179}$$

Nas equações 3.178 e 3.179 considerar os seguintes parâmetros:

$m$ : massa do conjunto *spool* e haste da válvula proporcional
$D$ : coeficiente de viscosidade cinemática envolvido no processo
$K$ : compliância associada ao conjunto de molas envolvido no processo
$k_1$ : constante de proporcionalidade

Passando as equações 3.178 e 3.179 para o plano complexo de Laplace, considerando-se nulas todas as condições iniciais, vem que:

$$f(S) = k\,v(S) \tag{3.180}$$

$$f(S) = mS^2x(S) + DSx(S) + K\,x(S) \tag{3.181}$$

Como o que se quer é a função de transferência, eliminando-se a variável $f(S)$ entre as equações anteriores, tem-se então que:

$$\frac{x(S)}{v(S)} = \frac{k_1}{mS^2 + DS + K} = \frac{k_1}{K}\frac{1}{\frac{m}{K}S^2 + \frac{D}{K}S + 1} \cong \frac{k_1}{K}\frac{1}{\frac{D}{K}S + 1} \tag{3.182}$$

A função de transferência denotada na equação 3.182 é a função de transferência em malha aberta do conjunto da válvula proporcional desprezado o efeito de compressibilidade do óleo de acionamento. Normalmente, os sistemas de regulação de velocidade mais atuais adotam uma realimentação do deslocamento do *spool* através de um dispositivo chamado LVDT. Deste modo, é possível implementar um controlador de vazão de elevada precisão minimizando os efeitos de histerese e de forças hidráulicas residuais.
Com esse arranjo a repetibilidade operativa da válvula proporcional fica garantida desde que as constantes de tempo envolvidas também sejam pequenas se comparadas com aquelas constantes do circuito da válvula distribuidora e do servomotor. Na prática, os construtores conseguem para a válvula proporcional uma resposta aproximada de uma função de primeira ordem onde o termo de segunda ordem é desprezado em face dos demais.

A equação 3.182 permite que se processe a seguinte manipulação algébrica, sempre levando em conta as condições nominais da base de valores previamente escolhida, onde o curso do *spool* da válvula proporcional $X_0$ e a tensão aplicada à bobina elétrica $V_0$ fazem parte desta base de valores:

$$\frac{X_0}{X_0}\frac{V_0}{V_0}\frac{x(S)}{v(S)} = \frac{k_1}{DS+K} \therefore \frac{x_u(S)}{v_u(S)} = \frac{V_0}{X_0}\frac{k_1}{K}\frac{1}{\frac{D}{K}S+1} = \frac{k_p}{T_pS+1}$$

De onde se obtém que:

$$\frac{x_u(S)}{v_u(S)} = \frac{k_p}{T_pS+1} \qquad (3.183)$$

onde

$$T_p = \frac{D}{K}$$

$$k_p = \frac{V_0}{X_0}\frac{k_1}{K}$$

Na maioria dos casos, o parâmetro $k_p = 1$, assim a função de transferência da válvula proporcional pode ser representada pela seguinte relação:

$$\frac{x_u(S)}{v_u(S)} = \frac{1}{TpS+1} \qquad (3.184)$$

Com a introdução da função de transferência da válvula proporcional, conforme está disposto na equação 3.184, o novo digrama em blocos para o regulador de velocidade pode ser visto na figura 3.31.

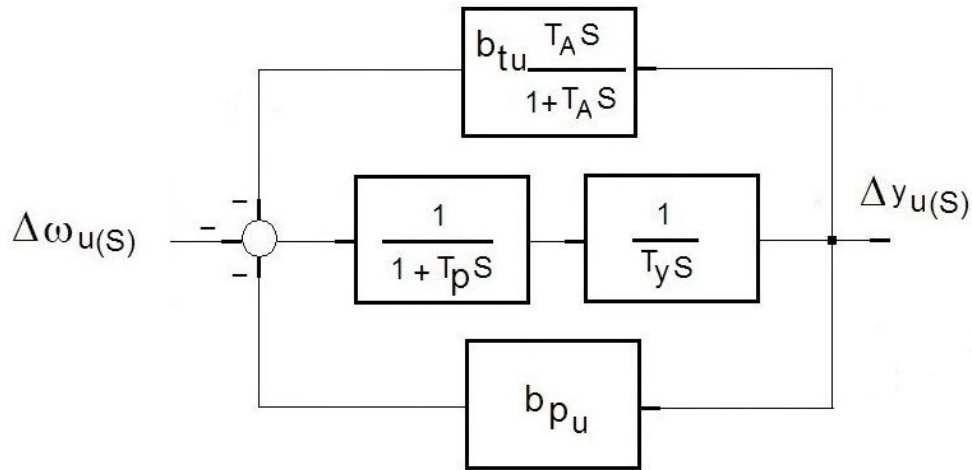



***Figura 3.31 – Diagrama Completo do Regulador de Velocidade em pu***

**Nota:** não importa se o sistema de regulação de velocidade seja do tipo puramente mecânico ou do tipo eletrônico digital, de qualquer forma, a faixa de regulação automática, geralmente, se dará entre *85* e *105%* da rotação ou freqüência nominal ou próximo desta faixa. Isso quer dizer que acima dessa faixa algum tipo proteção associada à sobrevelocidade irá provocar TRIP com o desligamento da máquina e que abaixo dessa faixa outro tipo de proteção, que seja de subvelocidade, por exemplo, irá atuar. Convém lembrar que normalmente, a faixa que antecede à entrada da regulação automática se dá entre *0* e *85%* da rotação ou freqüência nominal da turbina, um período que tem a ver com a chamada seqüência de partida até se chegar ao momento em que o regulador automático passa a assumir o controle geral da regulação de velocidade.

---

## EXEMPLO 3.13

Uma instalação hidrelétrica tem 5 geradores de $20MW$ nominais, cada um, ligados em paralelo, alimentando uma carga de $100\,MW$.

Sabendo-se que os reguladores de velocidade trabalham com estatismo permanente de $b_p = 0{,}05\ pu/pu$, na base nominal de cada máquina, calcular:

a) o valor final da freqüência do sistema se um dos geradores for desinterligado por ação de *trip* da proteção, primeiramente, desprezando-se o coeficiente de amortecimento da rede elétrica e depois o considerando;

b) se um relé tipo *load shedding* atuar cortando $10\,MW$ de carga, após o distúrbio, qual seria o novo valor da freqüência?

Supor que todas as máquinas tenham uma reserva de geração de até $5\,MW$, cada uma, e que a carga da área, no seu valor total, tenha um coeficiente de amortecimento de variação de $1\%$ de carga para $2\%$ de variação da freqüência, sendo sempre constante, mesmo que haja corte de cargas.
Também supor que os limitadores de abertura dos reguladores de velocidade estejam totalmente abertos.

**Solução:**

Um dispositivo que foi mencionado no enunciado desse problema trata-se do limitador de abertura, elemento acoplado ao sistema de tomada e retirada de carga do regulador de velocidade cuja função é limitar a ação de abertura do servomotor principal. Em outras palavras, o limitador de abertura do regulador estabelece um nível restringindo qualquer comando de aumento de abertura das palhetas diretrizes para além desse nível. O limitador de abertura também é conhecido como limitador de carga ativa.

Deve-se, então, entender que o sistema, a partir da saída da máquina sob falta, agora com 4 geradores de $20MW$ cada um, irá receber uma entrada brusca de carga de $20MW$ .

Supondo ser a máquina 5 a máquina desinterligada e que as máquinas remanescentes sejam iguais, segue-se o raciocínio dedutivo.

a) Cálculo do valor final da freqüência após a saída da máquina sob falta

<u>Estatismo de uma máquina</u>

$\omega_{Bi} = 60\,Hz \quad i = 1,2,3,4$ → freqüência base de uma máquina
$P_{Bi} = 20\,MW \quad i = 1,2,3,4$ → potência base de uma máquina

O estatismo permanente em potência de uma máquina será então, segundo a equação 3.147:

$$b_{pu} = -\frac{\Delta\omega_u(S)}{\Delta p_u(S)} \quad \therefore \quad b_{pu_i} = -\frac{\dfrac{\Delta\omega_i}{\omega_{Bi}}}{\dfrac{\Delta p_i}{P_{Bi}}} \quad i = 1,2,3,4 \qquad (3.185)$$

<u>Estatismo do grupo com 4 máquinas</u>

$\omega_{Bs} = 60\,Hz$ → freqüência base do sistema com 4 máquinas
$P_{Bs} = 80\,MW$ → potência base do sistema com 4 máquinas

O estatismo permanente em potência do grupo das 4 máquinas será então, segundo a equação 3.147:

$$b_{pu_S} = -\frac{\Delta\omega_{US}(S)}{\Delta p_{US}(S)} \quad \therefore \quad b_{pu_S} = -\frac{\dfrac{\Delta\omega_S}{\omega_{Bs}}}{\dfrac{\Delta p_S}{P_{Bs}}} \tag{3.186}$$

O valor da potência total será o somatório das potências individuais de máquina.

Assim

$$\Delta p_S = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \Delta p_4 = \sum_{i=1}^{4} \Delta p_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{3.187}$$

onde

$$P_{B1} = P_{B2} = P_{B3} = P_{B4} = P_B = 20\,MW \tag{3.188}$$

$$P_{Bs} = \sum_{i=1}^{4} P_{Bi} = 80\,MW \qquad i = 1,2,3,4 \tag{3.189}$$

Como o sistema é síncrono a variação de freqüência em regime permanente será a mesma para todo o sistema, logo:

$$\Delta\omega_S = \Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega_3 = \Delta\omega_4 = \Delta\omega$$

Assim, para $\omega_{BS} = \omega_{Bi} = 60\,Hz \quad i = 1,2,3,4$ vem que:

$$\frac{\Delta\omega_S}{\omega_{Bs}} = \frac{\Delta\omega_i}{\omega_{Bi}} = \frac{\Delta\omega}{60} \qquad i = 1,2,3,4$$

As equações 3.185 e 3.186 tomam o seguinte aspecto:

$$b_{pu_i} = -\frac{\dfrac{\Delta\omega}{60}}{\dfrac{\Delta p_i}{P_B}} \quad \therefore \quad \frac{\Delta p_i}{P_B} = -\frac{\dfrac{\Delta\omega}{60}}{b_{pu_i}} \qquad i = 1,2,3,4$$

Como $b_{pu1} = b_{pu2} = b_{pu3} = b_{pu4} = b_{pu} = 0{,}05\ pu/pu$ a equação anterior, relativa às máquinas 1,2 3,4, fica da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta p_i}{P_B} = -\frac{\frac{\Delta\omega}{60}}{b_{pu}} \quad i = 1,2,3,4 \qquad (3.190)$$

e também para o sistema:

$$b_{pu_S} = -\frac{\frac{\Delta\omega}{60}}{\frac{\Delta p_S}{P_{Bs}}} \quad \therefore \quad \frac{\Delta p_S}{P_{Bs}} = -\frac{\frac{\Delta\omega}{60}}{b_{pu_S}} \qquad (3.191)$$

A equação 3.187 permite que se escreva que:

$$\frac{\Delta p_S}{P_B} = \frac{\Delta p_1}{P_B} + \frac{\Delta p_2}{P_B} + \frac{\Delta p_3}{P_B} + \frac{\Delta p_4}{P_B} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\Delta p_i}{P_B} \quad i = 1,2,3,4 \qquad (3.192)$$

Da equação 3.190, podem-se escrever as parcelas da equação anterior 3.192, senão veja:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\Delta p_i}{P_B} = \frac{\Delta p_1}{P_B} + \frac{\Delta p_2}{P_B} + \frac{\Delta p_3}{P_B} + \frac{\Delta p_4}{P_B} = -\left[\frac{1}{b_{pu_1}} + \frac{1}{b_{pu_2}} + \frac{1}{b_{pu_3}} + \frac{1}{b_{pu_4}}\right]\frac{\Delta\omega}{60} \quad i = 1,2,3,4$$

Ou melhor

$$\Delta p_S = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \Delta p_4 = -\frac{P_B}{60}\left[\frac{1}{b_{pu_1}} + \frac{1}{b_{pu_2}} + \frac{1}{b_{pu_3}} + \frac{1}{b_{pu_4}}\right]\Delta\omega$$

Multiplicando e dividindo a equação anterior por $P_{BS}$ e reagrupando as parcelas resultantes de maneira adequada vem:

$$\frac{\Delta p_S}{P_{Bs}} P_{Bs} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \Delta p_i}{P_{Bs}} P_{Bs} = -\frac{P_B}{60}\left[\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{b_{pu_i}}\right]\Delta\omega \quad i = 1,2,3,4$$

Ou melhor

$$\frac{\Delta p_S}{P_{Bs}} = -\frac{P_B}{P_{Bs}}\left[\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{b_{pu_i}}\right]\frac{\Delta\omega}{60} \quad i = 1,2,3,4$$

$$b_{pu_{eq}} = b_{pu_S} = -\frac{\frac{\Delta\omega}{60}}{\frac{\Delta p_S}{P_{Bs}}} = -\left[ -\frac{P_{Bs}}{P_B} \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{b_{pu_i}}} \right] = \frac{P_{Bs}}{P_B} \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{b_{pu_i}}} \quad i = 1,2,3,4$$

(3.193)

Deste modo, obtém-se a equação da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente do sistema em função dos estatismos particulares de máquinas componentes deste sistema. Para o caso em destaque, um sistema formado originalmente por 5 máquinas e que, depois da perda de uma máquina, se manteve operando, de maneira estável, com as 4 máquinas remanescentes.

Da equação anterior 3.193, pode-se extrair a equação para a variação de velocidade havida, considerando-se o caso em que o coeficiente de amortecimento da carga é desprezado:

$$-\frac{\frac{\Delta\omega}{60}}{\frac{\Delta p_S}{P_{Bs}}} = \frac{P_{Bs}}{P_B} \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{b_{pu_i}}} \quad \therefore \quad -\frac{\Delta\omega}{60} = \frac{\Delta p_S}{P_B} \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{b_{pu_i}}} \quad i = 1,2,3,4 \qquad (3.194)$$

Dados do enunciado do problema:

$\Delta p_S = 20\ MW$

$P_B = 20\ MW$

$b_{pi} = b_{p1} = b_{p2} = b_{p3} = b_{p4} = 0,05\ pu/pu$

$\omega_0 = 60\ Hz$

Assim, pela aplicação da fórmula da equação 3.194, tem-se que:

$$-\frac{\Delta\omega}{60} = \frac{20}{20} \frac{1}{\frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,05}} = \frac{0,05}{4} \quad \therefore \quad \Delta\omega = -\frac{0,05}{4} 60 = -0,75\,Hz$$

Logo, para o valor final da freqüência:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega - 60 = -0,75 \quad \therefore \quad \omega = 59,25\,Hz$$

Pode-se observar que cada uma das máquinas se comportou de maneira semelhante às demais como se a carga total fosse absorvida de modo eqüitativo entre elas.
O problema poderia também ser resolvido para uma das máquinas e, posteriormente, estendido às demais, já que a variação de freqüência foi a mesma por se tratar de um sistema composto, *a priori*, de máquinas síncronas.

Caso o coeficiente de amortecimento de carga do sistema fosse considerado ele teria de ser levado em conta quando da utilização da equação 3.194.
Dos dados do enunciado do problema tem-se, para o coeficiente de amortecimento associado à carga elétrica conectada, considerando a base do sistema, que:

$$D_{us} = \frac{1\% \frac{\Delta p_s}{P_{Bs}}}{2\% \frac{\Delta \omega}{\omega_0}} = 0{,}5 \ pu/pu$$

Deve-se ter em conta que o valor do coeficiente de amortecimento de carga do sistema anteriormente calculado se refere à base de valores cuja potência base tomada era de $P_{Bs} = 100\,MW$. Agora, com a perda de uma máquina, o novo valor base passa a ser de $P_{Bs} = 80\,MW$.
Tem de se obter o novo valor para o coeficiente de amortecimento de carga do sistema utilizando-se o seguinte raciocínio, aplicado ao processo, quando houver mudança de base.

Seja considerar dois valores pu, para o coeficiente de amortecimento de carga de certo sistema, cada um deles vinculado a duas bases diferentes de valores conforme apresentado a seguir.

na base 1 $$D_{u1} = \frac{\frac{\Delta p_1}{P_{B1}}}{\frac{\Delta \omega_1}{\omega_{B1}}} \tag{3.195}$$

na base 2 $$D_{u2} = \frac{\frac{\Delta p_2}{P_{B2}}}{\frac{\Delta \omega_2}{\omega_{B2}}} \tag{3.196}$$

Sabe-se também que, para ambas as bases de valores, considerando-se o sistema síncrono com a mesma variação de carga:

$$\frac{\Delta \omega_1}{\omega_{B1}} = \frac{\Delta \omega_2}{\omega_{B2}} = \frac{\Delta \omega}{\omega_B} \quad \text{e} \quad \Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$$

Deste modo, as equações 3.195 e 3.196 podem ser reescritas da seguinte forma:

na base 1 $$D_{u1} = \frac{\dfrac{\Delta p}{P_{B1}}}{\dfrac{\Delta\omega}{\omega_B}} \qquad (3.197)$$

na base 2 $$D_{u2} = \frac{\dfrac{\Delta p}{P_{B2}}}{\dfrac{\Delta\omega}{\omega_B}} \qquad (3.198)$$

Como as variações de velocidade em regime permanente são as mesmas para ambos os sistemas, após as devidas simplificações tem-se que:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_B} = \frac{\dfrac{\Delta p}{P_{B1}}}{D_{u1}} = \frac{\dfrac{\Delta p}{P_{B2}}}{D_{u2}} \quad \therefore \quad D_{u2} = D_{u1}\frac{P_{B1}}{P_{B2}} \qquad (3.199)$$

Assim, o valor do coeficiente $D$, na base de $80\,MW$, pode ser calculado pela aplicação direta da equação 3.199.

Logo, considerando-se os dados do enunciado do problema em questão onde o sistema 1, trata-se do sistema para $P_{Bs} = 80\,MW$ e o sistema 2, trata-se do sistema para $P_{Bs} = 100\,MW$, vem que:

$$D_{us} = D_{u2} = 0{,}5\frac{80}{100} = 0{,}625 \;\; pu/pu$$

Assim, o valor final da freqüência do sistema, após a saída de uma das máquinas, considerando-se a equação 3.193, já incluído o efeito do coeficiente de amortecimento $D_s$ do sistema e o estatismo equivalente do sistema, será:

$$-\frac{\dfrac{\Delta\omega}{60}}{\dfrac{\Delta p_s}{P_{Bs}}} = \frac{1}{D_{us} + \dfrac{P_B}{P_{Bs}}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{b_{pu_i}}} \quad \therefore \quad -\frac{\Delta\omega}{60} = \frac{\Delta p_s}{P_{Bs}}\frac{1}{D_{us} + \dfrac{P_B}{P_{Bs}}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{b_{pu_i}}} \quad i = 1,2,3,4$$

(3.200)

Considerando-se a equação 3.200 e aplicando a esta os dados do enunciado do problema em questão vem que:

$$\frac{\Delta\omega}{60} = -\frac{20}{80}\frac{1}{0{,}625 + \frac{20}{80}[\frac{4}{0{,}05}]} \quad \therefore \quad \Delta\omega = -60\frac{20}{80}\frac{1}{0{,}625 + \frac{20}{80}\frac{4}{0{,}05}} = -0{,}727$$

Logo, para o valor final da freqüência, já incluído o efeito do coeficiente de amortecimento $D_S$ do sistema, tem-se que:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega - 60 = -0{,}727 \quad \therefore \quad \omega = 59{,}273\,Hz$$

**Nota a respeito do item a) exemplo 3.13:**

Analisando as duas respostas do sistema frente à saída por *trip* de uma das cinco máquinas, pode-se concluir que na primeira condição, quando o coeficiente de amortecimento da carga do sistema elétrico foi negligenciado, a variação da freqüência do sistema síncrono foi maior que aquele em igual condição, porém com o coeficiente de amortecimento da carga considerado. O que se conclui é que o efeito prático da ação da presença do coeficiente de amortecimento foi o de uma redução de carga no processo da chamada regulação primária de velocidade daí ter sido menor a variação final da freqüência do sistema para esse caso específico. É como se, depois de ter havido a perda da geração de uma das máquinas, o sistema tivesse, por si só, desconectado uma fração da carga a ele conectada.

b) Cálculo do novo valor da freqüência com a atuação do relé *load shedding*

Foi informado no enunciado do problema que existe um relé *load shedding*, tipo ERAC, que tem a função de cortar cargas a partir da constatação da queda da freqüência síncrona do sistema. Após a ocorrência da saída de uma das máquinas geradoras o relé cortou $10\,MW$ de carga e, nesse caso, o novo valor final da freqüência, no item a) do problema, terá de ser recalculado conforme procedimento seguinte.

Desprezando o coeficiente de amortecimento de carga e repetindo aqui a fórmula anterior da variação da freqüência dada na equação 3.194 tem-se que:

$$-\frac{\Delta\omega}{60} = \frac{\Delta p_S}{P_B}\frac{1}{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{b_{pu_i}}} \quad i = 1,2,3,4$$

Dados do enunciado do problema:

$\Delta p_S = 10\ MW$
$P_B = 20\ MW$
$b_{pui} = b_{pu1} = b_{pu2} = b_{pu3} = b_{pu4} = 0{,}05\ pu/pu$
$\omega_0 = 60\ Hz$

$$\Delta\omega = -60\frac{10}{20}\frac{1}{\frac{1}{0{,}05}+\frac{1}{0{,}05}+\frac{1}{0{,}05}+\frac{1}{0{,}05}} = -60\frac{10}{20}\frac{1}{\frac{4}{0{,}05}} = -0{,}375$$

Logo, para o valor final da freqüência:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega - 60 = -0{,}375 \quad \therefore \quad \omega = 59{,}625\ Hz$$

**Nota a respeito do item b) exemplo 3.13:**

Observar que o corte de $10\,MW$ de carga por meio do relé *load shedding* fez com que o novo valor de freqüência do sistema passasse dos $59{,}25\,Hz$ para $59{,}625\,Hz$, nas mesmas condições anteriores.
Esse procedimento é adotado no Brasil por muitas empresas do setor elétrico como alternativa de controle sobre a regulação secundária de velocidade visando à recomposição do sistema frente a ocorrências desse tipo.

---

## 3.6.1. Regulador de Velocidade em Rede Isolada

Quando se refere a um tipo operativo de regulador de velocidade, qualificado de isolado, deve-se entender um regulador que atua sobre a turbina de uma máquina síncrona operando como gerador, interligada a uma carga por intermédio de uma linha de transmissão sem interligação com outra máquina ou sistema de geração.
A figura 3.32 mostra o diagrama da figura 3.31, anterior, no qual foi inserido o diagrama de um regulador de velocidade do tipo que apresenta quedas permanente e transitória ou estatismos permanente e transitório que, a partir daqui, será chamado apenas de regulador de velocidade.

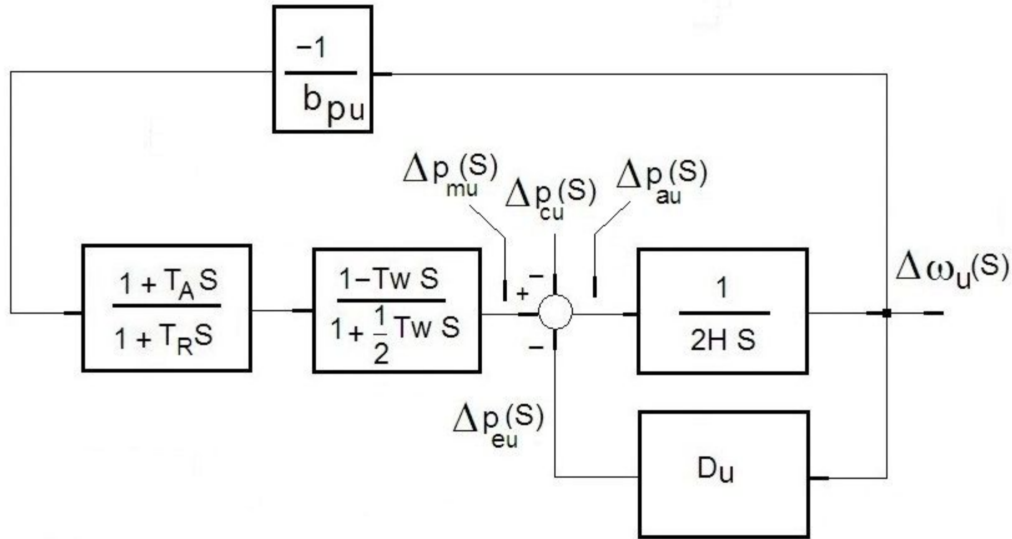



***Figura 3.32 – Malha Completa de Controle de Velocidade em pu***

Na figura 3.32 considerar a seguinte legenda:

$\Delta p_{mu}$ : variação da potência mecânica associada à turbina
$\Delta p_{eu}$ : variação da potência elétrica associada à carga
$\Delta p_{au}$ : variação da potência acelerante associada ao conjunto girante
$\Delta p_{cu}$ : variação da potência ou carga elétrica local

Observando a malha de regulação de velocidade mostrada na figura 3.32, pode-se notar a representação da carga que entra com o sinal contrário em relação ao sinal da potência mecânica.
Notar também que enquanto a carga não varia o sistema também não sofre mudança em seu estado de equilíbrio. Logicamente, havendo variação da carga o estado final de equilíbrio do sistema será outro.
Fica implícito aqui que, previamente, tratava-se de um sistema cuja operação era estável até então.

O somador do diagrama em blocos da figura 3.32 é conhecido nos estudos de regulação como o somador das potências e dele se pode tirar a seguinte relação:

$$\Delta p_{mu}(S) - \Delta p_{cu}(S) - D_u\ \Delta\omega_u(S) = 2HS\,\Delta\omega_u(S) \qquad (3.201)$$

Sabendo que o estatismo em potência é dado por $b_{pu} = \frac{-\Delta\omega_u}{\Delta p_{mu}}$ e que, para a condição operativa de regime permanente, o termo associado à potência

acelerante da máquina, em operação normal, é nulo, ou seja, $2HS\,\Delta\omega_u(S) = 0$, tem-se que:

$$-\Delta p_{cu}(S) = -\Delta p_{mu}(S) + D_u\ \Delta\omega_u(S)\ \therefore\ -\Delta p_{cu}(S) = \frac{\Delta\omega_u(S)}{b_{pu}} + D_u\ \Delta\omega_u(S)$$

Ou melhor

$$\Delta\omega_u(S) = -\frac{1}{\frac{1}{b_{pu}} + D_u}\Delta p_{cu}(S) \qquad (3.202)$$

---

## EXEMPLO 3.14

Quer se saber da resposta total, ou seja, respostas livre e forçada, a uma entrada de carga local na forma de um degrau de $0{,}01\,pu$, na variável de estado freqüência, de um sistema elétrico formado por uma máquina síncrona, num arranjo em rede isolada, alimentando uma carga típica, dotado de um regulador astático.
São os seguintes os dados disponíveis para esse sistema, sendo que todos os parâmetros encontram-se na base da máquina em questão:

$b_p = 0{,}05\ pu/pu$

$T_A = 5\,s$

$T_R = 5\,5s$

$D = 0{,}5\ pu/pu$

$T_W = 2\,s$

$2H = 10\,s$

**Solução:**

A equação 3.202 anteriormente deduzida não resolveria o presente problema na sua totalidade, pois ela apenas contemplaria a resposta do sistema em regime permanente não dando a oportunidade de se conhecer o aspecto geral da resposta, ou seja, a sua condição transitória, que é pedida.
Deste modo, será escolhido o diagrama do regulador apresentado na figura 3.32 que é mais apropriado para a solução do problema atual e cujos parâmetros foram disponibilizados no enunciado.
Será adotado o procedimento de solução através da simulação computacional.

O resultado da simulação do sistema é mostrado na figura 3.33 seguinte com os valores em pu.

O que se pode observar é que, depois da entrada da carga de $0{,}01\,pu$, houve uma variação da freqüência do sistema, tendo esta freqüência ficado com um erro de $-0{,}0005\,pu$ ou $59{,}97\,Hz$.

Neste tipo de operação, não é interessante manter esse erro de freqüência. Nesse caso, quanto maior for a carga de entrada tanto maior será o erro de freqüência.

Num sistema desse tipo, o que se faz na prática para evitar que variações da carga provoquem variações da freqüência, em regime permanente, é trabalhar com um regulador de velocidade do tipo isócrono. A correção do sinal de erro, trata-se de um processo conhecido como correção via controle suplementar cuja função se reporta àquilo que se chama de regulação secundária. O que se vê na resposta estampada na figura 3.33 nada mais é que a característica da regulação primária de velocidade do sistema isolado.

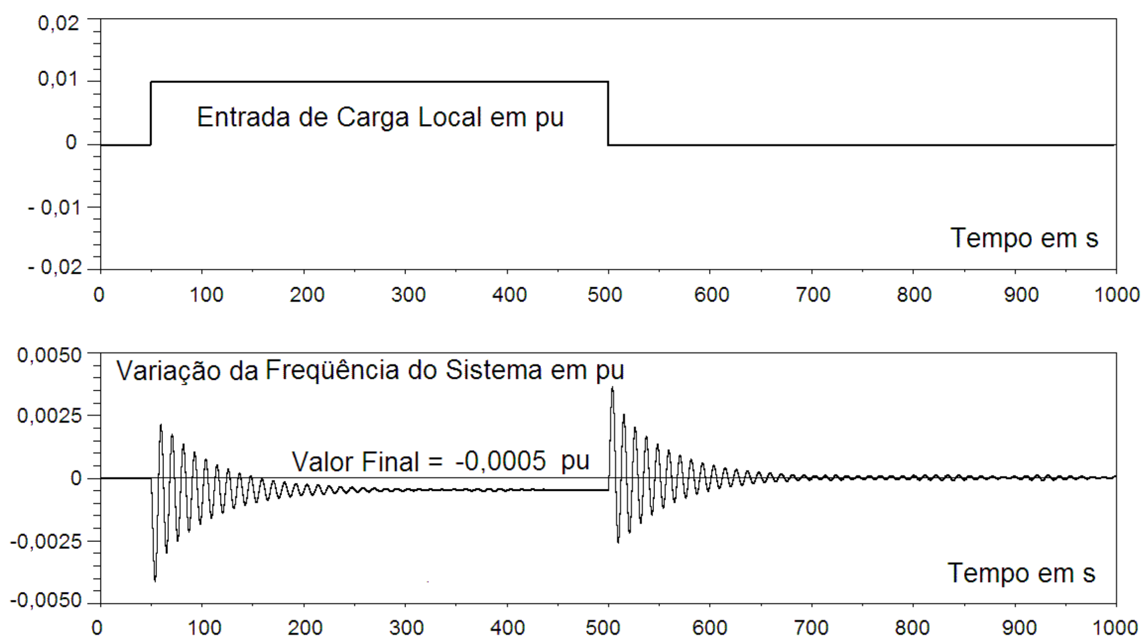



***Figura 3.33 – Resposta do Sistema com Regulador de Velocidade à Variação de Carga Local Tipo Degrau Sem Controle Suplementar***

**Nota a respeito do exemplo 3.14:**

Caso se optasse pelo cálculo analítico, o que deve ser sempre feito, quando possível for, no sentido de verificação, bastaria a utilização da equação 3.147 que traz a definição da queda permanente ou estatismo permanente.

Assim, pode-se escrever que:

$$b_{pu} = -\frac{\Delta\omega_u}{\Delta p_u} \quad \therefore \quad \Delta\omega_u = -b_{pu}\,\Delta p_u$$

Pelos dados disponíveis para esse sistema, sendo que todos os parâmetros encontram-se na base da máquina em questão:

$$b_p = 0{,}05\ pu/pu$$

Logo

$$\Delta\omega_u = -0{,}05(0{,}01) = -0{,}0005\ pu \quad \therefore \quad \Delta\omega = 60(-0{,}0005) = -0{,}03 \quad \therefore \quad \Delta\omega = 0{,}03\ Hz$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega - 60 = -0{,}03 \quad \therefore \quad \omega = 59{,}97\ Hz$$

No registro da figura 3.33, pode-se verificar o valor final da freqüência quando da entrada da carga de $0{,}01\ pu$. Neste mesmo registro nota-se que, depois da retirada da carga local, há o restabelecimento e o desvio da freqüência volta a ficar nulo.

---

Considerando-se o exemplo 3.14, por este ensaio simulado, constatou-se que o controle promovido pelo regulador de velocidade astático não conseguiu suprir o déficit de energia introduzido no sistema pela entrada da carga, ou seja, haverá necessidade de que algum dispositivo extra seja incorporado ao conjunto de regulação de modo a suplementar o controle inicial.
A questão crucial, nesse caso, é garantir que, mesmo em havendo uma variação de carga, tanto para mais quanto para menos, a diferença no sinal da velocidade associada seja, de certo modo, compensada.
Aqui, um novo conceito aparece no estudo da regulação de velocidade que será definido como controle primário da geração reunindo as características ligadas à manutenção da velocidade de rotação do conjunto no valor pré-determinado pela referência quando não se tem entrada ou saída de carga.
Durante a variação de carga local, sabe-se que o erro de velocidade em regime permanente introduzido por tal variação poderá ser anulado por intermédio de um dispositivo suplementar que reunirá a característica de alterar a posição de referência do regulador de velocidade buscando compensar o erro de freqüência gerado pela variação de carga. Este controle suplementar, como é chamado, estabelece a regulação secundária do controle da geração.
No final das contas, o que se faz é variar o fluxo de água sobre as palhetas diretrizes da turbina hidráulica, no caso, com a finalidade de corrigir a variação da geração de modo a se trabalhar sempre com um erro de controle de área, ou ECA, nulo. A definição de ECA será vista mais adiante. Lembrar que o controle suplementar pode ser automático quando promovido por um controlador automático ou manual quando promovido por um agente operador humano.

A figura 3.34 mostra a malha de regulação completa com o bloco do controle suplementar para a função da regulação secundária.

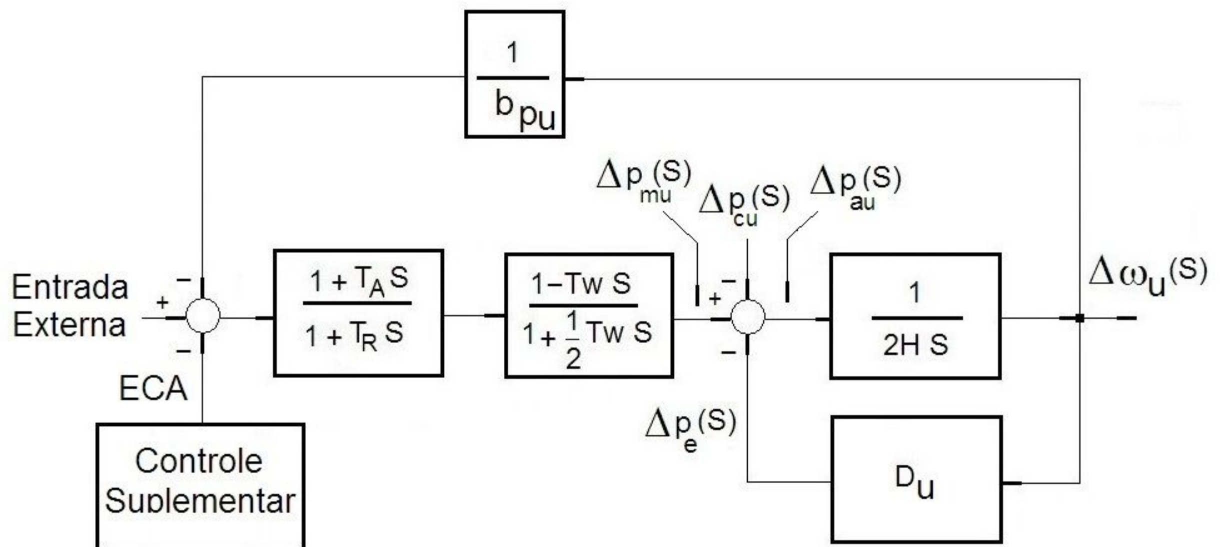



***Figura 3.34 – Malha de Regulação de Velocidade com Dispositivo de Controle Suplementar de Regulação Secundária***

---

## EXEMPLO 3.15

Repetir a questão do exemplo 3.14 anterior, porém considerando a presença de um dispositivo suplementar que apresenta uma estrutura de controle conforme aparece na figura 3.35.

Como sugestão, utilizar os seguintes valores para os parâmetros do controlador suplementar:

$k_{\omega} = 0{,}01\ pu/pu \Rightarrow$ constante proporcional à variação de velocidade

$k_p = 0{,}4\ pu/pu \Rightarrow$ constante proporcional à variação de potência ativa elétrica

Utilizar a solução pelo método da simulação computacional tomando o devido cuidado na escolha do incremento de integração.

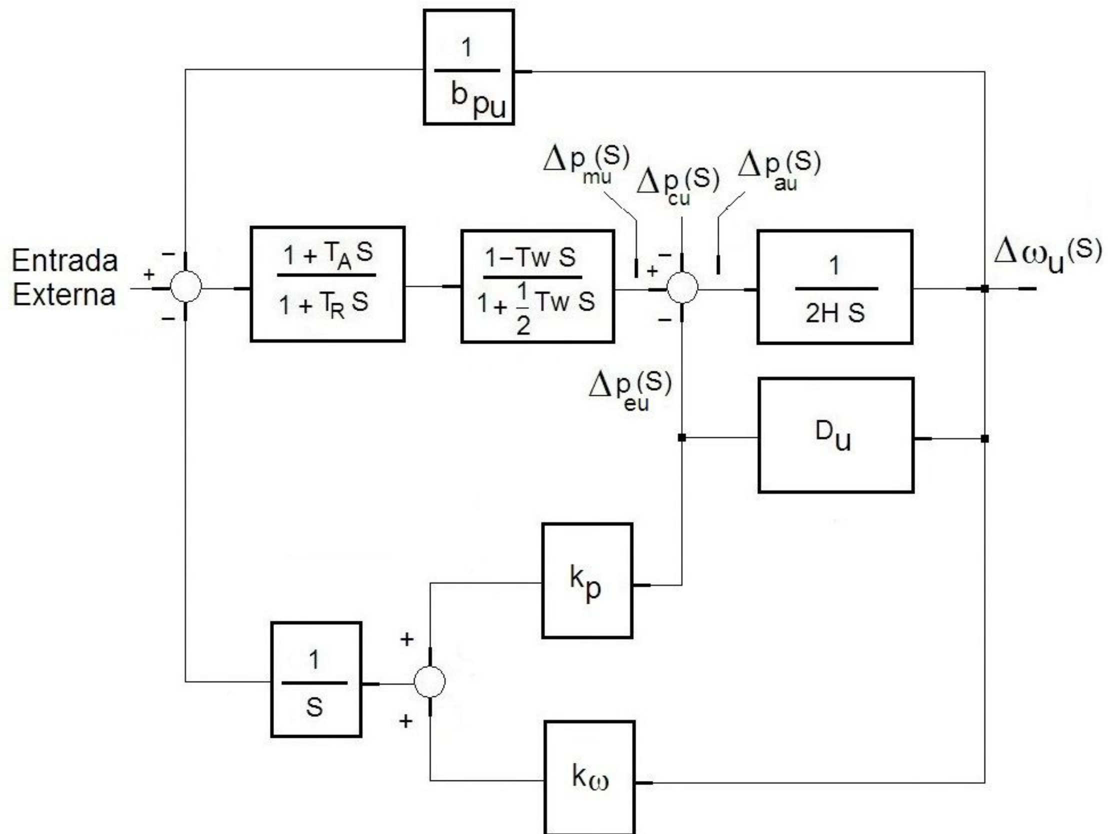



***Figura 3.35 – Malha de Regulação de Velocidade com Dispositivo de Controle Suplementar de Regulação Secundária***

**Solução:**

Como os dados são todos do modelo aplicado na solução do problema apresentado no exemplo 3.14 anterior, o que será feito é introduzir o controlador sugerido com os parâmetros fornecidos no enunciado. Como foi dito antes, a questão crucial, nesse caso, é garantir que, mesmo em havendo uma variação de carga, tanto para mais quanto para menos, a diferença no sinal da velocidade associada seja compensada. Houve uma entrada de carga e o controlador fez a compensação agindo, pelo processo da regulação secundária, sobre a referência do regulador de velocidade.

Para o mesmo ensaio simulado anteriormente, o novo comportamento pode agora ser visto na figura 3.36. Na nova resposta, é observado que durante a entrada da carga o sinal de freqüência, que no exemplo anterior mantinha um erro, agora foi corrigido a despeito da entrada de carga. Isso somente foi possível com a introdução do dispositivo de controle suplementar já descrito, no caso, um dispositivo automático. Maisà frente será mostrado como esse dispositivo é ajustado em função de seu arranjo.

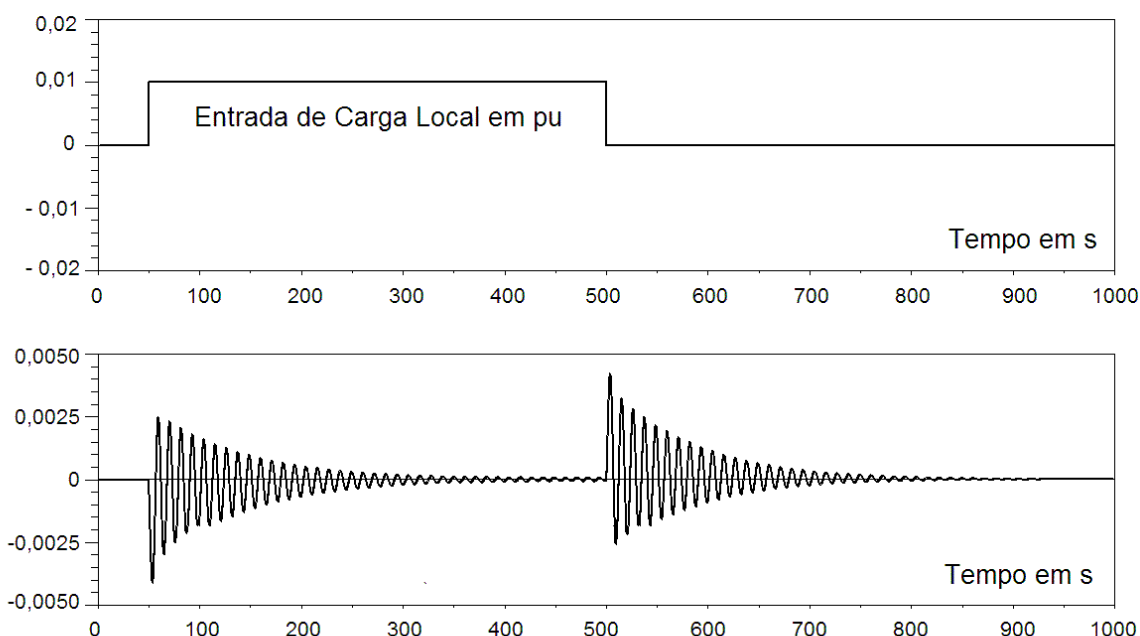



***Figura 3.36 – Resposta do Sistema com Regulador de Velocidade à Variação de Carga Local Tipo Degrau com Controle Suplementar***

---

Convém lembrar que a regulação primária é aquela regulação promovida pelo regulador automático de velocidade que corrige os pequenos distúrbios inerentes ao controle da velocidade enquanto o controle secundário é aquele responsável pelas operações de tomada e retirada de carga.

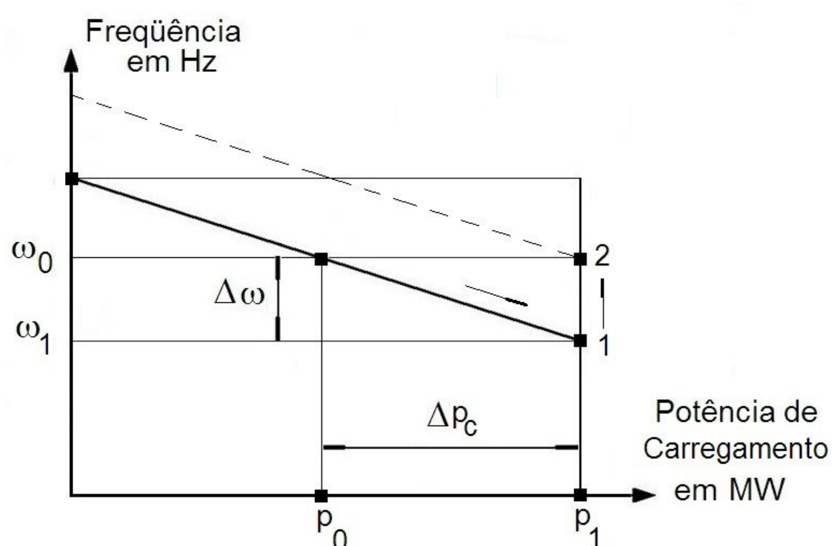



***Figura 3.37 – Característica das Regulações Primária e Secundária de Velocidade e Potência***

A figura 3.37 mostra o efeito da regulação secundária sobre um sistema isolado.
O ponto inicial de trabalho era $P_0$. Notar, pela figura 3.37, que a entrada de uma carga de magnitude $\Delta p_C$ implicou na queda da velocidade da área geradora de $\Delta\omega$. Como a freqüência padrão é $\omega_0$, atua-se sobre o controle suplementar para que se eleve a curva da regulação do ponto *1* para o ponto *2* onde está passando a reta tracejada.
O processo de redução da freqüência síncrona de $\omega_0$ para $\omega_1$, sobre a reta em linha cheia, é garantido pela ação da regulação primária via regulador automático de velocidade enquanto o processo de correção do erro de velocidade, gerado, elevando-se a freqüência síncrona de $\omega_1$ para $\omega_0$ é promovido via regulação secundária que, para o exemplo da figura em análise, altera a referência do regulador automático fazendo com que se trabalhe agora com a reta em linha tracejada.

Conclusão importante: o regulador automático de velocidade se incumbirá da regulação primária, de maneira estável, enquanto o controle suplementar se incumbirá, por sua vez, da regulação secundária.

## 3.6.2. Regulador de Velocidade em Rede Interligada

Entende-se por rede interligada a interação física entre duas ou mais áreas geradoras e suas cargas através de linhas de transmissão e de interligação. Para o estudo em questão serão consideradas duas áreas interligadas com a representação esquemática do controle suplementar.

Para melhor entendimento recorrer à figura 3.38.

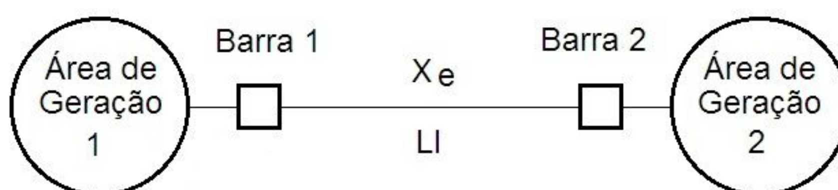



***Figura 3.38 – Sistema Elétrico Interligado com Duas Áreas de Geração***

Para estender a análise acerca do controle da geração, com a manutenção da velocidade ou freqüência síncrona próxima do valor de referência, uma nova variável será considerada. Trata-se do ângulo de potência que determina a transferência de potência ativa entre determinados pontos de um SEP.

Prova-se que a transmissão da potência ativa elétrica, no domínio do tempo, de uma máquina síncrona de pólos salientes para o barramento de saída da mesma é dada por:

$$p_e = \frac{E_1 V}{x_d} \sin\delta + \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d}\right) \sin 2\delta \tag{3.203}$$

onde

$E_1$ : vetor fem da máquina geradora no domínio do tempo

$V$ : vetor tensão da barra de saída da máquina no domínio do tempo

$x_d$ : reatância de eixo direto da máquina em questão

$x_q$ : reatância de eixo em quadratura da máquina em questão

$\delta$: ângulo elétrico entre os vetores $E_1$ e $v$ em radianos

Considerando a maquina de pólos lisos onde $x_d = x_q = x$, pode-se escrever que:

$$p_e = \frac{E_1 V}{x_d} \sin\delta \tag{3.204}$$

Tomando-se como referência a figura 3.38, a transferência de potência ativa elétrica entre as barras *1* e *2* seria:

$$p_e = \frac{V_1 V_2}{x_{12}} \sin\delta_{12} = \frac{V_1 V_2}{x_{12}} \sin\Delta\delta \tag{3.205}$$

onde

$V_1$ : vetor tensão na barra de saída da área 1no domínio do tempo

$V_2$ : vetor tensão na barra de saída da área 2 no domínio do tempo

$x_{12}$ : impedância da LI de interligação entre as áreas

$\delta$: ângulo elétrico entre os vetores $v_1$ e $v_2$ em radianos

Considerando-se a base de valores já previamente estabelecida e as expressões seguintes das variáveis de estado na forma de diferenças, todas no domínio do tempo, onde $P_0$, $V_0$ e $\delta_0$ se referem à condição nominal de operação, a equação 3.205 pode ser assim reescrita:

$$p_e = \Delta p_e + P_0$$
$$v_1 = \Delta v_1 + V_0$$
$$v_2 = \Delta v_2 + V_0$$
$$\delta_2 = \Delta\delta_2 + \delta_0$$

$$\Delta p_e + P_0 = \frac{(\Delta v_1 + V_0)(\Delta v_2 + V_0)}{x_{12}} \sin(\Delta\delta + \delta_0)$$

Tendo em vista que as variações das tensões são pequenas entre si tais que $\Delta v_1 \cong \Delta v_2 \cong 0$, e que a função seno se confunde com o próprio argumento onde $sin\delta \cong \delta$, $sin(\Delta\delta) \cong \Delta\delta$ e $sin\,\delta_0 \cong \delta_0$, e que a potência nominal transmitida na LT, em função do ângulo de potência, seja dada pela expressão $P_0 = \frac{V_0{}^2}{x_{12}} sin\,\delta_0$, tem-se:

$$\Delta p_e + P_0 \cong \frac{V_0{}^2}{x_{12}} sin\,(\Delta\delta + \delta_0) = \frac{V_0{}^2}{x_{12}} \Delta\delta + \frac{V_0{}^2}{x_{12}} \delta_0 \quad \therefore \quad \Delta p_e = \frac{V_0{}^2}{x_{12}} \Delta\delta$$

Dividindo a equação anterior pelo valor da potência base $P_0 = \frac{V_0{}^2}{Z_0} \delta_0$, onde $Z_0$ é a impedância base, numa base de valores escolhida previamente, e já considerando-se o plano complexo de Laplace, tem-se que:

$$\Delta p_{eu}(S) = \frac{1}{x_{12u}} \Delta\delta_u(S) \qquad (3.206)$$

Convém lembrar que a linearização adotada no procedimento anterior só será válida quando as variações do ângulo $\Delta\delta(t)$ forem pequenas e dadas em radianos.

Da equação anterior, escreve-se que:

$$\frac{\Delta\, p_{eu}(S)}{\Delta\delta_u(S)} = T'_{12u} \qquad (3.207)$$

Promovendo-se a incorporação do valor $\omega_0$, a equação 3.207 poderá ser reescrita da seguinte forma, onde $S$ trata-se da variável complexa de Laplace:

$$\frac{\Delta\, p_{eu}(S)}{\Delta\delta_u(S)} = \frac{\Delta\, p_{eu}(S)}{\frac{\Delta\omega_u(S)}{S}} = T'_{12u} \quad \therefore \quad \frac{\Delta\, p_{eu}(S)}{\frac{1}{\omega_0}\frac{\Delta\omega(S)[rad/s]}{S}} = T'_{12u}$$

Em resumo:

$$\frac{\Delta\, p_{eu}(S)}{\Delta\delta(S)[rad]} = \frac{1}{\omega_0} T'_{12u} = T_{12}[\,pu/rad\,] \qquad (3.208)$$

onde $T_{12}$ é o conhecido parâmetro coeficiente de torque sincronizante

Na equação 3.208, a variável potência $\Delta p_e$ encontra-se em pu, na base que foi adotada previamente para o sistema, porém a variável $\Delta\delta$ encontra-se em valores atuais e em radianos. Isso ocorre porque na equação 3.205 o ângulo de potência tem de ser dado em radianos para que haja a possibilidade de se aplicar a condição de linearidade, em outras palavras, para que haja uma aproximação do tipo $sin\,\delta \cong \delta$ .

Agora é possível montar um diagrama mais completo em que aparece a máquina síncrona com o seu sistema de regulação de velocidade contra o barramento infinito cuja variação de freqüência é supostamente tomada como nula.

É interessante notar a presença de dois conceitos novos que apareceram na análise desse sistema composto por uma máquina síncrona contra o barramento infinito. São eles o coeficiente de amortecimento e o coeficiente de sincronismo ou coeficiente de torque sincronizante como foi mencionando anteriormente. O coeficiente de amortecimento associa-se à relação potência com a rotação síncrona do sistema e o coeficiente de sincronismo associa-se à relação potência com o ângulo de potência. O primeiro tem a ver com a influência da carga da rede, como já foi explicado antes, enquanto o segundo tem a ver com a potência transferida entre máquina e barramento infinito através do sistema de transmissão.

O conceito de barramento infinito pode ser simplificado dizendo-se apenas que ele se trata de um sistema que trabalha como um regulador de velocidade isócrono.

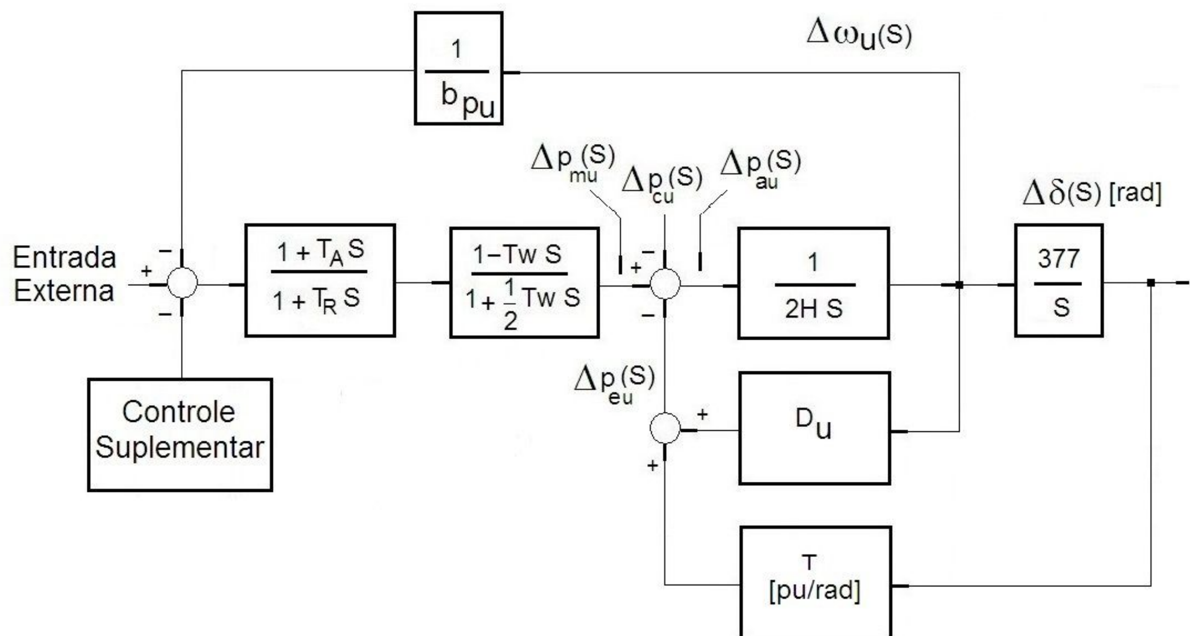



***Figura 3.39 – Sistema de Regulação de Velocidade com Máquina Contra Barra Infinita***

A figura 3.39 mostra o sistema de regulação de uma máquina contra o barramento infinito onde todas as variáveis se encontram em pu, na base de valores escolhida previamente, sendo que a variável $\Delta\delta(S)$ se encontra em valor atual, ou seja, em radianos elétricos. Lembrar que, na base de valores

adotada, a velocidade angular base é $\omega_0 = 377\,rad/s$ correspondente a uma freqüência base de $60\,Hz$.

**Nota:** o parâmetro identificado como coeficiente de amortecimento $D$, parâmetro já explicado anteriormente, não representa somente os efeitos amortecedores de origem elétrica; ele também reúne os efeitos de amortecimento da própria turbina hidráulica. Na literatura técnica há referências nesse sentido.

---

## EXEMPLO 3.16

Mostrar que o coeficiente de sincronismo, ou de torque sincronizante como também é conhecido o parâmetro $T$ da equação 3.207, é afetado pelo sistema de transmissão. Mostrar também sua influência na estabilidade operativa do sistema interligado através da variação desse parâmetro para os seguintes valores:

$T = 1\,pu/rad$

$T = 3{,}1\,pu/rad$

Considerar, para efeito de estudo, o diagrama máquina contra o barramento infinito da figura 3.39 com os seguintes dados, já fornecidos em pu na base de valores nominais da maquina em questão:

$b_{pu} = 0{,}045\,pu/pu$

$b_{tu} = 0{,}30\,pu/pu$

$T_A = 2\,s$

$T_R = 18{,}444s$

$T_y = 0{,}14s$

$T_G = 0{,}184s$

$D_U = 0{,}5\,pu/pu$

$T_W = 0{,}8\,s$

$2H = 11{,}52\,s$

Os dados fornecidos pertencem a uma UHE de grande porte do sistema nacional de energia elétrica. Desprezar a constante de tempo da válvula piloto.

**Solução:**

Quando se aborda o tema da estabilidade dos SEPs, não se prescinde da análise desse ou daquele parâmetro. O certo é que todos os parâmetros e variáveis de estado do sistema de controle se encontram envolvidos nesse cerne.

A questão do coeficiente de sincronismo ou de torque sincronizante tem tudo a ver com a particularidade da questão de entrada ou saída de linhas que compõem o sistema de transmissão da rede interligada.
Lembrando aqui, a análise atual está focada na operação em rede interligada e, nesse caso, a interação da geração com a carga conectada agora se caracteriza por uma sistema multi-máquina interligado através de um conjunto de LTs e LIs. Nesse exemplo, a abordagem se dará pela utilização do sistema máquina contra o barramento infinito.
Como se sabe, na abordagem máquina contra barramento infinito, o sistema ao qual a máquina se encontra interligada é visto na forma de um equivalente uma vez que o interesse, num estudo desse tipo, se fixa à máquina em questão e não diretamente ao sistema em si. O sistema visto a partir do barramento de saída da máquina, para fora desta, é visto como uma máquina de porte infinito se comparada â máquina sob estudo sendo que a tensão a freqüência desse sistema infinito não variam com a carga.

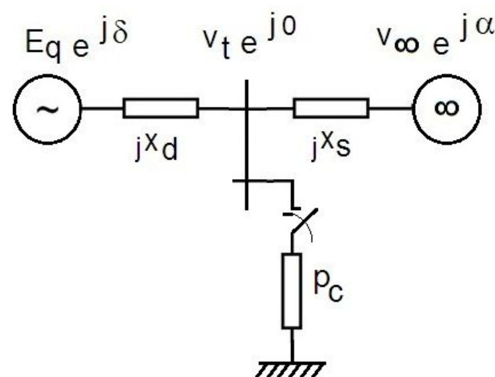



***Figura 3.40 – Arranjo com Máquina Contra Barra Infinita com Entrada de Carga Local Pc***

Na figura 3.40 considerar a seguinte legenda:

$E_q$ : vetor fem da máquina geradora em pu
$v_t$ : vetor tensão da barra de saída da máquina tomado como referência em pu
$v_\infty$ : vetor tensão da barra infinita em pu
$x_d$ : reatância de eixo direto da máquina associada em pu
$x_s$ : reatância equivalente vista para fora da barra de saída da máquina em pu
$\delta$: ângulo elétrico entre os vetores $E_q$ e $v_t$ em radianos
$\alpha$: ângulo elétrico entre os vetores $v_t$ e $v_\infty$ em radianos
$p_c$ : carga local de potência em pu

A figura 3.40 mostra, de uma forma bem simples, um arranjo com uma máquina síncrona acoplada a um barramento infinito.

Para comprovar a relação do coeficiente de sincronismo ou de torque sincronizante $T$ com o sistema de transmissão, devem-se analisar as equações 3.206 e 3.207 que determinam o seguinte:

$$\frac{\Delta p_{eu}(S)}{\Delta \delta_u(S)} \cong \frac{1}{x_{12u}} = T'_{12u} \qquad (3.209)$$

Assim, percebe-se facilmente que o valor do coeficiente de torque sincronizante dependerá do valor da reatância de interligação entre os pontos de transmissão da potência numa relação inversa. Isso, em outras palavras, quer dizer que quanto mais linhas em paralelo houver entre os pontos de transmissão quanto menor será a impedância entre esses pontos e mais forte será a interligação em termos de estabilidade. Os sistemas de transmissão em anel apresentam melhor desempenho em nível de estabilidade que aqueles sistemas radiais, muitas vezes montados em arranjos com apenas uma LT ou LI. São esses condicionantes que definem a chamada operação ora em rede interligada ora em rede isolada.

Na prática, o que se nota em termos de operação é que os sistemas ligados à rede básica de transmissão apresentam características tais que os qualificam como uma operação em rede interligada, ou seja, sistemas que apresentam baixos valores de impedância de interligação entre as unidades geradoras.

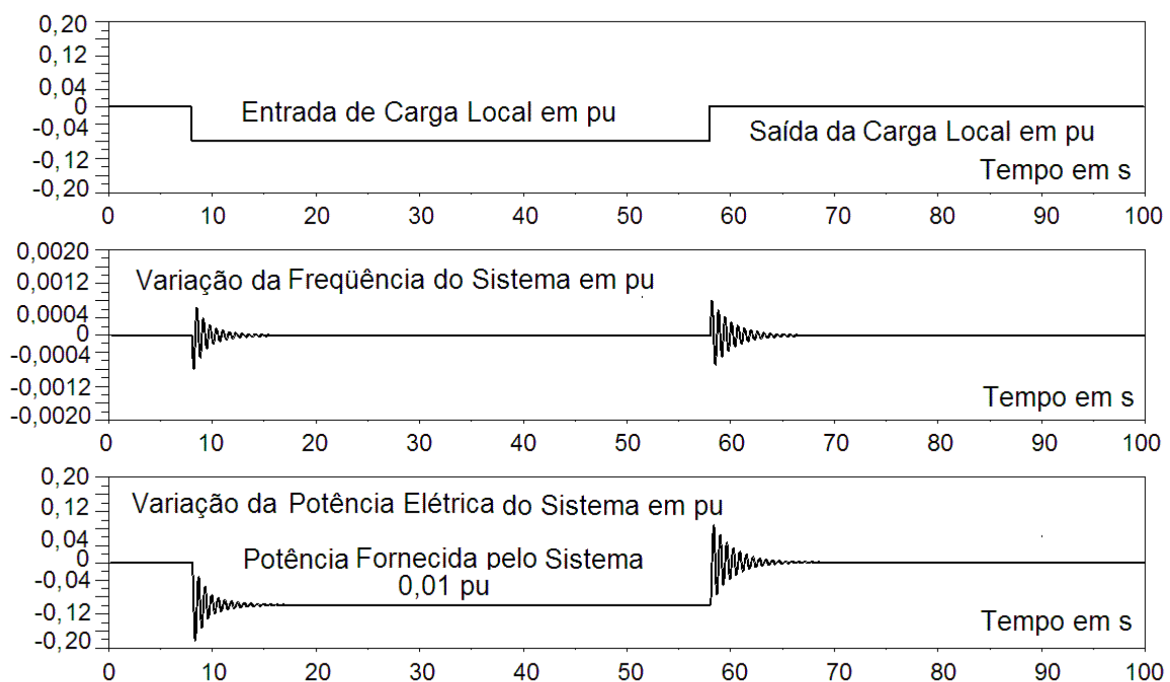



***Figura 3.41 – Arranjo com Máquina Contra Barra Infinita com Entrada de Carga Local =? , para =1 [Rede Interligada]***

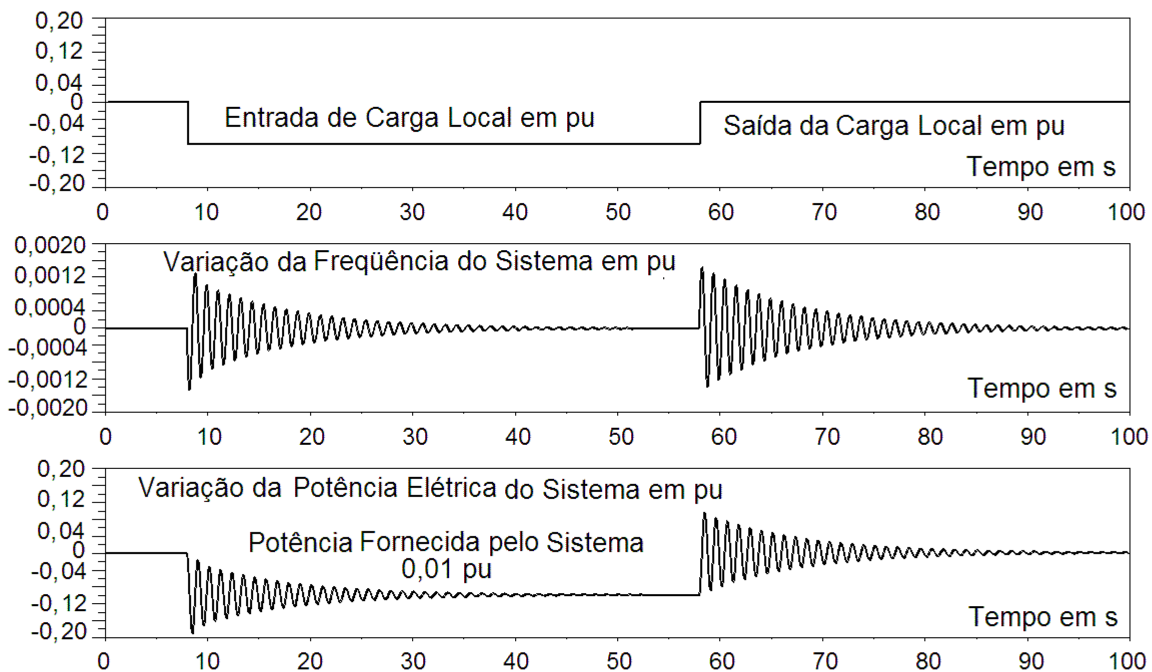



***Figura 3.42 – Arranjo com Máquina Contra Barra Infinita com Entrada de Carga Local = , para = [Rede Isolada]***

**Nota a respeito do exemplo 3.16:**

Aqueles sistemas que operam fora da rede básica, normalmente sistemas de baixa e média tensão, abaixo dos $138\,kV$, por exemplo, notadamente, se apresentam com valores elevados de impedância de interligação entre as unidades geradoras, fato esse que os definem como uma operação em rede isolada. As figuras 3.41 e 3.42 mostram a comparação entre os desempenhos destas duas modalidades operativas, ou seja, quando a operação se dá em rede interligada e o oposto quando a operação se dá em rede isolada. A alteração está no valor dos coeficientes de torque sincronizante envolvidos. As figuras 3.41 e 3.42 se reportam a duas simulações realizadas com o modelo real validado através de ensaios de campo.

Observar que a resposta do sistema de regulação de velocidade, a uma entrada de carga local, se apresentou mais firme para o sistema cujo coeficiente de torque sincronizante era maior. Se for calculada, a freqüência natural amortecida do presente sistema estará na casa dos $1{,}55\,Hz$ . O valor pode ser obtido a partir das formas de onda em qualquer uma das figuras 3.41 ou 3.42.

---

## <u>EXEMPLO 3.17</u>

Considerando-se o sistema de regulação de velocidade de uma turbina hidráulica representado pelo diagrama em blocos da figura 3.39 e aplicando a ele os dados fornecidos no exemplo 3.16, anterior, determinar analiticamente as expressões da freqüência natural não amortecida, da freqüência natural amortecida e do coeficiente de amortecimento do processo.
A partir das expressões e dos dados calcular os valores dos parâmetros pedidos.

**Solução:**

A questão do cálculo analítico dos parâmetros pedidos no enunciado desse problema se remonta ao capítulo 2 quando foram analisadas as funções de transferência através da chamada equação característica. No presente caso, para que tais parâmetros sejam analisados, é necessário, primeiramente, definir os limites daquilo que em controle automático se costuma designar como processo do sistema.
No diagrama em blocos da figura 3.39, deve-se levantar a função de transferência considerando que não haja atuação do regulador de velocidade, em outras palavras, considerando como nula a variação da potência mecânica.
Deste modo, em termos de diagrama em blocos, a figura 3.43 pode ser utilizada para tal.

Resolvendo-se o laço interno do diagrama em blocos da figura 3.43 através da aplicação do critério representado pela equação 2.78, onde uma função de transferência genérica de um sistema realimentado é dada pela relação seguinte:

$$\frac{\Delta\omega(S)}{\Delta p_C(S)} = \frac{g(S)}{1+g(S)h(S)}$$

pode-se redesenhar e obter o novo diagrama em blocos mais simplificado conforme está mostrado na figura 3.44, seguinte:

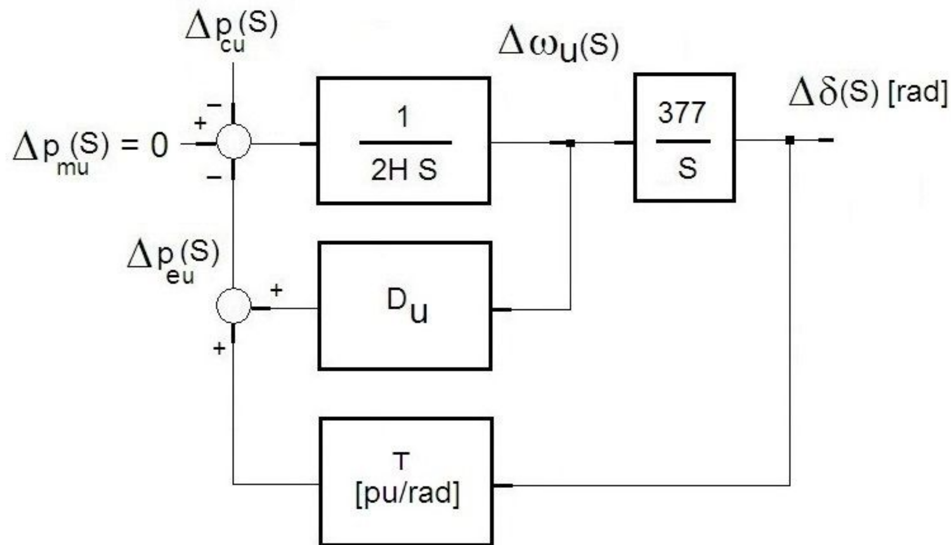



***Figura 3.43 – Processo Máquina Contra Barra Infinita com Entrada de Carga Local $\Delta p_C$***

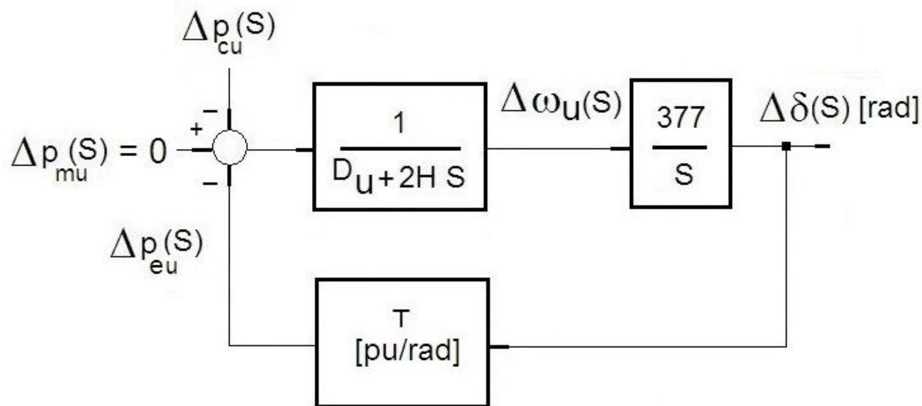



***Figura 3.44 – Processo Máquina Contra Barra Infinita Simplificado***

Com a aplicação do mesmo critério ao diagrama em blocos da figura 3.44, utilizando-se novamente da equação 2.78, o novo diagrama em blocos ficará mais simplificado ainda permitindo a obtenção da função de transferência final, apresentada a seguir:

$$\frac{\Delta\delta(S)[rad/s]}{\Delta p_{cu}(S)} = -\frac{\dfrac{377}{S(D_u+2HS)}}{1+\dfrac{377}{S(D_u+2HS)}T} = -\frac{377}{2H}\frac{1}{S^2+\dfrac{D_u}{2H}S+\dfrac{377}{2H}T}$$

A equação característica do sistema, conforme foi descrito no capítulo 2, é dada pelo polinômio denominador da função de transferência. Assim, tem-se que:

$$1 + g(S)h(S) \equiv S^2 + \frac{D_u}{2H}S + \frac{377}{2H}T$$

Trazendo-se aqui, mais uma vez, a teoria do capítulo 2, aplicada aos sistemas de segunda ordem padrão, como subsídio, vem que a equação característica será dada pela equação 2.95, o que permite que se monte o seguinte conjunto de expressões:

$$Q(S) \equiv S^2 + 2\xi\,\omega_n\,S + \omega_n{}^2 \equiv S^2 + \frac{D_u}{2H}S + \frac{377}{2H}T$$

Pela comparação de coeficientes das duas expressões anteriores, a equação característica da teoria com a equação característica do processo em questão, obtêm-se as expressões para os parâmetros coeficiente de amortecimento $\xi$ e freqüência natural não amortecida $\omega_n$, respectivamente, pedidos pelo problema. Senão veja-se:

$$2\xi\,\omega_n = \frac{D_u}{2H} \quad \therefore \quad \xi = \frac{D_u}{4H\,\omega_n} \qquad (3.210)$$

$$\omega_n{}^2 = \frac{377}{2H}T \qquad (3.211)$$

Substituindo-se os valores fornecidos pelo enunciado do problema em questão, na equação 3.211, tem-se o valor da freqüência natural amortecida pedida:

$$\omega_n{}^2 = \frac{377}{2H}T = \frac{377}{11{,}52}3{,}1 \quad \therefore \quad \omega_n = 10{,}072 \text{ rad/s}$$

Da equação 3.210, tem-se o valor do coeficiente de amortecimento pedido:

$$\xi = \frac{D_u}{2(2H)\omega_n} = \frac{0{,}5}{2 \times 11{,}52 \times 10{,}072} = 0{,}00215$$

Para a determinação da freqüência natural amortecida do sistema em questão, novamente a teoria do capítulo 2 será utilizada como subsídio.

As raízes do polinômio característico, considerando-se o sistema de segunda ordem, têm a seguinte forma em função dos parâmetros $\omega_n$ e $\xi$, onde $\omega_d$ é a expressão para freqüência natural amortecida do sistema:

$$S_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 10{,}072 \times \sqrt{1-(0{,}00215)^2} = 10{,}0719 \text{ rad/s}$$

**Nota a respeito do exemplo 3.17:**

O que se nota de início, nesse caso, é que o sistema de controle, conforme os cálculos e simulação realizados, se apresentou oscilante e isso pode ser confirmado pelo baixo valor do coeficiente de amortecimento $\xi$.
Depois, por terem sido utilizados dados reais e validados com ensaios de campo, o valor calculado da freqüência natural amortecida do sistema em questão pode ser comparado com o valor real obtido por intermédio de ensaios de campo.
O valor encontrado nos ensaios de campo para a freqüência natural amortecida ficou em $1{,}5 \pm 0{,}1 Hz$ e, pela aplicação do método analítico de cálculo, obteve-se o seguinte valor:

$$f_n = \frac{10{,}072}{2\pi} = 1{,}60\, Hz$$

Quanto à faixa de valores das medições de campo, cita-se o seguinte: não se deve falar que medições de campo sejam exatas, o que se pode dizer é que o grau de exatidão dessas medições é tal, tomando-se como base um valor padrão que deve ser estipulado pelo projetista, segundo um critério de julgamento próprio. Foi assim que, a partir de várias medições realizadas através da instalação de dispositivos de monitoramento e medição digital em pontos específicos do SEP, se definiu uma faixa de precisão de medida onde se lidou com parâmetros de erro relativo do processo. A faixa de valores obtida pode ser relacionada à faixa de medida associada ao erro da medição.

---

## EXEMPLO 3.18

O diagrama em blocos ilustrado na figura 3.45 representa o processo de sincronismo de uma máquina síncrona, um gerador de grande porte de uma unidade de produção que deverá ser interligada ao SEP.
Mesmo considerando que no momento da sincronização não havia nenhum comando através do regulador de velocidade nem qualquer tipo de carga local a ser conectada, quando foi dado o comando de fechamento do disjuntor de alta tensão, para o acoplamento da máquina ao sistema interligado, uma pequena diferença entre os ângulos de tensão da máquina, barra *incoming*, e de tensão da barra da SE, barra *running*, em função de desajuste do relé 25 de sincronismo automático, provocou o aparecimento de uma oscilação no sinal da potência ativa elétrica. Provar que o sinal da potência ativa elétrica na linha

curta, entre máquina e sistema, pode ser representado, matematicamente, pela expressão seguinte:

$$\Delta p_{\ell u}(t) = P_{\ell 0}\ e^{\sigma t} cos(\omega_d\ t) \quad \text{em pu} \qquad (3.212)$$

onde

$\Delta p_{\ell u}(t)$ : variação de potência na linha curta ao longo do tempo em pu

$P_{\ell 0}$ : potência inicial em função da diferença de ângulos no sincronismo em pu

$t$ : variável independente tempo em $s$

Considerando-se os mesmos dados do exemplo 3.16, avaliar o impacto na potência ativa elétrica na linha curta quando se proceder ao fechamento do disjuntor para dois valores da diferença entre os ângulos de tensão de *10º elétricos* e de *30º elétricos*.

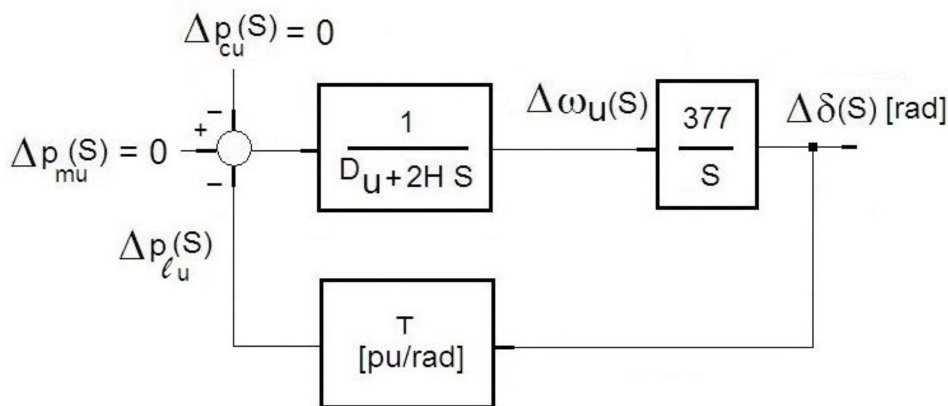



***Figura 3.45 – Processo de Sincronização Máquina Contra Barra Infinita***

Considerar a seguinte legenda para a figura 3.45:

$\Delta\delta$ : ângulo de potência da máquina em radianos elétricos

$\Delta\delta_S$ : ângulo de potência da barra infinita em radianos elétricos

Apenas lembrando que, para a determinação da freqüência natural amortecida do sistema em questão, novamente a teoria do capítulo 2 deverá ser utilizada como subsídio.
As raízes do polinômio característico, considerando-se o sistema de segunda ordem, têm a seguinte forma em função dos parâmetros $\omega_n$ e $\xi$, onde $\omega_d$ é a expressão para freqüência natural amortecida do sistema e $\xi$ o coeficiente de amortecimento:

$$S_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$$

onde

$$\sigma = -\xi\,\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

**Solução:**

Já se sabe, através de ensaios especiais realizados na UHE Emborcação (4 x 298 MW), usina pertencente ao parque gerador da CEMIG, que o processo de sincronização de máquinas síncronas sob diferenças de ângulo elétrico entre as tensões de barra *running* e de barra *incoming* sujeita a estrutura mecânica do conjunto girante, a ser sincronizado, a esforços de grande monta.
No presente exemplo, o que se pede é conferir a equação 3.212 através da teoria até aqui exposta e, posteriormente, efetuar comparações de desempenho.
O novo diagrama em blocos a ser estudado terá como entrada a diferença de ângulos elétricos representada pela variável $\Delta\delta_S$ enquanto por saída terá a variável $\Delta p_\ell$ , ver diagrama em blocos mostrado na figura 3.46 seguinte.

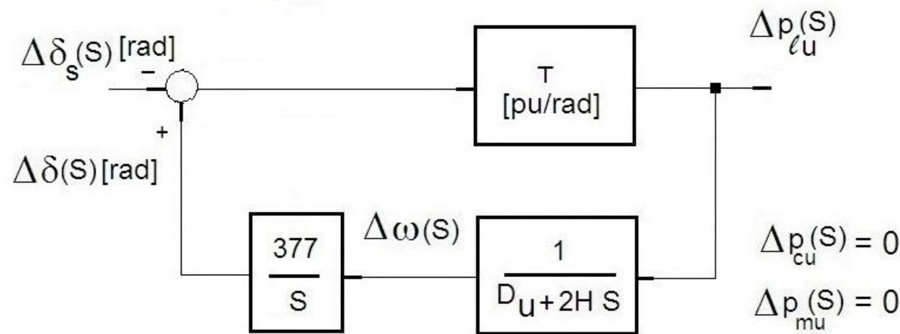



***Figura 3.46 – Processo de Sincronização Máquina Contra Barra Infinita com Defasagem de Tensões***

Resolvendo-se o laço interno do diagrama em blocos da figura 3.46 através da aplicação do critério representado pela equação 2.7 onde uma função de transferência genérica de um sistema realimentado é dada pela relação:

$$\frac{\Delta\omega(S)}{\Delta p_C(S)} = \frac{g(S)}{1+g(S)h(S)}$$

obtém-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\Delta p_{\ell u}(S)}{\Delta\delta(S)[rad/s]} = -\frac{T}{1+\dfrac{377}{S(D_u+2HS)}T} = -\frac{T\,S(S+\dfrac{D_u}{2H})}{S^2+\dfrac{D_u}{2H}S+\dfrac{377}{2H}T} \qquad (3.213)$$

Considerando-se que, a uma a diferença de ângulo elétrico $\Delta\delta_S(t)$ encontre-se associada uma variação de potência na linha curta entre máquina e barramento infinito de $\Delta p_{\ell u}(t)$ vem, pelo diagrama em blocos da figura 3.46, já no plano complexo de Laplace, que:

$$\Delta p_{\ell u}(S) = T\,\Delta\delta_S(S) \quad \therefore \quad \Delta\delta_S(S) = \frac{1}{T}\Delta p_{\ell u}(S)_{me} \quad rad$$

Sendo a variação caracterizada por um degrau unitário, pode-se escrever que:

$$\Delta\delta_{S0}(S) = \frac{1}{TS}\Delta p_{\ell 0} \qquad (3.214)$$

Levando-se a expressão anterior, da variação do ângulo elétrico $\Delta\delta_{S0}$, na equação 3.213, referente à variação da potência na linha, vem que:

$$\Delta p_{\ell u}(S) = -\frac{1}{TS}\Delta p_{\ell 0}\frac{TS(S+\dfrac{D_u}{2H})}{S^2+\dfrac{D_u}{2H}S+\dfrac{377}{2H}T} = \Delta p_{\ell 0}\frac{(S+\dfrac{D_u}{2H})}{S^2+\dfrac{D_u}{2H}S+\dfrac{377}{2H}T} \qquad (3.215)$$

Para que se possa comprovar a equação 3.212, será necessário que se passe a equação 3.215 para o domínio do tempo.

A equação 3.212 sugere a utilização de uma tabela qualquer de transformada de Laplace. Nesta tabela encontra-se o seguinte:

**Tabela 3.1**

**Transformada de Laplace de Funções Temporais**

| **Domínio Complexo** | **Domínio do Tempo** |
|---|---|
| $F(S) = \dfrac{(S+a)}{(S+a)^2+\omega^2}$ | $f(t) = e^{-at}\cos\omega t$ |

Se bem observada, a função de transferência da equação 3.213 não é exatamente a função fornecida pela tabela 3.1 anterior, porém através de um artifício algébrico é possível igualar ambas as equações. Senão, veja-se.

Uma boa escolha é aquela que procura, se assim for possível, não alterar substancialmente a equação característica da função de transferência uma vez que é nesta equação que reside a natureza da resposta do sistema por ela representado.

$$\frac{(S+\frac{D_u}{2H})}{S^2+\frac{D_u}{2H}S+\frac{377}{2H}T} \cong \frac{(S+\frac{D_u}{2H})}{(S+\frac{D_u}{4H})^2+\frac{377}{2H}T} = \frac{(S+\frac{D_u}{2H})}{S^2+\frac{D_u}{2H}S+(\frac{D_u}{4H})^2+\frac{377}{2H}T}$$

Trazendo-se na equação anterior os valores dados para o sistema em questão, vem que:

a) para a função de transferência real:

$$\frac{(S+\frac{D_u}{2H})}{S^2+\frac{D_u}{2H}S+\frac{377}{2H}T} = \frac{(S+0{,}0434)}{S^2+0{,}0434S+101{,}4496}$$

b) para a função de transferência aproximada:

$$\frac{(S+\frac{D_u}{2H})}{S^2+\frac{D_u}{2H}S+(\frac{D_u}{4H})^2+\frac{377}{2H}T} = \frac{(S+0{,}0434)}{S^2+0{,}0434S+(0{,}0217)^2+101{,}4496} =$$

$$= \frac{(S+0{,}0434)}{S^2+0{,}0434S+101{,}4500}$$

Então, uma função de transferência aproximada que respeite o aspecto da equação característica do sistema em questão, e que ao mesmo tempo obedeça à forma da tabela 3.1 que expressa a conversão analítica do plano complexo para o plano temporal, seria a seguinte:

$$FT \cong \frac{(S+\frac{D_u}{4H})}{(S+\frac{D_u}{4H})^2+\frac{377}{2H}T} \qquad (3.216)$$

Notar que no denominador da função de transferência da equação 3.216, o fator $(\frac{D_u}{4H})^2$ foi desprezado em relação ao fator $\frac{377}{2H}T$.

Assim, considerando que a função de transferência da equação 3.216 represente razoavelmente o sistema em questão, a resposta do sistema, representada pela equação 3.214, tomaria o seguinte aspecto:

$$\Delta p_{\ell u}(S) = \frac{(S+\frac{D_u}{4H})}{(S+\frac{D_u}{4H})^2+\frac{377}{2H}T}\Delta p_{\ell 0} \qquad (3.217)$$

No domínio do tempo, então, o que se obteria seria a seguinte resposta com base na tabela 3.1:

$$\Delta p_{\ell u}(t) = \Delta p_{\ell 0}\ e^{-\frac{D_u}{2H}t}\ cos(\sqrt{\frac{377}{2H}T}\,)t \qquad (3.218)$$

Para completar o problema em demanda, serão calculadas as respostas para avaliar o impacto na potência ativa elétrica na linha curta quando se proceder ao fechamento do disjuntor para dois valores da diferença entre os ângulos de tensão de *10º elétricos* e de *30º elétricos*, entre as barras *incoming* e *running*, da seguinte forma:

a) para uma diferença de *10º elétricos* ou *0,1745 radianos elétricos* que, pela equação 3.214, correspondem de fato a uma variação de potência na linha de *0,54095 pu*, tem-se, substituindo os devidos valores na equação 3.217, que:

$$\Delta p_{\ell}(t) = 0{,}54095\,e^{-0{,}0217\,t}\,cos(10{,}072)t \qquad (3.219)$$

b) para uma diferença de *30º elétricos* ou *0,5236 radianos elétricos* que, pela equação 3.214, correspondem de fato a uma variação de potência na linha de *1,62316 pu*, tem-se, substituindo os devidos valores na equação 3.217, que:

$$\Delta p_{\ell}(t) = 1{,}62316\ e^{-0{,}0217\,t}\,cos(10{,}072)t \qquad (3.220)$$

**Nota a respeito do exemplo 3.18:**

Foi importante confirmar no desenvolvimento do raciocínio desse exemplo a importância da equação característica em termos de resposta do sistema. Trata-se da natureza da resposta da máquina, uma forma peculiar de se referir. Outro ponto crucial foi a confirmação do impacto a que foi submetida a máquina quando o sincronismo foi efetivado numa condição desfavorável, no caso aqui verificado foi a diferença entre os ângulos de tensão da máquina, barra *incoming*, e de tensão da barra da SE, barra *running*. Para ambos os valores de defasamento, os números atingidos pela potência acelerante foram elevados.
Na prática, os fabricantes de relés de sincronismo automático, em associação com os fabricantes de geradores de grande porte, principalmente, sugerem que um bom ajuste do sincronismo automático seria aquele que não venha impor ao equipamento um valor do pico de potência acelerante maior que *0,30 pu* ou *30%*, considerando-se como potência base o valor da potência nominal da

própria máquina. Atualmente, com os atuais relés de sincronismo automático de tecnologia digital, consegue-se abaixar o valor do pico máximo de potência acelerante até valores da ordem de $0{,}05\ pu$ ou $5\%$.

---

## EXEMPLO 3.19

Uma determinada usina hidrelétrica encontra-se interconectada ao SIN através de uma LT de $230\ kV$. Também interconectada a esta UHE existe um conjunto de cargas locais que juntas somam $500\ MW$. Essas cargas estão sendo alimentadas da seguinte forma: $450\ MW$ pela UHE e $50\ MW$ pelo SIN através da LT. Em determinado momento, por atuação da proteção direcional da LT, houve trip dos disjuntores na SE da instalação de modo que o sistema formado pela UHE e pelo conjunto de cargas passou a operar de modo isolado.
Sabendo que existem $30\ MW$ de reserva girante entre as máquinas da instalação hidrelétrica em questão e que esta reserva encontra-se distribuída na geração máxima de $480\ MW$, numa taxa de regulação de $5\ \%$, na base dessa geração, pede-se o valor final da freqüência desse sistema particular que permaneceu isolado após o distúrbio sem que houvesse atuação de qualquer relé do tipo *load shedding* ou de corte de carga e que houve atuação do controle suplementar de regulação secundária para os $30\ MW$ da reserva girante. Considerar que o sistema apresenta uma variação de $2\ \%$ da carga total instalada para uma variação $1\ \%$ da freqüência padrão do $60\ Hz$. Apresentar o gráfico da freqüência *versus* a carga depois do distúrbio.

**Solução:**

O que se pede nesse problema é o valor final de freqüência depois que houve o isolamento da instalação que permaneceu estável após a sua desconexão do SIN.
Evidentemente que a freqüência síncrona não será mais ditada pela dinâmica do SIN, mas pela dinâmica das máquinas que compõem a geração a UHE. A saída do SIN é comprável à entrada de uma carga de $50\ MW$, na forma de uma função degrau no tempo, sobre a instalação cuja geração máxima é de $450\ MW$. Não importa quantas máquinas fazem parte da UHE ou mesmo se há máquinas paradas, o que realmente importa é a potência que está sendo gerada e a reserva de geração ainda existente na instalação.

Assim, a geração máxima disponível agora será:

$$p_{(UHE)} + p_{(reserva\,girante)} = 450\,MW + 30\,MW = 480\,MW$$

$$p_{(carga\ instalada)} = 500\,MW$$

A idéia é calcular o valor dos parâmetros: coeficiente de amortecimento de carga $D$ e queda permanente de velocidade $b_p$, em potência, ambos

associados ao sistema isolado formado pela UHE e seu conjunto de cargas locais, em seus valores atuais. Depois será buscar o traçado da reta que representa cada um deles.

a) parâmetro $D$: considerando a carga total alimentada e envolvida no processo, o parâmetro $D$, a ela associado, é dado pela equação 3.130 que fornece a seguinte fórmula:

$$\frac{1}{D_u} = \frac{\Delta \omega_u}{\Delta p_{cu}} = \frac{\frac{\Delta \omega}{\omega_0}}{\frac{\Delta p_c}{P_0}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta p_c} \frac{P_0}{\omega_0} = \frac{1}{D} \frac{P_0}{\omega_0} \quad \therefore \quad \frac{1}{D} = \frac{1}{D_u} \frac{\omega_0}{P_0}$$

Assim, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2} \frac{60}{500} = \frac{1}{16,666} \ Hz/MW \qquad (3.221)$$

b) parâmetro $b_p$: considerando a potência total gerada na UHE e envolvida no processo, o parâmetro $b_p$, em potência, a ela associado, é dado pela equação 3.147 que fornece a seguinte fórmula:

$$b_{pu} = -\frac{\frac{\Delta \omega}{\omega_0}}{\frac{\Delta p_c}{P_0}} = -\frac{\Delta \omega}{\Delta p_c} \frac{P_0}{\omega_0} = b_p \frac{P_0}{\omega_0} \quad \therefore \quad b_p = b_{pu} \frac{\omega_0}{P_0}$$

Assim, tem-se a seguinte relação:

$$b_p = 0,05 \frac{60}{480} = \frac{1}{160} \ Hz/MW \qquad (3.222)$$

Os pontos principais a serem traçados na carta freqüência *versus* potência propiciarão que sejam esboçadas as retas referentes ao estatismo permanente e ao coeficiente de amortecimento da carga, respectivamente as relações básicas 3.221 e 3.222 em $Hz/MW$ .

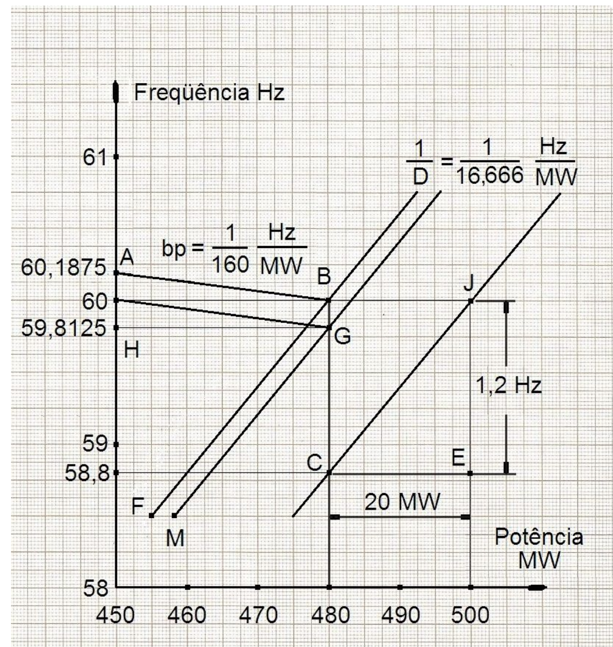



***Figura 3.47 – Variação Freqüência versus Potência do Exemplo 3.19***

O cálculo dos pontos $A$ e $H$ da figura 3.47 foi obtido a partir da relação da equação 3.222, que representa a reta $\overline{AB}$, da seguinte forma:

$$b_p = \frac{\Delta\omega}{\Delta p} = \frac{1}{160} \quad \therefore \quad \Delta\omega = \frac{30}{160} = \frac{30}{160} = 0{,}1875\,Hz$$

Agora, as retas $\overline{FB}$, $\overline{MG}$ e $\overline{CJ}$ são paralelas entre si e podem ser obtidas a partir da relação da equação 3.221.

Como resposta ao questionamento do problema, observando o gráfico da figura 3.47, chega-se a conclusão de que a freqüência síncrona final do sistema composto da UHE e suas cargas, após a contingência, será de $58{,}8\,Hz$. O trajeto da freqüência começa no ponto $60\,Hz$, depois segue até o ponto $G$ e finaliza no ponto $C$. Notar que a ação do controle suplementar se dá no ponto $G$ levando a freqüência a $60\,Hz$ no ponto $B$. Isso só foi possível pela ação do controle suplementar. Após esse ponto não há mais regulação nem primária nem secundária somente a redução de carga através do coeficiente de amortecimento de carga.

**Nota a respeito do exemplo 3.19:**

Este exemplo é muito interessante no que concerne ao fato de que, nas operações em rede interligada ou mesmo em rede isolada, o comportamento da carga elétrica conectada acaba por trazer um efeito interessante à regulação de velocidade do sistema. Neste exemplo específico, a carga conectada era tal que sua interferência no processo de regulação foi o de

redução de potência uma vez que não havia mais reserva girante além dos $480 MW$ gerados pela UHE. Mesmo sendo a carga superior à geração, o sistema permaneceu estável, síncrono, porém em um regime de subfreqüência que foi ditado pela característica da carga já que os reguladores de velocidade tinham seus estoques esgotados.

---

## EXEMPLO 3.20

Desenvolver uma fórmula recursiva, semelhante àquela desenvolvida na equação 3.199 que foi aplicada ao parâmetro coeficiente de amortecimento de carga, de modo a permitir que se possa mudar também de base de valores o parâmetro queda permanente de velocidade ou estatismo permanente quando dado em por unidade.

**Solução:**

Neste caso, seguindo semelhante raciocínio que foi aplicado no desenvolvimento da equação 3.199, a questão é desenvolver uma fórmula recursiva que permita, a partir de um valor em pu do parâmetro queda permanente de velocidade ou estatismo permanente, dado numa certa base de valores, se passar diretamente a outro valor dado em outra base.

Seja considerar dois valores pu, para o parâmetro queda permanente de velocidade ou estatismo permanente de certo sistema, cada um deles vinculado a duas bases diferentes de valores conforme está apresentado a seguir.

na base 1 $$b_{pu_1} = -\frac{\frac{\Delta\omega_1}{\omega_{B1}}}{\frac{\Delta p_1}{P_{B1}}} \qquad (3.223)$$

na base 2 $$b_{pu_2} = -\frac{\frac{\Delta\omega_2}{\omega_{B2}}}{\frac{\Delta p_2}{P_{B2}}} \qquad (3.224)$$

Sabe-se também que, para ambas as bases de valores, considerando o sistema síncrono com a mesma variação de carga:

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_{B1}} = \frac{\Delta\omega_2}{\omega_{B2}} = \frac{\Delta\omega}{\omega_B} \quad \text{e} \quad \Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$$

Deste modo, as equações 3.223 e 3.224 podem ser reescritas da seguinte forma:

na base 1 $$b_{pu_1} = -\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega_B}}{\frac{\Delta p}{P_{B1}}} \qquad (3.225)$$

na base 2 $$b_{pu_2} = -\frac{\frac{\Delta\omega}{\omega_B}}{\frac{\Delta p}{P_{B2}}} \qquad (3.226)$$

Igualando as variações de velocidade em regime permanente, para ambos os sistemas, após as devidas simplificações tem-se que:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_B} = -b_{pu1}\frac{\Delta p}{P_{B1}} = -b_{pu2}\frac{\Delta p}{P_{B2}} \quad \therefore \quad b_{pu2} = b_{pu1}\frac{P_{B2}}{P_{B1}} \qquad (3.227)$$

---

## EXEMPLO 3.21

Imaginando o mesmo problema do exemplo 3.19 anterior, apenas com a diferença de que existem agora *50 MW* de reserva girante entre as máquinas da instalação hidrelétrica em questão e que esta reserva encontra-se repartida na geração máxima de *100 MW* , numa taxa de regulação de potência de *5 %,* na base dessa geração, pede-se o valor final da freqüência desse sistema particular após o distúrbio de abertura dos disjuntores da LI de interligação com o conseqüente isolamento do sistema.

**Solução:**

Neste caso, seguindo semelhante raciocínio que foi aplicado na resolução do exemplo 3.19 anterior, a freqüência deverá cair numa taxa tal que poderá ser também calculada a partir das equações 3.221 e 3.222, tomando-se o devido cuidado de recalcular o valor do estatismo permanente da reserva girante que agora tem o valor *5 %* na base de *100 MW* .

Optando pela resolução do problema em por unidade, devem-se colocar todos os parâmetros envolvidos numa mesma base de valores.

Antes disso, será desenvolvido um procedimento específico para que se coloquem, numa mesma fórmula recursiva, os efeitos tanto da queda

permanente de velocidade ou estatismo permanente quanto do coeficiente de amortecimento de carga, pois ambos afetam a seu turno a lei de distribuição da potência em função da variação da velocidade ou freqüência do sistema.

Considerando-se a figura 3.32, anterior, que pode perfeitamente representar o sistema em questão, em regime permanente, é fácil concluir que no somador principal, a potência acelerante do sistema, em pu, é dada por:

$$\Delta p_{au}(t) = \Delta p_{mu}(t) - \Delta p_{eu}(t) - \Delta p_{cu}(t) \qquad (3.228)$$

Também é fácil entender que, para o sistema ser estável, a sua potência acelerante, após o ilhamento da UHE, deverá ser nula. A questão se o estado final for dar em uma sobre ou subfreqüência vai depender se houver saída ou entrada de carga, respectivamente.

Rearranjando a equação 3.228, sendo $\Delta p_a(t) = 0$, a nova disposição das potências permite que se escreva a relação:

$$\Delta p_{mu}(t) - \Delta p_{eu}(t) = \Delta p_{cu}(t) \qquad (3.229)$$

E tomando como base o diagrama da figura 3.32, em regime permanente, onde as parcelas das potências mecânica da turbina e elétrica da carga são colocadas com função da freqüência elétrica do sistema, tem-se que:

$$-\frac{1}{b_p}\Delta \omega_u(t) - D_u\,\Delta \omega_u(t) = \Delta p_{cu}(t)$$

Assim, finalmente, obtém-se a relação, numa mesma fórmula recursiva, os efeitos tanto da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente quanto do coeficiente de amortecimento de carga. Senão, veja-se:

$$-\left(\frac{1}{b_{pu}} + D_u\right)\Delta \omega_u(t) = \Delta p_{cu}(t) \quad \therefore \quad \Delta \omega_u(t) = -\frac{1}{\frac{1}{b_{pu}} + D_u}\Delta p_{cu}(t) \qquad (3.230)$$

Optando-se por trabalhar na base $P_{B2} = 500\ MW$, pela aplicação direta da equação 3.227, vem que:

$$b_{pu2} = b_{pu1}\frac{P_{B2}}{P_{B1}} = 0{,}05\frac{500}{100} = 0{,}25\ pu/pu$$

Quanto ao coeficiente de amortecimento $D$, no valor de $2\,\%$ da carga total instalada para uma variação $1\,\%$ da freqüência padrão de $60\ Hz$, na base de $P_{B2} = 500\ MW$, será:

$$D_U = 2 \ pu/pu$$

Levando na equação 3.230 os valores encontrados, finalmente, obtém-se o valor final da freqüência do sistema a uma entrada de carga de *50 MW* ou $\Delta p_{CU}(t) = \frac{50}{500} = 0{,}1\,pu$ . Ou seja:

$$\Delta\omega_U(t) = -\frac{1}{\frac{1}{0{,}25}+2}0{,}1 = -0{,}01666 \ pu \quad \therefore \quad \omega(t) = 60x0{,}01666 = -0{,}99960 \ Hz$$

E finalmente

$$\omega(t) = 60 - 0{,}99960 = 59{,}0004 \ Hz$$

---

## 3.7. Equacionamento para o Controle Suplementar

O controle suplementar ou controlador suplementar, como já foi reportado anteriormente, tem como função a execução da chamada regulação secundária no processo de controle da geração. Este controle se dá pela ação direta de certo tipo de agente sobre a referência dos reguladores de velocidade das unidades geradoras de energia elétrica.

O controle suplementar pode ser realizado de maneira manual, quando quem assume o comando é um operador humano, ou de maneira automática, quando o comando for executado por um dispositivo controlador automatizado. Esses dois casos são freqüentes nas principais instalações de energia elétrica do SIN e podem ainda ser processados localmente, na própria instalação, ou remotamente através de um centro de comando à distância via cabo ou via microondas, conforme a disponibilidade e a necessidade.

Na realidade, o controle suplementar responde com uma ação de efeito integral sobre o somatório dos erros de potência na linha e de freqüência do sistema.

Ao somatório dos sinais de erro dá-se o nome de ECA, ou erro de controle de área, que é uma importante grandeza de controle para os sistemas que trabalham sob o CAG ou controle automático de geração.

Quando se fala de CAG, fica implícito o fato da existência de um regulador automático, centralizado, que se sobrepõe aos reguladores de velocidade existentes nas unidades de produção de geração, ou simplesmente unidades de produção, a fim de corrigir os possíveis desvios de freqüência e de potência do sistema elétrico sob controle. Tais desvios têm a ver com a dinâmica do processo sendo função do CAG corrigi-los de modo a manter o suprimento da carga alimentada de maneira confiável e estável sem violação de limites atinentes.

Matematicamente, considerando-se duas áreas genéricas $i$ e $j$, a expressão para o $ECA$ na área $i$ de geração será:

$$ECA_i = K_{T_i} T_{ij} (\delta_i - \delta_j) + K_{F_i} (\omega_i - \omega_j) \qquad (3.231)$$

onde

$K_{T_i}$ : constante de proporcionalidade do erro de potência na LI

$T_{ij}$ : torque sincronizante na LI entre as áreas *i* e *j* em pu/radianos

$\delta_i$ : ângulo de potência da barra de saída da área *i* em relação à referência em radianos

$\delta_j$ : ângulo de potência da barra de saída da área *j* em relação à referência em radianos

$K_{F_i}$ : constante de proporcionalidade do erro de freqüência entre as áreas *i* e *j*

$\omega_i$ : velocidade de rotação (freqüência) da área *i*

$\omega_j$ : velocidade de rotação (freqüência) da área *j*

A equação 3.231 permite que se escreva o seguinte:

$$ECA_i = K_{T_i} \left[ T_{ij} (\delta_i - \delta_j) + \frac{K_{F_i}}{K_{T_i}} (\omega_i - \omega_j) \right] \qquad (3.232)$$

A figura 3.48 traz, representado, o diagrama completo de um sistema interligado composto de duas áreas geradoras interconectadas.

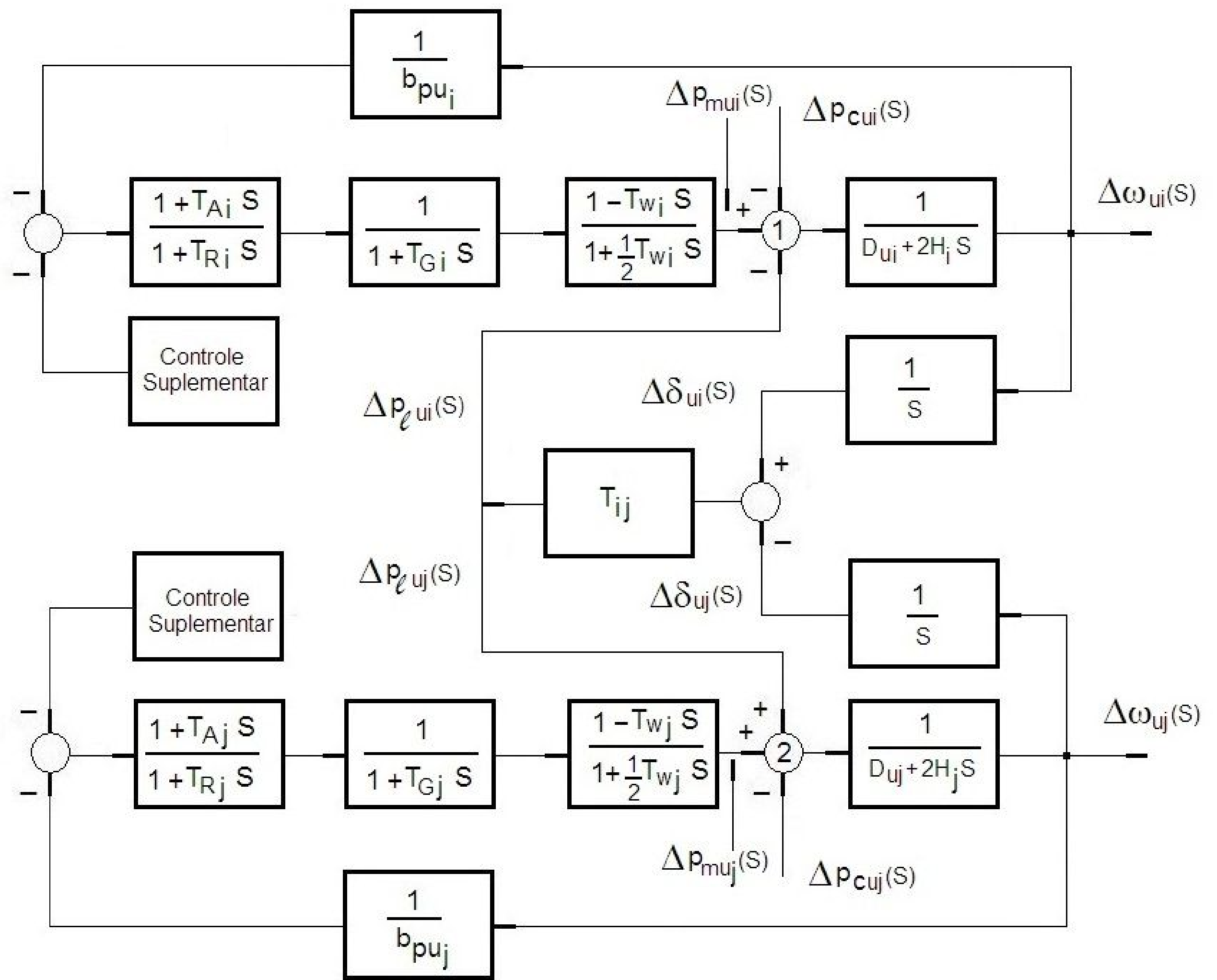



***Figura 3.48 – Sistema Interligado Composto por Duas Áreas Operando em Paralelo.***

Na figura 3.48, fazem-se necessárias algumas observações. Primeiramente, lembrar que todos os parâmetros e todas as variáveis de estado seguem com as mesmas indicações que foram utilizadas nos diagramas em blocos das figuras anteriores de mesma semelhança.
Segundo, que o fluxo de potência na LI de interligação entre as duas áreas de geração, $\Delta p_{\ell u}(S)$, como pode ser comprovado, entra com o sinal de subtração no somador da área 1, por ser proporcional à diferença $(\delta_1 - \delta_2)$, enquanto que para a área 2, por ser proporcional a diferença $(\delta_2 - \delta_1)$, a correção é feita através do sinal de adição no somador 2.

Para o somador 1, em termos de potência acelerante, tem-se, já considerando as grandezas em pu numa base de valores escolhida previamente, que:

$$\Delta p_{au1}(S) = \Delta p_{mu1}(S) - \Delta p_{cu1}(S) - \Delta p_{\ell u}(S) - D_{u1}\,\Delta\omega_{u1}(S)$$

de onde se obtém que:

$$\Delta p_{mu1}(S) = \Delta p_{cu1}(S) + \Delta p_{\ell u}(S) + (2H_1 S + D_{u1})\Delta\omega_{u1}(S) \qquad (3.233)$$

Idem para o somador 2:

$$\Delta p_{mu2}(S) = \Delta p_{cu2}(S) - \Delta p_{\ell u}(S) + (2H_2 S + D_{u2})\Delta\omega_{u2}(S) \qquad (3.234)$$

Considerando-se o regime permanente de operação, implica que os termos $S\,\Delta\omega_{u(i,j)} = 0$ e, posteriormente, substituindo-se $\Delta p_{\ell u}(S)$ por seu valor, dado pela equação 3.207, vem que:

$$\Delta p_{mu1}(S) = \Delta p_{cu1}(S) + T_{12}\ (\delta_1 - \delta_2) + D_{u1}\Delta\omega_{u1}(S)$$

e

$$\Delta p_{mu2}(S) = \Delta p_{cu2}(S) - T_{12}\ (\delta_1 - \delta_2) + D_{u2}\Delta\omega_{u2}(S)$$

Como, pela definição da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente, $b_{pu_1} = -\dfrac{\Delta\omega_{u1}(S)}{\Delta p_{mu1}(S)}$ e $b_{pu_2} = -\dfrac{\Delta\omega_{u2}(S)}{\Delta p_{mu2}(S)}$, vem que as equações anteriores tomam as formas seguintes:

$$\Delta p_{cu1}(S) + T_{12}\ (\delta_1 - \delta_2) + D_{u1}\Delta\omega_{u1}(S) + \frac{1}{b_{pu_1}}\Delta\omega_{u1}(S) = 0 \qquad (3.235)$$

e também para a área 2:

$$\Delta p_{cu2}(S) - T_{12}\ (\delta_1 - \delta_2) + D_{u2}\Delta\omega_{u2}(S) + \frac{1}{b_{pu_2}}\Delta\omega_{u2}(S) = 0 \qquad (3.236)$$

Somando as equações 3.235 e 3.236, membro a membro, e fazendo $\Delta\omega_{u1}(S) = \Delta\omega_{u2}(S) = \Delta\omega_u(S)$, pois o sistema em estudo é síncrono em regime permanente, chega-se a seguinte expressão para o desvio de velocidade gerado pela entrada das cargas nas áreas de geração 1 e 2:

$$\begin{aligned} &\Delta p_{cu1}(S) + \Delta p_{cu2}(S) + D_{u1}\Delta\omega_u(S) + \\ &+ D_{u2}\Delta\omega_u(S) + \frac{1}{b_{pu_1}}\Delta\omega_u(S) + \frac{1}{b_{pu_2}}\Delta\omega_u(S) = 0 \end{aligned}$$

Reagrupando adequadamente a equação anterior, obtém-se a seguinte expressão para a variação da velocidade síncrona das duas áreas de geração:

$$\Delta\omega_u(S) = -\frac{\Delta p_{cu1}(S) + \Delta p_{cu2}(S)}{(D_{u1} + D_{u2}) + (\frac{1}{b_{pu_1}} + \frac{1}{b_{pu_2}})} \tag{3.237}$$

Reescrevendo a equação 3.235, obtém-se que:

$$\Delta p_{cu1}(S) + \Delta p_{\ell u}(S) + D_{u1}\Delta\omega_u(S) + \frac{1}{b_{pu_1}}\Delta\omega_u(S) = 0$$

donde se tem:

$$\Delta p_{\ell u}(S) = -\Delta p_{cu1}(S) - (D_{u1} + \frac{1}{b_{pu_1}})\Delta\omega_u(S) \tag{3.238}$$

Trazendo na equação 3.238 a expressão de $\Delta\omega_u(S)$, da equação 3.237, obtém-se a expressão da potência na LI de interligação cujo fluxo se desenvolve no sentido da área 1 de geração para a área 2 de geração. Senão, veja-se:

$$\Delta p_{\ell u}(S) = -\Delta p_{cu1}(S) - (D_{u1} + \frac{1}{b_{pu_1}})[-\frac{\Delta p_{cu1}(S) + \Delta p_{cu2}(S)}{(D_{u1} + D_{u2}) + (\frac{1}{b_{pu_1}} + \frac{1}{b_{pu_2}})}]$$

Finalmente:

$$\Delta p_{\ell u}(S) = -\frac{-(D_{u2} + \frac{1}{b_{pu_2}})\Delta p_{cu1}(S) + (D_{u1} + \frac{1}{b_{pu_1}})\Delta p_{cu2}(S)}{(D_{u1} + D_{u2}) + (\frac{1}{b_{pu_1}} + \frac{1}{b_{pu_2}})} \tag{3.239}$$

Seja considerar duas áreas de geração iguais de modo que:

$$D_{u1} = D_{u2} = D_u \quad \text{e} \quad \frac{1}{b_{pu_1}} = \frac{1}{b_{pu_2}} = \frac{1}{b_{pu}}$$

Alternando a entrada de carga entre as áreas de geração, obtém-se a seguinte tabela, onde a potência de entrada é $\Delta p_{cu}(S)$:

| Tabela 3.2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Respostas entre Áreas de Geração para Entrada de Carga** | | | | | |
| **Entrada de Carga** | | **Freqüência** | | **Potência na LI** | |
| **Área 1** | **Área 2** | **Área 1** | **Área 2** | **Área 1** | **Área 2** |
| $\Delta p_{c\,u}(S)$ | $0$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{2\,(D_u+\frac{1}{bp_u})}$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{2\,(D_u+\frac{1}{bp_u})}$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{2}$ | $\frac{+\Delta p_{c\,u}(S)}{2}$ |
| $0$ | $\Delta p_{c\,u}(S)$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{2\,(D_u+\frac{1}{bp_u})}$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{2\,(D_u+\frac{1}{bp_u})}$ | $\frac{+\Delta p_{c\,u}(S)}{2}$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{2}$ |
| $\Delta p_{c\,u}(S)$ | $\Delta p_{c\,u}(S)$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{D_u+\frac{1}{bp_u}}$ | $\frac{-\Delta p_{c\,u}(S)}{D_u+\frac{1}{bp_u}}$ | $0$ | $0$ |

Através das implementações anteriores, pode-se concluir que entre duas áreas interligadas, sendo estas áreas iguais, a entrada de carga em uma área será sempre suprida pela outra área em pelo menos na metade da carga, a menos que a entrada de carga ocorrer simultaneamente em ambas as áreas e, neste caso, em valores iguais. Isto ocorrerá porque, neste caso, uma área suprirá a metade da carga da outra e esta outra área, conseqüentemente, também suprirá a metade da carga da primeira, no mesmo valor, não havendo, matematicamente, resultante de fluxo de potência na linha de interligação, parecendo não ter havido transmissão de potência.

Considerando-se agora duas áreas interligadas, conforme está desenhado nas figuras 3.48 e 3.49, com e sem a presença da ação do controle suplementar, foram realizadas simulações tomando-se áreas com características iguais e parâmetros característicos típicos para grandes áreas de geração, de um sistema de potência interligado, sendo os resultados mostrados nas figuras 3.50, 3.51 e 3.52.

Observar que as grandezas estão dadas em pu, numa base comum entre as áreas, base esta que foi previamente escolhida. Observar também que a variação de potência $\Delta p_{\ell\,u}(S)$ está representada com o fluxo no sentido área 1 para área 2.

As oscilações verificadas ocorreram devido ao fenômeno transitório e delas se pode avaliar a freqüência natural amortecida de oscilação inter-áreas do sistema interligado em questão.

Os dados das duas instalações são os seguintes, lembrando que os parâmetros $K_{F12}$ e $K_{T12}$ são as constantes de proporcionalidade do controle suplementar:

$b_{pu} = 0{,}045\ pu/pu \quad b_{tu} = 0{,}30\ pu/pu \quad T_A = 2\,s$

$T_R = 18{,}444 s \quad T_y = 0{,}14 s \quad T_G = 0{,}184 s$

$D_u = 0{,}5\ pu/pu \quad T_W = 0{,}8\,s \quad 2H = 11{,}52\,s$

$T_{12} = 2{,}8\ pu/rad \quad B_{12} = \dfrac{K_{F12}}{K_{T12}} = 1/\,0{,}045\ pu/pu \quad K_{T12} = 0{,}1\ pu/pu$

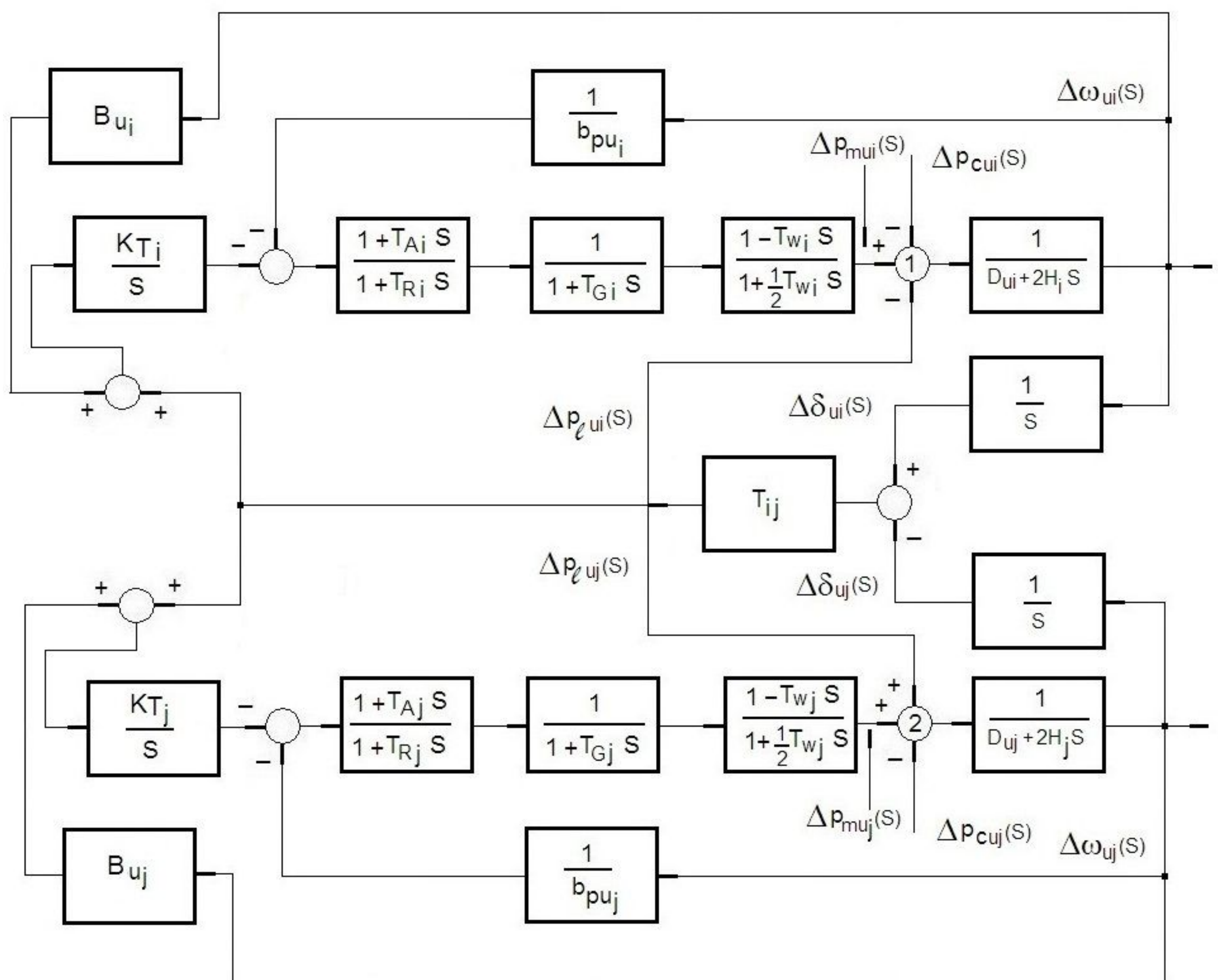



***Figura 3.49 – Sistema Interligado Composto por Duas Áreas Operando em Paralelo com Controle Suplementar Explícito***

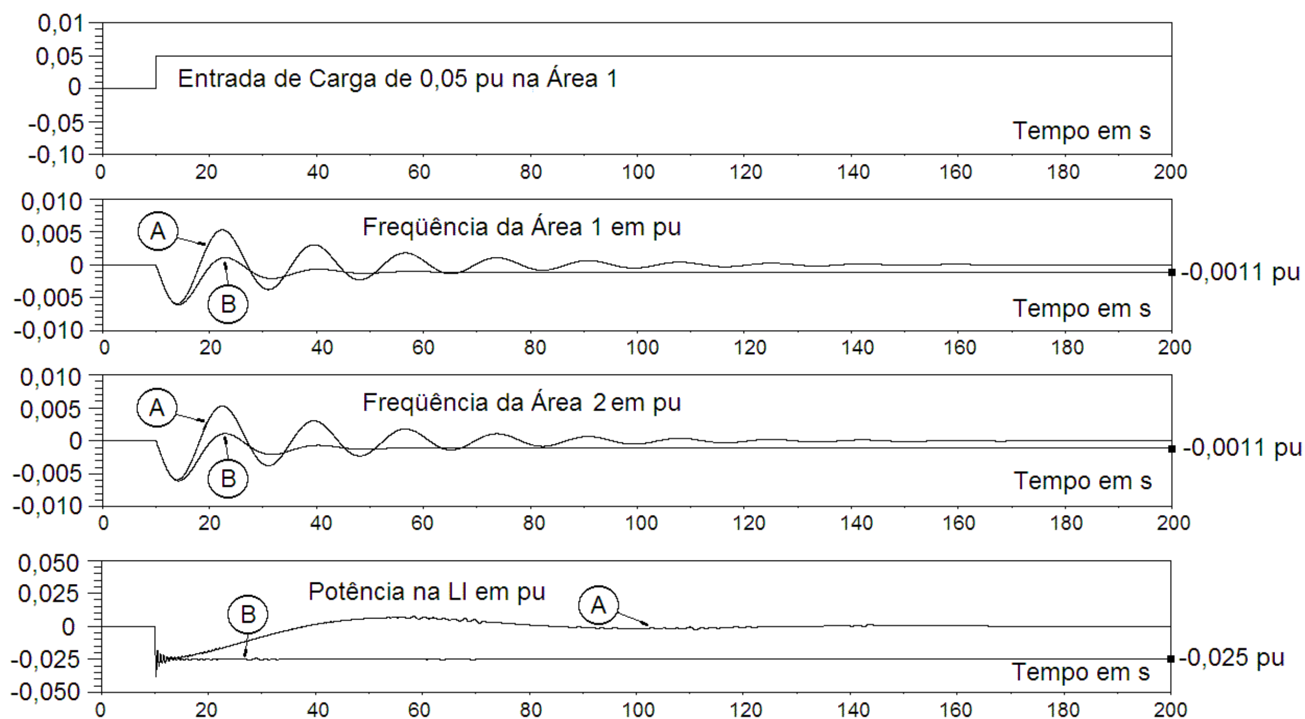



***Figura 3.50 – Respostas a Entrada de Carga na Área 1 para um Sistema Duas Áreas***
***A: com Controle Suplementar***
***B: sem Controle Suplementar***

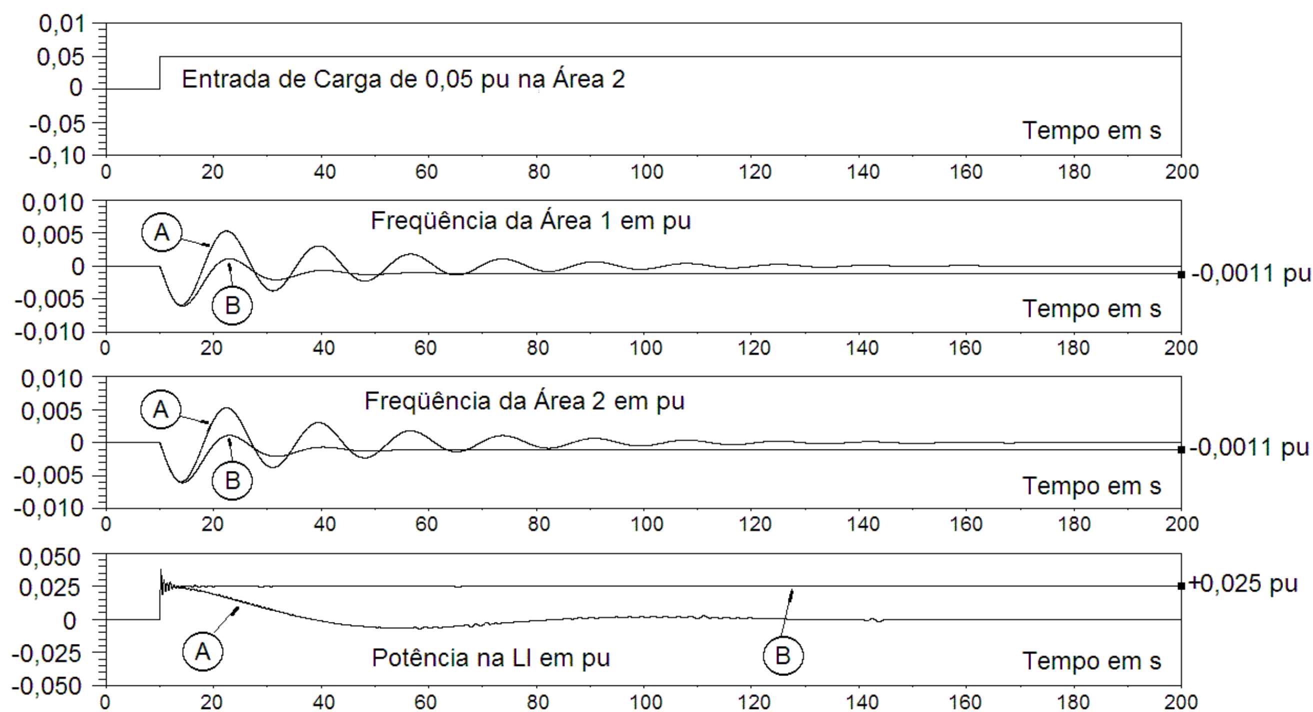



***Figura 3.51 – Respostas a Entrada de Carga na Área 2 para um Sistema Duas Áreas***
***A: com Controle Suplementar***
***B: sem Controle Suplementar***

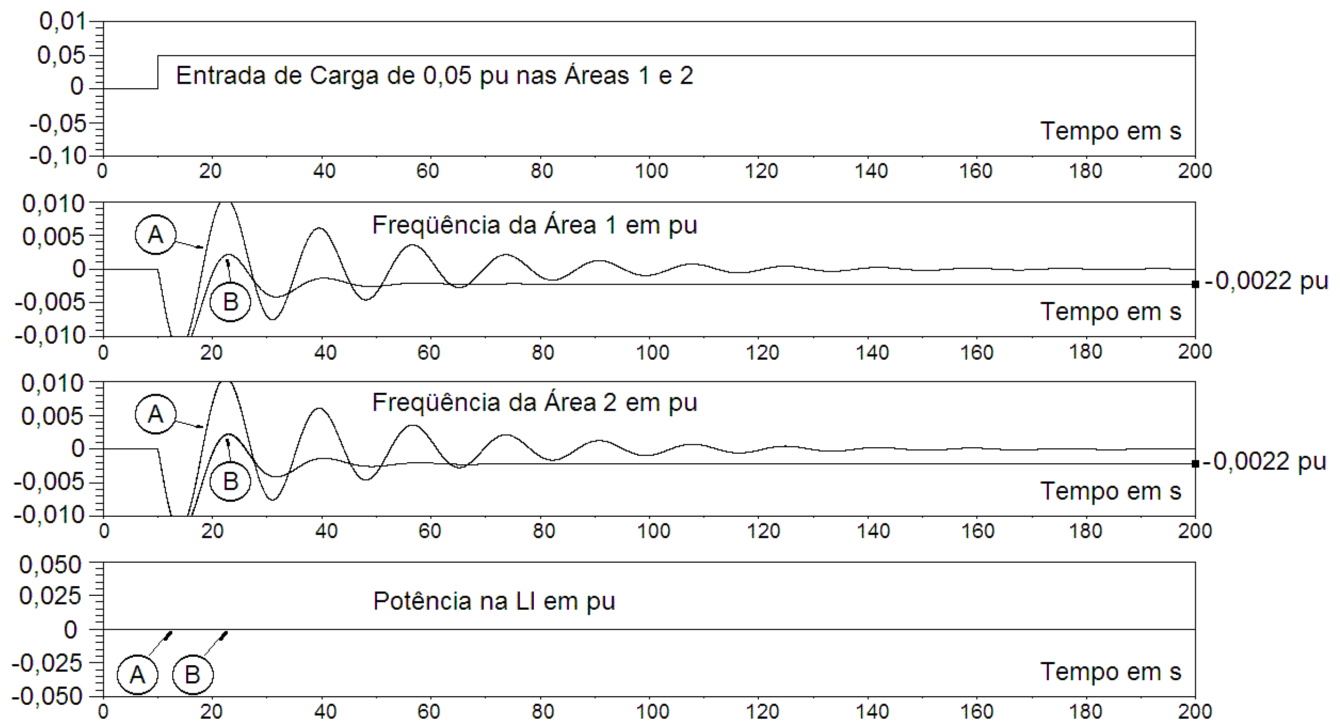



***Figura 3.52 – Respostas a Entrada de Carga nas Áreas 1 e 2 para um Sistema Duas Áreas***
***A: com Controle Suplementar***
***B: sem Controle Suplementar***

As equações 3.237 e 3.239 podem ser generalizadas para o caso de $n$ áreas interligadas e, neste caso, têm-se as seguintes expressões, quando a análise for recair apenas entre as áreas $i$ e $j$:

$$\Delta\omega_u(S) = -\frac{\Delta p_{cui}(S) + \Delta p_{cuj}(S)}{(D_{ui} + D_{uj}) + (\frac{1}{b_{pu_i}} + \frac{1}{b_{pu_j}})} \qquad (3.240)$$

e

$$\Delta p_{\ell u}(S) = -\frac{-(D_{uj} + \frac{1}{b_{pu_j}})\Delta p_{cui}(S) + (D_{ui} + \frac{1}{b_{pu_i}})\Delta p_{cuj}(S)}{(D_{ui} + D_{uj}) + (\frac{1}{b_{pu_i}} + \frac{1}{b_{pu_j}})} \qquad (3.241)$$

A regulação secundária conferida pelo controle suplementar ao controle automático da geração, quando devidamente ajustada, impõe que o erro de controle de área seja nulo. Matematicamente, considerando duas áreas de geração independentes $i$ e $j$, tem-se que:

$$ECA_i = K_{T_i}\ T_{ij}(\delta_i - \delta_j) + K_{F_i}(\omega_i - \omega_j) = 0$$

De forma condensada, a equação anterior pode ser assim escrita:

$$ECA_i = K_{T_i}\ [T_{ij}\Delta\delta_{ij} + B_i\,\Delta\omega_{ij}] = 0 \qquad (3.242)$$

onde $Bi = \dfrac{K_{F_i}}{K_{T_i}}$ é conhecido como bias da área de geração em $MW/Hz$

A equação 3.242 pode ser simplificada em termos da potência na LI. Assim, tem-se em pu, numa base de valores previamente escolhida, que:

$$ECA_{ui} = K_{T_i}\ [\Delta p_{\ell u,ij} + B_i\,\Delta\omega_{u,ij}] = 0$$

Imaginando que se esteja trabalhando com apenas uma área de geração, alimentando a sua carga, a equação anterior tomaria o seguinte aspecto:

$$ECA_u = K_T\ [\Delta p_{\ell u} + B\,\Delta\omega_u] = 0 \qquad (3.243)$$

Como na equação 3.243 o parâmetro $K_T \neq 0$, caso contrário recairíamos num tipo de solução trivial, então vale a seguinte relação:

$$\Delta p_{\ell u} + B\,\Delta\omega_u = 0 \quad \therefore \quad B = -\frac{\Delta p_{\ell u}}{\Delta\omega_u} \qquad (3.244)$$

Considerando-se a relação que rege um sistema de regulação de velocidade dotado de queda permanente de velocidade ou estatismo permanente sob efeito da ação de amortecimento da carga alimentada, a equação 2.244, anterior, que representa o bias da área em questão, tomará a seguinte forma:

$$B = -\frac{\Delta p_{\ell u}}{\Delta\omega_u} = (D_u + \frac{1}{b_{p_u}}) \quad \therefore \quad B = \frac{K_{F_i}}{K_{T_i}} = (D_u + \frac{1}{b_{p_u}}) \qquad (3.245)$$

Portanto, o bias de uma área de geração, engloba a característica básica de regulação desta área. Convém lembrar que, na formulação desse problema, a variação de carga introduzida na equação 3.242 configura a variação de carga que por ora se dá na LT que interliga a central de geração com uma carga fictícia que concentra toda a carga alimentada por essa central.

O controle suplementar, na forma como foi até aqui exposto, resume-se na idéia de que possa existir um dispositivo adicional ao regulador de velocidade

ou a algum tipo de regulador de central que possua a capacidade de tornar nulo o ECA de determinada área quando do controle automático da geração.
Basicamente, quando se consideram duas áreas de geração interligadas por um LI, a equação 3.231 resume aquilo que seria o sinal de erro de controle de qualquer dispositivo de controle suplementar da geração.
O passo seguinte, em termos de controle suplementar, é promover o que foi realizado anteriormente nas simulações do modelo cujo diagrama em blocos é mostrado na figura 3.49 e cujos resultados estão apresentados nas figuras 3.50, 3.51 e 3.52.

Existem três tipos de controle possíveis, designados por seus termos técnicos mais conhecidos, a saber:

a) controle tipo FF ou Flat Frequency
b) controle tipo FTL ou Flat Tie Line Power
c) controle TLB ou Tie Line Frequency Bias

Matematicamente, tomando-se como base a equação do ECA quando se consideram duas áreas de geração interligadas por um LI , cada um desses tipos de controle pode ser assim descrito:

a) controle tipo FF ou Flat Frequency

$$ECA_i = K_{F_i}(\omega_i - \omega_j) \qquad (3.246)$$

b) controle tipo FTL ou Flat Tie Line Power

$$ECA_i = K_{T_i} T_{ij}(\delta_i - \delta_j) \qquad (3.247)$$

c) controle TLB ou Tie Line Frequency Bias

$$ECA_i = K_{T_i} T_{ij}(\delta_i - \delta_j) + K_{F_i}(\omega_i - \omega_j) \qquad (3.248)$$

Nos exemplos anteriores, apresentados nesse livro, o tipo de controle utilizado foi o tipo TLB.
Os COSs utilizam desses tipos de controle conforme a necessidade assim o pedir. As implementações são opções disponíveis e o estudo dessas disposições pode ser conduzido e melhor estudado nas referências 4, 31, 34 e 37 ou em textos específicos.
Definido o sinal de erro, aqui chamado de ECA, no domínio do tempo, como tem sido exposto até então, deve-se aplicá-lo à referência do regulador de velocidade ou de um regulador de central através de um controlador de ação integral ou ação I, ou ação proporcional-integral ou ação PI.

## EXEMPLO 3.22

Elaborar um dispositivo controlador suplementar, do tipo PI, indicando os sinais de entrada e de saída.

**Solução:**

Até o momento, os dispositivos adotados para o controle suplementar foram do tipo integrador ou I. Um dispositivo tipo PI simplesmente adicionaria ao processo uma ação proporcional conforme está mostrado na figura 3.53.

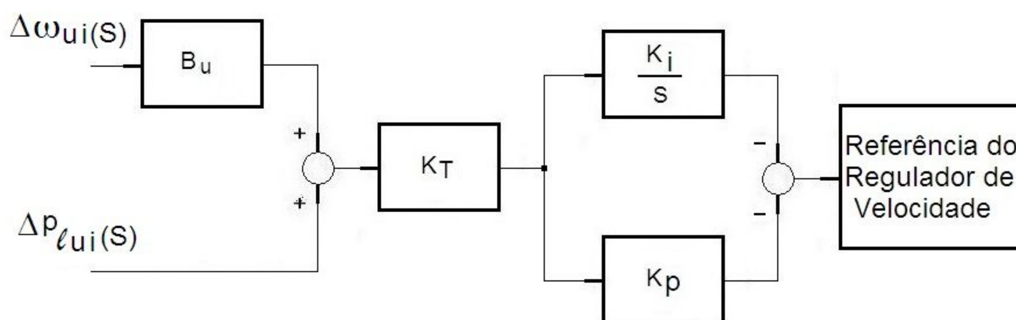



***Figura 3.53 – Diagrama do Controlador Suplementar do Tipo PI***

onde

$K_T$ *:* constante de proporcionalidade do erro de potência na LI

*B :* bias da área em pu/pu

*Ki :* constante de proporcionalidade do dispositivo intergral ou *I*

*Kp :* constante de proporcionalidade do dispositivo proporcional ou *P*

$\Delta\omega_u$ *:* variação da velocidade de rotação (freqüência) em pu

$\Delta p_{\ell u}$ : variação da potência na LI em pu

S : variável complexa de Laplace

**Nota a respeito do exemplo 3.22:**

Como se sabe, o regulador de velocidade normalmente não se desincumbe da realização do procedimento de ação referente à regulação secundária no processo de controle automático da geração. Sua função se restringe mesmo à realização do processo de regulação primária. Mesmo assim, existem casos em que o projetista propõe um sistema específico que, além da regulação primária, cumpre o papel da realização da regulação secundária, mas sem prescindir de um sistema de retaguarda, em controle da velocidade, e com o bloco referente à queda transitória ou estatismo transitório de velocidade ativo.

Isso é aquilo que no jargão técnico costumou se chamar de regulador munido de duas cadeias independentes de regulação da turbina, uma de velocidade e outra de potência ativa.
Esse tipo de arranjo poderá sempre ser empregado na regulação de velocidade desde que exista a devida proteção visando garantir a estabilidade operativa na presença de certas contingências, principalmente de origem sistêmica. Nesses casos, as excursões dos sinais de velocidade e de potência ativa elétrica são de tal ordem que a interação entre as ações envolvendo as regulações primária e secundária de velocidade, de modo simultâneo, poderia trazer muito mais desequilíbrio que equilíbrio ao controle automático. Esse assunto vem no encontro da questão estabilidade do SEP, tema esse a ser abordado mais adiante nesse trabalho, em capítulo específico, onde será analisado o problema próprio da estabilidade.

---

## EXEMPLO 3.23

Levantar a função de transferência $FT = \dfrac{\Delta y_U(S)}{\Delta \omega_U(S)}$ do regulador de velocidade cujo diagrama em blocos é retratado na figura 3.54.
Considerar, para todas as variáveis de estado e parâmetros do problema, a mesma identificação seguida até aqui nesse livro.

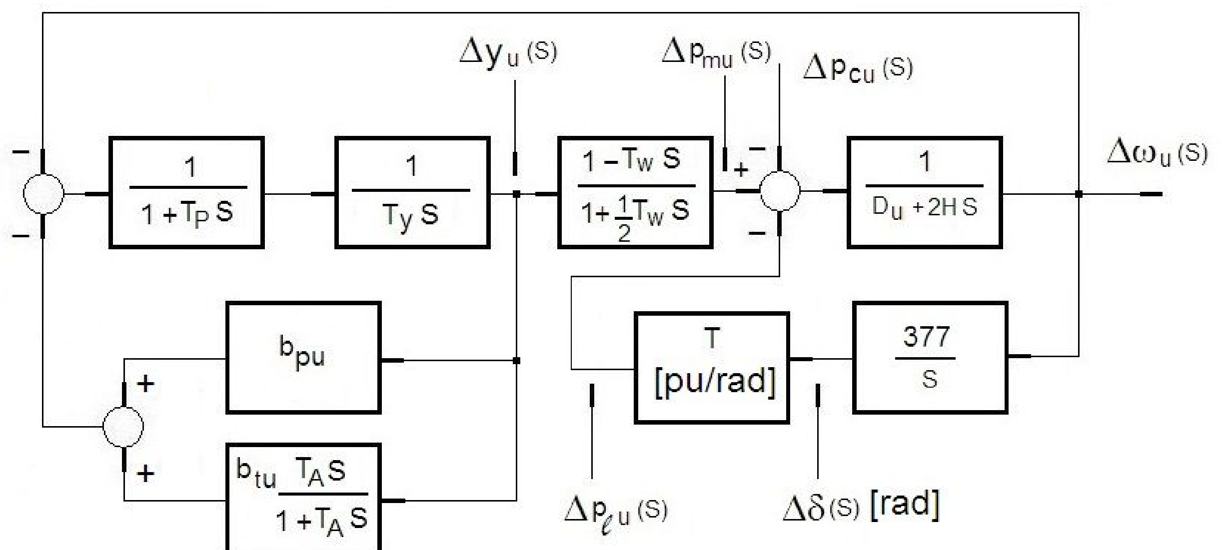



***Figura 3.54 – Diagrama em Blocos de um Regulador De Velocidade com Queda Permanente de Velocidade ou Estatismo Permanente em Abertura***

**Solução:**

O diagrama em blocos mostrado na figura 3.54 representa o modelo de máquina contra a barra infinita. O regulador de velocidade aqui exposto, trata-se de um regulador com queda permanente de velocidade ou estatismo permanente em abertura, ou seja, um regulador cuja realimentação permanente se dá pelo sinal proveniente do curso do servomotor das palhetas diretrizes da turbina.

A função de transferência pedida pode ser esboçada num diagrama em blocos mais simplificado, o que em muito facilitará futuros cálculos. A figura 3.55 mostra o diagrama em blocos da figura 3.54 mais compactado.

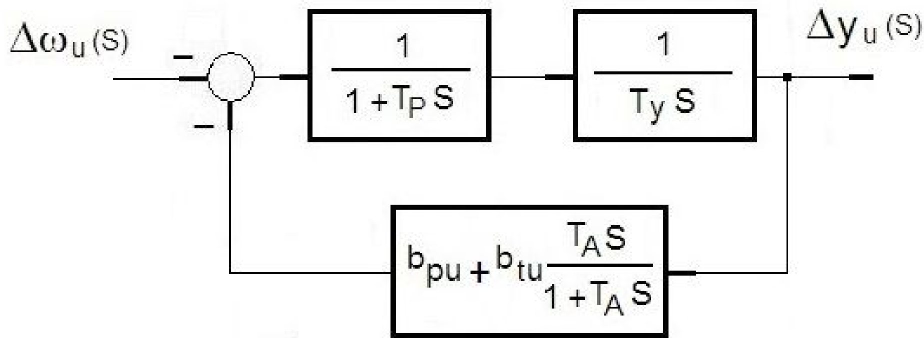



***Figura 3.55 – Diagrama em Blocos do Diagrama da Figura 3.54 Compactado***

Pela da aplicação do critério representado pela equação 2.78 onde uma função de transferência genérica de um sistema realimentado é dada pela relação seguinte:

$$\frac{\Delta y_U(S)}{\Delta \omega_U(S)} = \frac{g(S)}{1 + g(S)h(S)}$$

pode-se obter a função de transferência em malha fechada do seguinte modo, quando se tem para a função de transferência de canal direto:

$$g(S) = \frac{1}{(1 + T_p S)T_y S} = \frac{1}{T_y S + T_p T_y S^2}$$

e para a função de transferência da realimentação:

$$h(S) = b_{pu} + b_{tu}\frac{T_A S}{1 + T_A S} = \frac{b_{pu} + b_{pu}T_A S + b_{tu}T_A S}{1 + T_A S}$$

Assim, a função de transferência pedida tomará a seguinte forma:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = \frac{g(S)}{1+g(S)h(S)} = -\frac{\dfrac{1}{T_y S + T_p T_y S^2}}{1+\dfrac{1}{T_y S + T_p T_y S^2}\dfrac{b_{pu}+b_{pu}T_A S + b_{tu}T_A S}{1+T_A S}} =$$

$$= -\frac{1+T_A S}{T_y S + T_y(T_p+T_A)S^2 + T_p T_y T_A S^3 + b_{pu} + (b_{pu}+b_{tu})T_A S}$$

Ordenando as parcelas na variável complexa $S$ de Laplace, e colocando o parâmetro estatismo permanente $b_{pu}$ em evidência, obtém-se a função de transferência pedida:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}}\,\frac{1+T_A S}{1+[T_y+(1+\dfrac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A]S+\dfrac{T_y(T_p+T_A)}{b_{pu}}S^2+\dfrac{T_p T_y T_A}{b_{pu}}S^3}$$

(3.249)

**Nota a respeito do exemplo 3.23:**

A equação 3.249, encontrada para a função de transferência do regulador de velocidade cujo diagrama em blocos é retratado na figura 3.54, é uma função de transferência teórica com base no diagrama em blocos apresentado.
No desenvolvimento da equação 3.170, anterior, foi utilizado um raciocínio prático, comprovadamente útil em desenvolvimentos desse tipo. Assim, aplicando esse desenvolvimento aqui nesse problema, pode-se escrever, para a equação característica da função de transferência da equação 3.249, que:

$$1+[\frac{T_y}{b_{pu}}+(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A]S+\frac{T_y(T_p+T_A)}{b_{pu}}S^2+\frac{T_p T_y T_A}{b_{pu}}S^3 \cong (1+T_1 S)\,(1+T_2 S)$$

Neste caso, como naquele, a parcela de terceira ordem foi desprezada em função das demais e nas constantes de tempo, da expressão do segundo membro, tomou-se a condição de que $T_1 >> T_2$.

Assim, obtém-se que:

$$1+[\frac{T_y}{b_{pu}}+(1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A]S+\frac{T_y(T_p+T_A)}{b_{pu}}S^2 \equiv 1+T_1 S+T_1 T_2 S^2$$

Por comparação, assim como foi realizado anteriormente, finalmente encontram-se as expressões para as constantes de tempo. Senão, veja-se:

$$T_1 = \frac{T_y}{b_{pu}} + (1 + \frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A \text{ em s}$$

$$T_2 = \frac{\dfrac{T_y(T_p + T_A)}{b_{pu}}}{\dfrac{T_y}{b_{pu}} + (1 + \dfrac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A} \text{ em s}$$

Deste modo, a função de transferência da equação 3.249, pedida, poderá ser resumida na seguinte equação, sem perda de qualidade:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{1 + T_A S}{(1 + T_1 S)(1 + T_2 S)}$$

Como foi adotada a condição de se ter $T_1 >> T_2$, que na prática também é verificada, finalmente obtém-se que:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{1 + T_A S}{1 + T_1 S} \qquad (3.250)$$

A equação 3.250 apresenta a mesma forma da equação 3.176 anteriormente desenvolvida para representar a função de transferência de um regulador de velocidade aplicado a turbinas hidráulicas no plano complexo de Laplace e em pu numa base de valores escolhida previamente.

---

## EXEMPLO 3.24

A figura 3.56 traz um diagrama em blocos de um sistema regulador de velocidade de uma turbina hidráulica, semelhante àquele visto no exemplo 3.23 anterior, com a diferença de que nesse modelo a estrutura permite que se trabalhe com certo tipo de realimentação permanente ora em abertura ora em potência, sempre a partir da ação de um seletor de sinais, dispositivo comandado por um relé auxiliar.
Apoiando-se nesse arranjo especial, estudar os possíveis comportamentos em ambos os casos apontando as suas vantagens e as suas desvantagens, se é que existem, quando da entrada de uma carga local de $0{,}05\,pu$. Neste caso, o que poderia ser feito para que se aperfeiçoassem tais arranjos operativos.

Considerar, para todas as variáveis de estado e parâmetros do problema, a mesma identificação seguida até aqui nesse livro.

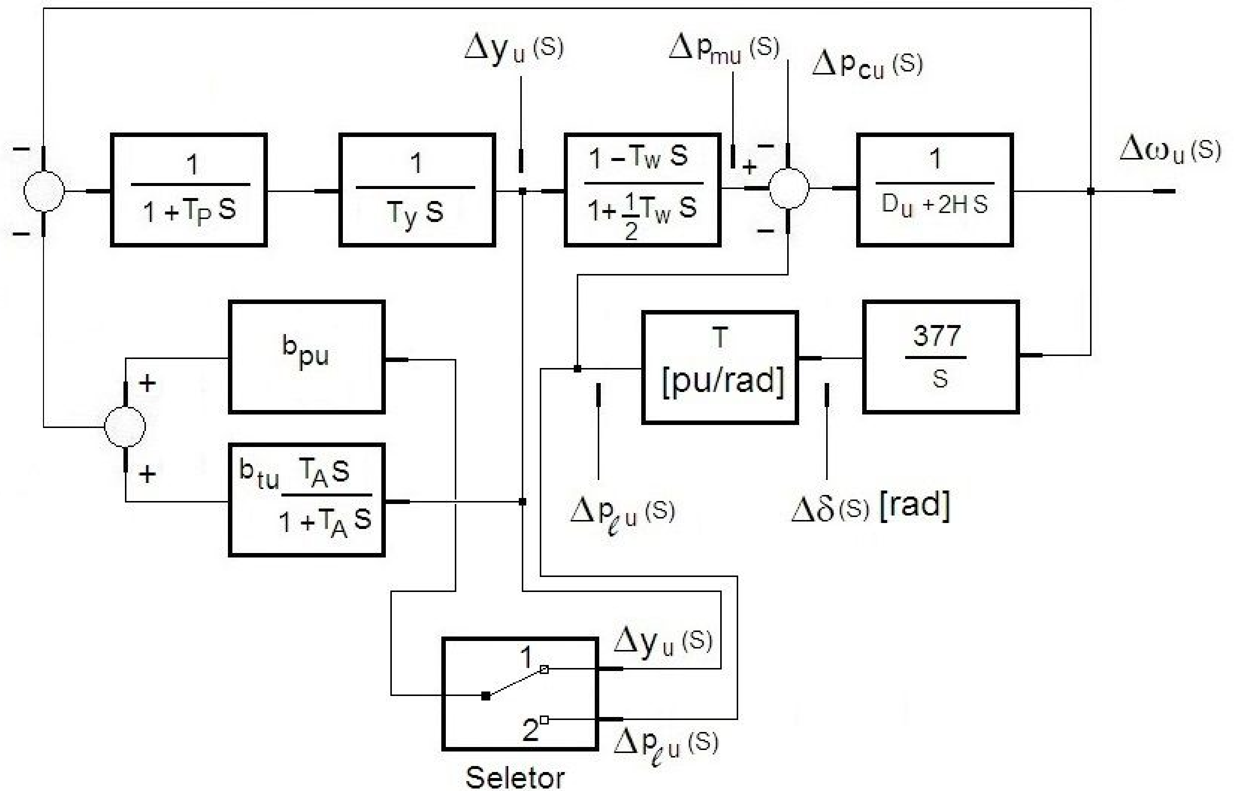



***Figura 3.56 – Diagrama em Blocos de um Regulador De Velocidade com Queda Permanente de Velocidade ou Estatismo Permanente com Seletor de Realimentação***

**Solução:**

O diagrama em blocos mostrado na figura 3.56 representa o modelo de máquina contra a barra infinita. O regulador de velocidade, aqui exposto, trata-se de um regulador de velocidade cuja queda permanente de velocidade ou estatismo permanente ora se dá pelo sinal proveniente do curso do servomotor das palhetas diretrizes da turbina ora se dá pelo sinal proveniente da potência ativa elétrica, dependendo da posição em que se encontra o seletor de realimentação.

Para avaliação dessa proposta, serão realizadas simulações utilizando-se de modelagem cujos dados foram empregados no exemplo 3.16 anterior. Como já mencionado, tais dados se referem à modelagem de uma área de geração de grande porte, modelagem essa validada através de ensaios de campo.

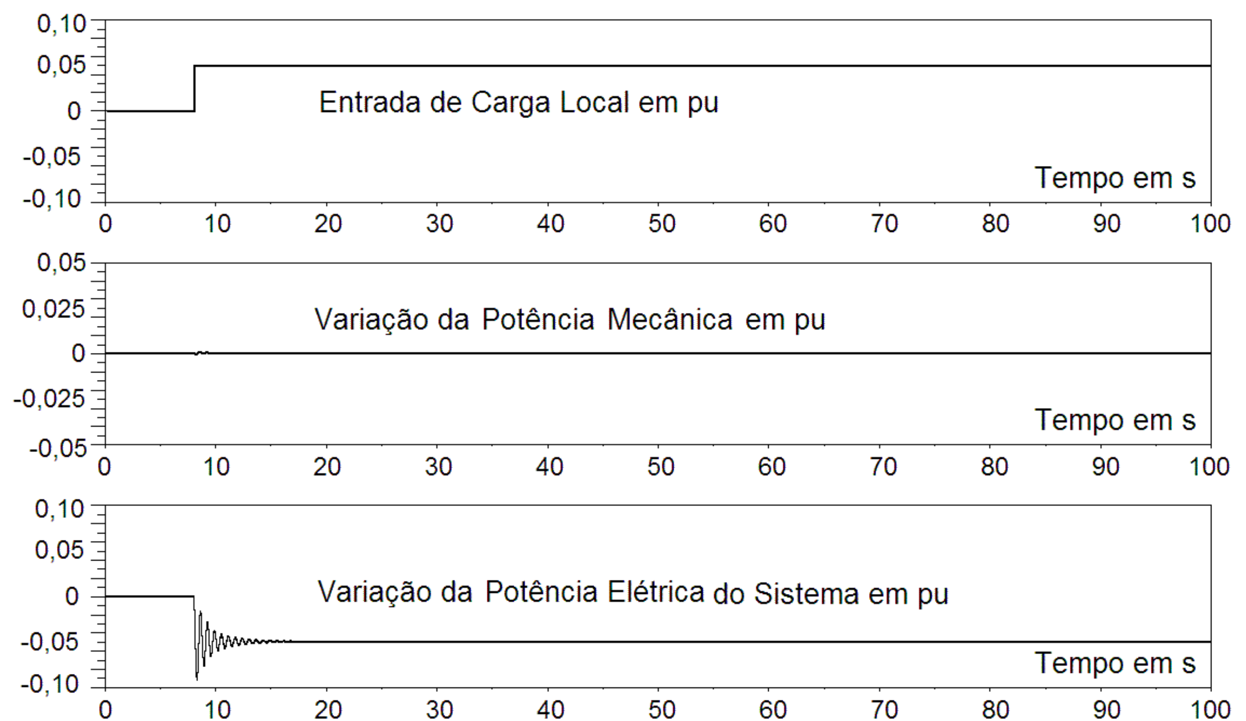



***Figura 3.57 – Entrada de Carga de 0,05 pu no Sistema da Figura 3.56***
***Seletor Posição 1: Realimentação Permanente em Abertura***

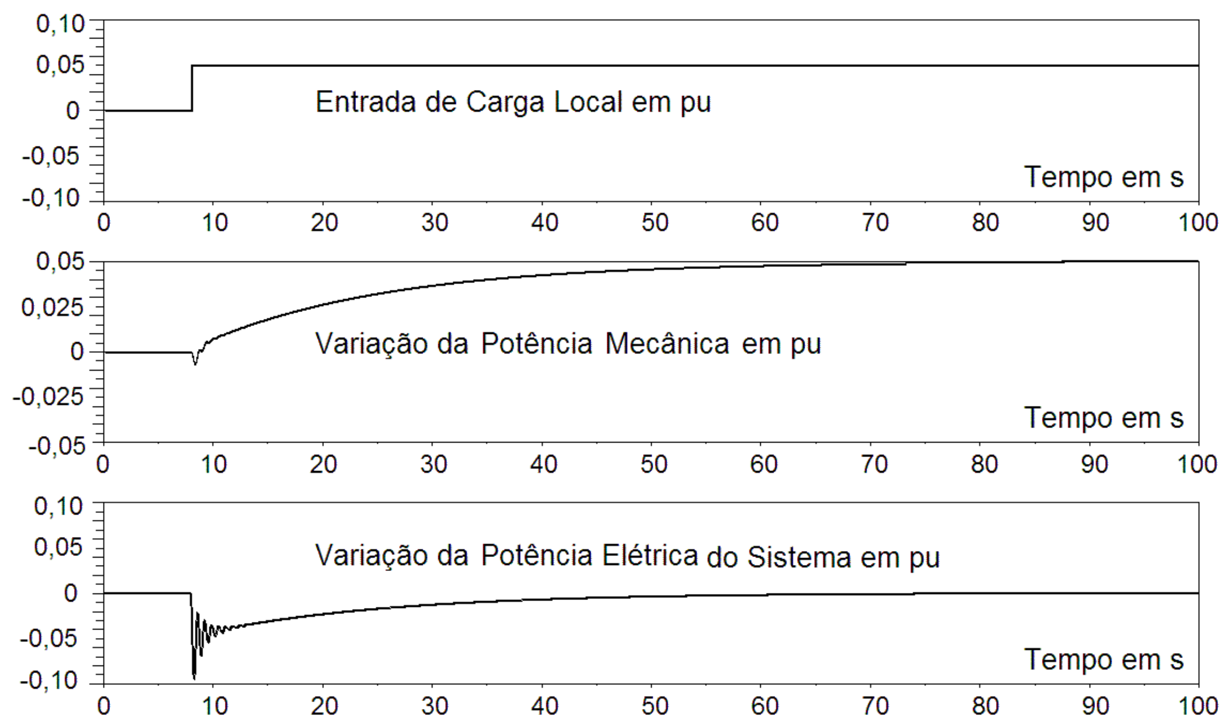



***Figura 3.58 – Entrada de Carga de 0,05 pu no Sistema da Figura 3.56***
***Seletor Posição 2: Realimentação Permanente em Potência***

São dados:

$b_{pu} = 0{,}045\,pu/pu \quad b_{tu} = 0{,}30\,pu/pu \quad T_A = 2\,s$

$T_R = 18{,}444s \quad T_p = 0{,}01s \quad T_y = 0{,}14s \quad T_G = 0{,}184s$

$D_u = 0{,}5\,pu/pu \quad T_w = 0{,}8\,s \quad 2H = 11{,}52\,s$

$T_{12} = 3{,}1\,pu/rad$

As figuras 3.57 e 3.58 mostram o resultado das duas simulações para a mesma unidade de geração ou produção somente que na primeira figura os registros se referem ao caso em que a chave seletora da realimentação se encontra na posição número 1 e na segunda simulação os registros se referem ao caso em que a chave seletora se encontra na posição 2.

Na figura 3.57, onde a chave seletora da realimentação está na posição número 1, correspondendo a uma realimentação em função do curso das palhetas diretrizes do distribuidor, a carga de entrada foi alimentada pela potência transmitida na LI, pois não houve variação de potência mecânica via regulador de velocidade.

Pelos registros, conclui-se nesse caso que, não tendo havido variação abertura do servomotor das palhetas diretrizes, a carga foi totalmente assumida pela barra infinita. A confirmação se dá pela variação do sinal de potência na LI.

Na figura 3.58, onde a chave seletora da realimentação está na posição número 2, correspondendo a uma realimentação em função da potência ativa elétrica, a carga de entrada foi alimentada pela própria máquina ou unidade de geração, pois houve variação de potência mecânica via curso do servomotor das palhetas diretrizes da turbina. Aqui o comando se deu via regulador de velocidade.

Pelos registros, conclui-se que, tendo havido abertura do servomotor das palhetas diretrizes, a carga foi totalmente assumida pela máquina ou área de geração. A confirmação se dá pela variação do sinal da potência mecânica.

Em linhas gerais, em termos de estabilidade, o que se pode dizer para o momento – esse tema será abordado com profundidade mais à frente nesse livro – é que o sistema é estável. Não havendo uma mudança substancial do coeficiente de torque sincronizante do sistema, estaria garantida a estabilidade pelos valores fornecidos para análise do modelo apresentado.

Pelo que foi demonstrado nesse exemplo, uma simples mudança no sinal de realimentação permanente do regulador de velocidade resolveu uma questão ligada ao controle secundário da geração.

Normalmente, quando se trabalha em rede interligada em que o controle da freqüência é um forte elemento agregador da estabilidade, uma resposta mais rápida nas operações de tomada e retirada de carga é interessante. É interessante porque, mesmo que determinada máquina ou até mesmo uma determinada área de geração venha a sofrer um balanço, haverá outros centros que certamente absorverão as possíveis oscilações de modo que os controles ligados à regulação secundária poderão ser desvinculados, até certo ponto, do bloco de estatismo transitório, aquele bloco compensador instalado nos reguladores de velocidade visando reduzir a ação da regulação na

presença de contingências caracterizadas por oscilações e fortes excursões dos sinais de freqüência, potência, etc.
Independente dessa observação, a técnica da realimentação permanente em potência é tão interessante que certos projetistas e fabricantes passaram a adotá-la como recurso de controle suplementar. Como já foi mencionando anteriormente, esse tipo de arranjo recebe o nome de regulador de potência em paralelo ao habitual regulador de velocidade. O problema é que duas cadeias de regulação, uma em velocidade e outra em potência, agindo simultaneamente, não parece algo inteligente. Foi assim pensando que surgiu a idéia de se trabalhar com ambas as cadeias, porém sendo a ação de comando efetivada através de um dispositivo do tipo mestre-escravo onde uma dessas cadeias permaneceria sempre no controle enquanto a outra, através de um sistema seguidor, se manteria nas mesmas circunstâncias, porém na condição de retaguarda. Prova-se que a opção pela realimentação permanente em potência ativa elétrica não altera de modo significativo a forma geral da função de transferência do regulador de velocidade apresentada na equação 3.173.

---

## 3.8. Aspetos Gerais Acerca dos Reguladores de Velocidade

### 3.8.1. Regulação Quanto ao Tipo da Turbina

A regulação de velocidade pode ser classificada segundo o tipo de turbina a ser empregado.
Ela é dita simples quando se encerra nas palhetas do distribuidor, fato observado, por exemplo, em turbinas tipo Francis, Hélice e Pelton sem controle de jato. É dita dupla quando, além da regulação das palhetas diretrizes do distribuidor, é promovida a regulagem do jato de água seguida do controle da agulha, situação observada em turbinas do tipo Pelton de controle de jato de água, ou das pás do rotor como pode ser visto em turbinas do tipo Kaplan.
O procedimento é simples, em termos teóricos, porém mais complicado em termos práticos.
Um dos problemas comuns verificado no dispositivo de controle das pás de turbinas do tipo Kaplan, por exemplo, é aquele associado a vazamentos de óleo de acionamento que ocorrem no servomotor de comando. O sistema é complexo e esse é um problema recorrente. Também ocorre outro problema, menos grave, mas que pode colocar o conjunto mecânico sob forte vibração. Trata-se do erro na conjugação entre pá-palheta que tem a função de efetuar a cópia da posição da posição das palhetas do distribuidor para a posição das pás do rotor Pelton.
Na realidade, o comando de movimento na regulação dupla significa apenas copiar, a contar do sinal que o regulador de velocidade delibera para o comando das palhetas diretrizes, e, a partir de uma relação de conjugação pá-palheta, uma função não linear do tipo *soft*, deliberar um comando paralelo, direto para o servomotor auxiliar, garantindo a ação sobre o curso das pás da turbina Kaplan ou do bico injetor de jato de água no caso da turbina Pelton.

Atualmente, têm-se utilizado sistemas de turbinas do tipo Pelton com dois, quatro e até seis bicos injetores sob controle.
A lei de conjugação entre palheta diretriz e pá do rotor, numa turbina Kaplan, por exemplo, dependerá diretamente do valor do nível de água de montante do reservatório da instalação hidráulica o que, em reservatórios do tipo plurianual, implicará na necessidade de se promover constantes ajustes quando se tratar de sistemas cujos reguladores de velocidade sejam do tipo mecânico-hidráulico. Porém, em reguladores cuja tecnologia for eletrônica, isso será facilitado com a adoção de blocos matemáticos embarcados, de característica não linear, visando representar de modo otimizado a ação de conjugação. Muitas vezes são empregados dados provenientes das curvas de colina da turbina envolvida na definição da função matemática representativa.

## 3.8.2. Levantamento de Parâmetros Principais de Reguladores de Velocidade

Este tópico tem por finalidade apresentar uma série de critérios para ensaios de medição de parâmetros em reguladores de velocidade de turbinas hidráulicas.
As primeiras proposições para a execução dos ensaios levavam em conta a condição de máquina parada, comporta de tomada de água fechada e nível de água de jusante presente. Porém, ao longo da realização de trabalhos desse tipo, em diferentes instalações, se percebeu que muita das vezes os arranjos a serem adotados eram complicados e dispendiosos. Foi quando se decidiu pela realização dos ensaios na condição de máquina interligada e carregada.
Serão apresentados, a seguir, o equacionamento básico, a explanação matemática, a execução física e os resultados dos ensaios principais, através dos quais poderão ser obtidos os parâmetros principais de um sistema regulador de velocidade de turbinas hidráulicas.

Tomando como exemplo o diagrama em blocos da figura 3.31, anterior, e considerando a função de transferência ditada pela equação 3.249, pode-se desenvolver todo o raciocínio para a elaboração de um conjunto de procedimentos que levará a obtenção dos principais parâmetros do regulador de velocidade.
Praticamente, o diagrama em blocos é padrão para a maioria dos modelos de reguladores de que se tem conhecimento. A função de transferência calculada do diagrama de blocos da figura 3.31, como um desmembramento da equação 3.249 do exemplo 3.23, anterior, é a seguinte:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{1 + T_A S}{1 + [\frac{T_y}{b_{pu}} + (1 + \frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A]S + \frac{T_y(T_p + T_A)}{b_{pu}} S^2 + \frac{T_p T_y T_A}{b_{pu}} S^3}$$

Na equação precedente, assim como aconteceu anteriormente, em função dos valores padrão, será desprezado o termo de terceira ordem na variável complexa de Laplace. Também será considerada a relação $\frac{T_y T_p}{b_{pu}} < \frac{T_y T_A}{b_{pu}}$.

Deste modo, a equação do regulador de velocidade tomará o seguinte aspecto:

$$\frac{\Delta y_u(S)}{\Delta \omega_u(S)} = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{1 + T_A S}{1 + [\frac{T_y}{b_{pu}} + (1 + \frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A]S + \frac{T_y T_A}{b_{pu}} S^2} \qquad (3.251)$$

A constante de tempo $\frac{T_y}{b_{pu}} = \tau$ da equação 3.251 será uma constante de tempo auxiliar a ser utilizadas em cálculos futuros.

Assim

$$T_y = \tau \, b_{pu} \qquad (3.252)$$

Finalizando esse tópico, a constante de tempo de integração do servomotor principal mais válvula distribuidora pode ser aproximada para a relação do produto entre o valor da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente em pu/pu pela constante de tempo auxiliar concebida no desenvolvimento da equação 3.249, em segundos.

**a) Determinação do valor da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente**

A determinação do valor da queda permanente do regulador de velocidade deverá estar associada à equação particular de transferência 3.251 que relaciona o curso do servomotor ou a posição do distribuidor das palhetas diretrizes da turbina com a variação da rotação da máquina quando é inibida a ação da realimentação transitória.
Evidentemente, como o ensaio será realizado com máquina interligada, o valor da variação de velocidade já deverá estar bem determinado e calculado previamente. Como a máquina está interligada a um sistema síncrono, qualquer variação de velocidade imposta através do regulador não provocará uma variação permanente na rotação. Deste modo, o cálculo do valor da variação de velocidade imposta deverá ser verificado com a máquina em vazio e repetido sobre o mesmo ponto de aplicação estando a máquina com carga. Neste caso, os devidos cuidados deverão ser tomados para que não ocorra desligamento por atuação da proteção.
Na prática, a inibição da realimentação transitória, necessária para que se possa medir o valor da queda permanente, é conseguida levando-se ao valor

mínimo a dosagem de ajuste da queda transitória ou levando-se ao mínimo a constante de tempo associada ao circuito. A prática tem mostrado que neste caso é suficiente a abertura total do furo de passagem de óleo do amortecedor do sistema amortecedor-mola ou *spring-dash-pot* da queda transitória, isso quando se trabalha com reguladores de velocidade do tipo mecânico-hidráulico. Nos reguladores de velocidade eletrônicos, mais modernos, o bloco do estatismo transitório comporta um potenciômetro físico ou digital, onde é normalmente representado por um parâmetro. Na maioria dos reguladores mecânicos é quase impossível a eliminação do valor da queda transitória de maneira efetiva.

Matematicamente, tem-se a seguinte equação de transferência para o bloco de realimentação transitória para $T_A \to 0$:

$$\lim_{T_A \to 0} b_t \frac{T_A S}{1 + T_A S} = 0 \qquad (3.253)$$

Para a execução do ensaio, deve-se aplicar um sinal de entrada na forma de uma função degrau no ponto de referência de velocidade, correspondendo a um degrau de variação da rotação da máquina, obtendo-se a resposta do curso de servomotor principal ou posição do distribuidor das palhetas diretrizes da turbina.

Matematicamente, um sinal na forma de degrau de amplitude $k$ tem a seguinte representação, considerando-se um erro negativo de freqüência e o plano complexo de Laplace, conforme foi visto no capítulo 2:

$$\Delta \omega_U(S) = -\frac{k}{S}$$

No domínio do tempo, pode-se escrever que:

$$\omega_U(t) = k(t) = -k \quad \therefore \quad \lim_{t \to \infty} k(t) = \Delta \omega_U(\infty) = -k$$

A saída, representada pelo curso do servomotor para a equação 3.251, já se desconsiderando o bloco da realimentação transitória, será:

$$\Delta y_U(S) = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{1}{1 + \tau S} \left(\frac{-k}{S}\right) = -\frac{-k}{b_{pu}} \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S - 1/\tau}\right)$$

Passando-se a equação anterior para o domínio do tempo vem:

$$\Delta y_U(t) = \frac{k}{b_{pu}} (1 - e^{-t/\tau}) \qquad (3.254)$$

Assim:

$$b_{pu} = -\lim_{t \to \infty} \left[ \frac{-k}{\Delta y_u(t)} (1 - e^{-t/\tau}) \right] = -\frac{\Delta \omega_u(\infty)}{\Delta y_u(\infty)}$$

Logo:

$$b_{pu} = -\frac{\Delta \omega_u(\infty)}{\Delta y_u(\infty)} \tag{3.255}$$

O resultado da equação 3.255, com o sinal negativo, apenas foi posto para o caso de se considerar na matemática a condição do ganho negativo do regulador de velocidade, pois na realidade o parâmetro será sempre em valor positivo.

A referência 27 mostra cálculo semelhante, porém no artigo as variações de velocidade e de curso do servomotor são tomadas em valor absoluto.

A figura 3.59 explica melhor como obter graficamente o valor da queda permanente de velocidade ou estatismo permanente como resultado do ensaio em função da equação 3.255 que o representa matematicamente.

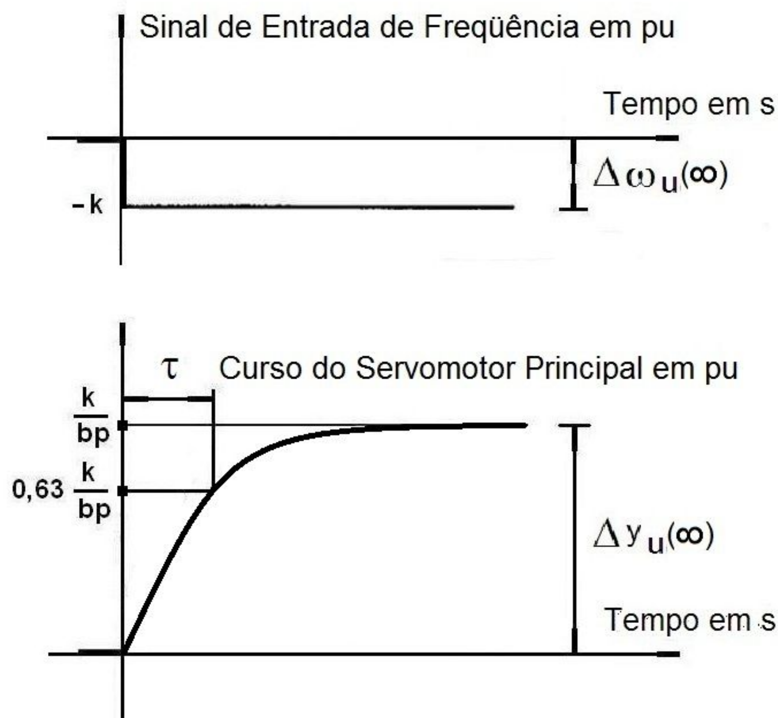



***Figura 3.59 – Resposta ao Degrau do Regulador de Velocidade sem Realimentação Transitória***

**b) Determinação do Valor da Queda Transitória de Velocidade ou Estatismo Transitório e da Constante de Tempo da Realimentação Transitória**

A determinação do valor da queda transitória de velocidade ou estatismo transitório do regulador de velocidade e do valor da constante de tempo do circuito de realimentação transitória deverá estar associada à equação de transferência global 3.173, desprezando-se o valor da constante de tempo $T_2$ do regulador em relação ao valor da constante de tempo de escoamento ou constante de tempo de *washout* $T_1$.

Para a execução do ensaio, deve-se aplicar um sinal de entrada na forma de uma função degrau no ponto de referência de velocidade, correspondendo a um degrau de variação da rotação da máquina, obtendo-se a resposta do curso do servomotor principal ou posição do distribuidor das palhetas diretrizes da turbina. Este ensaio é semelhante àquele realizado no caso anterior quando da determinação do valor da queda permanente de velocidade, porém aqui o regulador é ensaiado na sua condição normal de operação com as malhas de realimentação conectadas.

Da mesma forma, matematicamente, um sinal na forma de degrau de amplitude $k$ tem a seguinte representação, considerando-se um erro negativo de freqüência e o plano complexo de Laplace, conforme foi visto no capítulo 2:

$$\Delta\omega_U(S) = -\frac{k}{S}$$

No domínio do tempo, pode-se escrever que:

$$\omega_U(t) = k(t) = -k \quad \therefore \quad \lim_{t\to 0} k(t) = \Delta\omega_U(0) = -k$$

A saída representada pelo curso do servomotor para a equação 3.173 será:

$$\Delta y_U(S) = -\frac{1}{b_{pu}} \frac{(1+T_A S)}{(1+T_R S)}\left(\frac{-k}{S}\right) = \frac{kT_A}{b_{pu}T_R}\left[\frac{T_R}{T_A S} - \frac{T_R - T_A}{T_A(S + 1/T_R)}\right] \qquad (3.256)$$

Passando-se a equação 3.256 para o domínio do tempo vem:

$$\Delta y_U(t) = \frac{k}{b_{pu}} - \frac{k}{b_{pu}}\left(\frac{T_R - T_A}{T_R}\right) e^{-t/T_R} \qquad (3.257)$$

Assim

$$\Delta y_U(0) = \lim_{t\to 0} y_U(t) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{k}{b_{pu}} - \frac{k}{b_{pu}}\left(\frac{T_R - T_A}{T_R}\right) e^{-t/T_R}\right]$$

donde

$$\Delta y_u(0) = \lim_{t \to 0} y_u(t) = -\frac{-kT_A}{b_{pu}T_R} \quad \therefore \quad \Delta y_u(0) = -\frac{T_A}{b_{pu}T_R}\Delta\omega_u(0)$$

A partir da equação 3.174, referente à constante de tempo de *washout* $T_R$, vem que:

$$T_R = -\frac{T_A}{b_{pu}}\frac{\Delta\omega_u(0)}{\Delta y_u(0)} \quad \therefore \quad (1+\frac{b_{tu}}{b_{pu}})T_A = -\frac{T_A}{b_{pu}}\frac{\Delta\omega_u(0)}{\Delta y_u(0)}$$

Deste modo, promovendo simplificação, tem-se para a expressão da queda transitória de velocidade ou estatismo transitório:

$$b_{tu} = -\frac{\Delta\omega_u(0)}{\Delta y_u(0)} - b_{pu} \tag{3.258}$$

A figura 3.60 explica melhor como obter graficamente o valor da queda transitória como resultado do ensaio em função da equação 3.258 que o representa matematicamente.

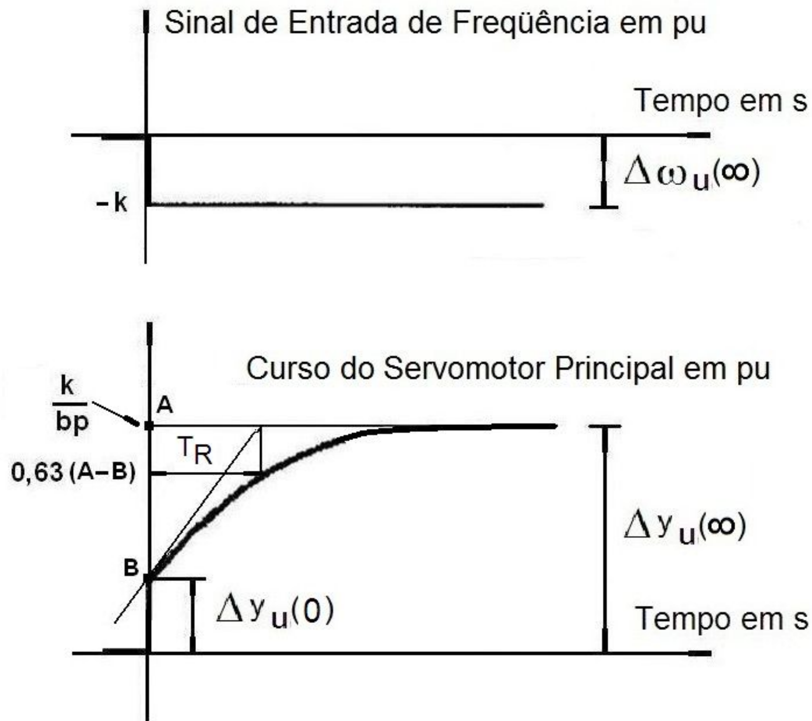



***Figura 3.60 – Resposta ao Degrau do Regulador de Velocidade com Realimentação Transitória***

Do mesmo modo que no caso anterior, também aqui, a referência 27 mostra cálculo semelhante, porém no artigo as variações de velocidade e de curso do servomotor são tomadas em valor absoluto, enquanto que, neste livro, devem-se considerar os sinais das variações das variáveis de estado envolvidas. O motivo destas observações é que, nos ensaios de campo, a prática é conhecer as amplitudes dos sinais e, a partir daí, calcular o valor dos parâmetros que, como é sabido, trata-se de valores absolutos.

Da equação 3.174, extrai-se o valor da constante de tempo do circuito da realimentação transitória em função dos parâmetros já previamente calculados.

Assim:

$$T_A = \frac{T_R}{1 + \frac{b_{tu}}{b_{pu}}} \qquad (3.259)$$

**c) Determinação do Valor da Constante de Tempo de Integração do Servomotor e Válvulas Associadas**

O cálculo do valor da constante de tempo de integração do servomotor e válvulas associadas pode ser obtido através da equação 3.252. O gráfico da figura 3.59 permite a medição da constante de tempo auxiliar $\tau$ .

Assim, tem-se para a constante de tempo de integração do regulador em malha aberta, a seguinte expressão:

$$T_y = \tau \, b_{pu}$$

Como foi mencionado, o valor da constante de tempo $T_y$ tem tudo a ver com a soma dos efeitos de integração do conjunto formado pela válvula distribuidora e servomotor principal.

**d) Determinação do Valor da Banda Morta**

Todo equipamento caracterizado por um sistema mecânico-hidráulico, assim como é visto nos reguladores de velocidade em sua parte de ação sobre as palhetas diretrizes da turbina hidráulica, de certa maneira apresenta aquilo que na teoria de controle é conhecido por banda morta, zona morta ou também zona neutra de atuação. Isso ocorre porque, muitas vezes, o sistema torna-se insensível, não respondendo a determinados valores de estímulos a ele aplicados.

A banda morta pode aparecer nos sistemas de controle de maneira proposital ou não. Quando ela não é proposital, trata-se de um problema sério e pode ser o resultado de folgas, principalmente nos dispositivos de acoplamento e transmissão mecânica. Um exemplo típico são as folgas excessivas que podem existir entre os dentes de um jogo de engrenagem em sistemas mecânicos de

rotação. Também podem ser vistas nos acoplamentos e dispositivos de transmissão em sistemas mecânicos de translação. Em reguladores de velocidade já foi notada a presença de banda morta devido à existência de borras de sujeira impregnada no *spool* ou mesmo nas partes internas de válvulas piloto em função da baixa qualidade do óleo de acionamento por problemas outros ligados tanto à manutenção quanto à própria qualidade do fluido utilizado.

Para a medição da banda morta de atuação do regulador de velocidade, deve-se levar em conta a curva da freqüência ou velocidade *versus* a curva da posição das palhetas diretrizes ou do curso do servomotor principal, porém com a máquina na condição operando em vazio.

O método consiste em, a partir da posição de abertura em vazio do distribuidor das palhetas diretrizes, estando a máquina em sua rotação nominal, ou seja, com $60 Hz$, elevar a rotação até $61 Hz$ retornando-se para a posição inicial e medindo-se o desvio de rotação ocorrido. A rotação deverá estar um pouco acima dos $60 Hz$. Repetir este procedimento para $62 Hz$ e para $63 Hz$, medindo-se os desvios associados a cada levantamento. Analogamente, repetir o mesmo procedimento agora para as velocidades $59 Hz$, $58 Hz$, $57 Hz$.

A tabela 3.3 mostra as variações de velocidade aplicadas e os desvios de rotação correspondentes.

**Tabela 3.3**

**Banda Morta em Reguladores de Velocidade**

| Variação Hz | Desvio Hz |
|---|---|
| 60 – 61 – 60 | d1 |
| 60 – 62 – 60 | d2 |
| 60 – 63 – 60 | d3 |
| 60 – 59 – 60 | d4 |
| 60 – 58 – 60 | d5 |
| 60 – 57 – 60 | d6 |

O valor da banda morta $\beta$ do regulador de velocidade será dado por:

$$\beta = \sum_{i=1}^{6} d_i \text{ em Hz} \qquad (3.260)$$

**Nota a respeito do valor da banda morta:**

A questão da presença da banda morta em sistemas de regulação vai além do fato que a relaciona com algum tipo de problema instalado no equipamento.

Nas referências 4 e 56, os autores mostram os aspectos positivos e negativos da presença da banda morta em sistemas de regulação. A referência 4 trabalha sobre UTEs e a referência 56 sobre UHEs. É interessante notar que sistemas de regulação de velocidade podem necessitar da presença de banda morta em

seus processos de controle. Um dos aspectos positivos vem ligado ao fato de que determinados controladores suplementares da regulação secundária de velocidade necessitam de certo valor de banda morta em seus canais de comando para desempenhar o controle tornando-o menos sensível e evitando flutuações excessivas.

**e) Determinação do Valor do Tempo Morto de Atuação**

O tempo morto $T_m$ de atuação de qualquer processo físico será o intervalo de tempo transcorrido entre o instante da ocorrência de um distúrbio sobre o processo até aquele instante em que seja notada uma mudança de estado na saída desse processo. No caso particular do regulador de velocidade, será o intervalo decorrido entre o instante de aplicação de um sinal em forma de degrau de movimento, por exemplo, sobre o atuador da válvula piloto e o início da atuação em movimento do servomotor principal ou da posição das palhetas diretrizes da turbina. O tempo morto é uma conseqüência do próprio projeto do equipamento. O valor do tempo morto do regulador de velocidade pode ser calculado segundo o esquema representado na figura 3.61.

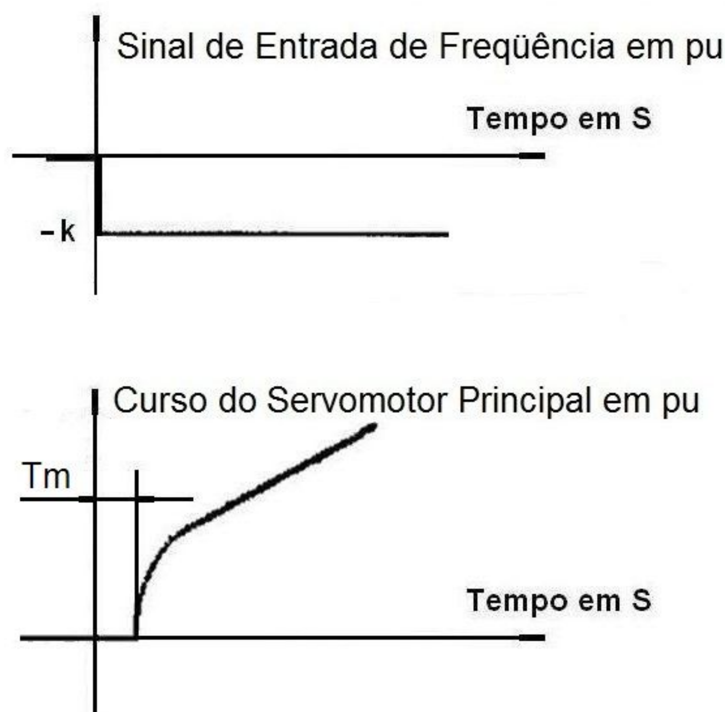



*Figura 3.61 – Resposta do Regulador de Velocidade para o Tempo Morto*

**f) Determinação do Valor das Velocidades Máxima e Mínima do Servomotor Principal**

Cabe aqui saber que qualquer dispositivo do tipo servomotor, que se movimente através da injeção de óleo sob pressão de serviço, não se movimenta, em seu curso, de maneira instantânea. Há que se respeitar uma determinada velocidade de movimento que é inerente nesses casos. E também é interessante saber que essas velocidades, via de regra, não são as mesmas em ambos os sentidos. O movimento do curso do servomotor, no sentido de abertura, se dá de maneira mais rápida que aquele que se processa em sentido oposto ou de fechamento. No sentido de abertura é conhecida por velocidade máxima e no sentido de fechamento por velocidade mínima.
Para a medição do valor das velocidades máxima e mínima de operação do servomotor principal, o procedimento de ensaio deverá obedecer ao mesmo procedimento que aquele observado quando da execução da medição dos tempos operativos de manobra do servomotor.
No sentido de abertura, devem-se desconsiderar as partes não lineares referentes ao início do movimento bem como no fim do movimento. Do mesmo modo, no sentido de fechamento, deve-se também desconsiderar o final relativo à ação de amortecimento quando a curva muda de inclinação.

Com base no gráfico da figura 3.62, onde se encontram representados os movimentos dos cursos de um conjunto de servomotores, em ambos os sentidos, os valores das velocidades máxima e mínima serão:

$$v_{máx\,u} = \frac{y_{Au}}{t_A} \quad \text{em pu/s} \qquad (3.261)$$

$$v_{mín\,u} = \frac{y_{Fu}}{t_F} \quad \text{em pu/s} \qquad (3.262)$$

onde

$y_{Au}$ : curso do servomotor no sentido de abertura
$y_{Fu}$ : curso do servomotor no sentido de fechamento
$t_A$ : tempo total do curso do servomotor no sentido de abertura em s
$t_F$ : tempo total do curso do servomotor no sentido de fechamento em s

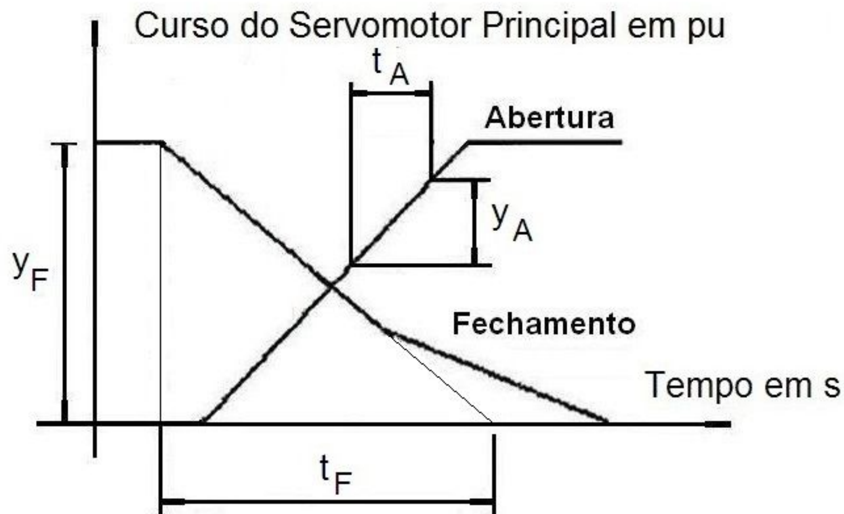



***Figura 3.62 – Tempos Operativos de Abertura e Fechamento do Servomotor***

**Nota a respeito dos tempos operativos de abertura e fechamento do servomotor:**

Existe uma grande preocupação dos por parte de projetistas e fabricantes de sistemas de regulação de velocidade de turbinas hidráulicas com a questão da sobrepressão e da sobrevelocidade que vem sempre associada a comandos de trip da proteção seguidos de rejeição de carga da máquina em operação. O problema tem a ver com os riscos inerentes ao procedimento que, se não estiver bem ajustado, ora promoverá o fenômeno de baixa pressão no conduto seguido de uma elevada taxa de velocidade de rotação da turbina; ora promoverá o fenômeno inverso, ou seja, de alta pressão no conduto seguido de uma baixa taxa de velocidade de rotação da turbina; ambos os casos evidenciando forte desequilíbrio momentâneo capaz de provocar danos irreversíveis para a instalação. No primeiro caso, a sobrevelocidade excessiva poderá até provocar o chamado fenômeno de *zeramento* do entreferro da máquina o que pode ser verificado quando o rotor do gerador dilata ao ponto de roçar o estator; no segundo caso, a sobrepressão excessiva poderá até provocar o rompimento do conduto forçado, principalmente na região próxima da entrada da turbina conhecida como região de tomada de pressão para o método de *Winter-Kennedy*.

**Nota a respeito do tema levantamento de parâmetros principais de reguladores de velocidade:**

A conclusão principal que se pode tirar do estudo que serviu de base para o levantamento das funções de transferência de reguladores de velocidade é que o conhecimento prévio do modelo matemático aplicado significa a possibilidade da medição dos fenômenos. Significa também lidar com quantidades ao invés de se lidar com elementos qualitativos e subjetivos ou mesmo modelos de literatura. O trato com a modelagem é a garantia de se conhecer o quão

otimizado o sistema automático está e, o que é primordial, ter a possibilidade de medir o grau de estabilidade do dispositivo inserido no processo de controle.
Nos procedimentos de modelagem de sistemas de controle automático, a representatividade por elementos na forma de parâmetros dependerá da garantia de o quão confiáveis são esses parâmetros aplicados. Neste particular, deve-se lembrar que estudos de otimização, tanto no âmbito da instalação como no plano dos SEPs, não prescindem da modelagem paramétrica dos dispositivos envolvidos.
As aproximações e desconsiderações que foram adotadas surgiram tanto da consulta à literatura especializada quanto da prática da execução de ensaios especiais no campo em várias instalações. Por exemplo, citam-se as duas constantes de tempo envolvidas no desenvolvimento da equação 3.170, as constantes de tempo $T_1$ e $T_2$. Elas compõem uma função de transferência teórica de segunda ordem. Em todos os reguladores de velocidade ensaiados para aquela condição sempre foi obtida, como resposta, uma função de transferência de primeira ordem, o que acabou confirmando a aproximação adotada para aquela equação. Um exemplo interessante se trata do dispositivo da válvula proporcional. Quando se faz um ensaio em que se quer focar a condição intrínseca da válvula, o modelo toma a forma de um sistema de terceira ordem com constantes de tempo na casa de $0{,}05\,s$. Como o sistema é de terceira ordem, nos termos de terceiro grau, acabam aparecendo coeficientes da classe de $0{,}000125\,s^3$, o que termina sendo uma tentativa inútil medi-los em termos práticos, daí a razão das aproximações.
Com relação aos parâmetros principais tais como a queda permanente e a queda transitória, reguladores puramente mecânicos trabalham sempre com realimentação em abertura do distribuidor ou do servomotor principal, o que é a mesma coisa.
Embora o trabalho tenha se desenvolvido a partir de reguladores hidro-mecânicos ele pode ser analogamente aplicado a reguladores eletrônico-hidráulicos sem maiores problemas.
Quanto à questão da realimentação, o que acontece é que na maioria das vezes os fabricantes entregam reguladores de velocidade com duas realimentações, uma em abertura e a outra em potência ativa elétrica que são promovidas através de dispositivos transdutores. Às vezes, dependendo da base de valores escolhida, os valores, por exemplo, da queda permanente de abertura e da queda permanente de potência, os chamados estatismos permanentes, acabam ficando diferentes. A solução seria adotar o valor base de abertura correspondente ao valor de potência como se faz normalmente mantendo um conjunto de valores na mesma base.
Outra questão importante é a definição de um critério de erro. A grande maioria dos textos técnicos que tratam do assunto da regulação de velocidade de turbinas hidráulicas traz a sugestão para as faixas de tolerância. Na prática, quando ensaios são realizados, trabalha-se com uma tolerância de até *+/- 7%* de erro, esse é o critério que as áreas de regulação e proteção têm adotado para o erro porcentual em relação a um valor esperado e dado como correto dentro da classe de precisão requerida. Outro fator que também influi de maneira direta na qualidade dos ensaios é a classe de precisão da instrumentação utilizada. Atualmente, têm-se empregado dispositivos de aquisição de dados, de tecnologia digital, nas medições de campo. Mas ainda,

até por questões de praticidade, dispositivos do tipo registrador mecânicos de posição ou mesmo registradores elétricos de freqüência já foram utilizados nos ensaios de levantamento.
Outra observação importante, qualquer que seja a geração de um regulador de velocidade de turbinas hidráulicas, a modelagem a ser empregada, considerados aí todos os seus parâmetros e variáveis de estado, em termos matemáticos, será sempre a mesma.

### 3.8.3. Diagrama em Blocos do Regulador de Velocidade Considerando Não Linearidades

As não linearidades convencionais verificadas no desenvolvimento do diagrama em blocos do regulador de velocidade são duas: aquela referente às velocidades máxima e mínima do servomotor e aquela referente ao limitador de abertura também do servomotor principal. A figura 3.63 traz o diagrama em blocos de um regulador de velocidade padrão, comumente apresentado na literatura técnica, onde as não linearidades são mostradas.

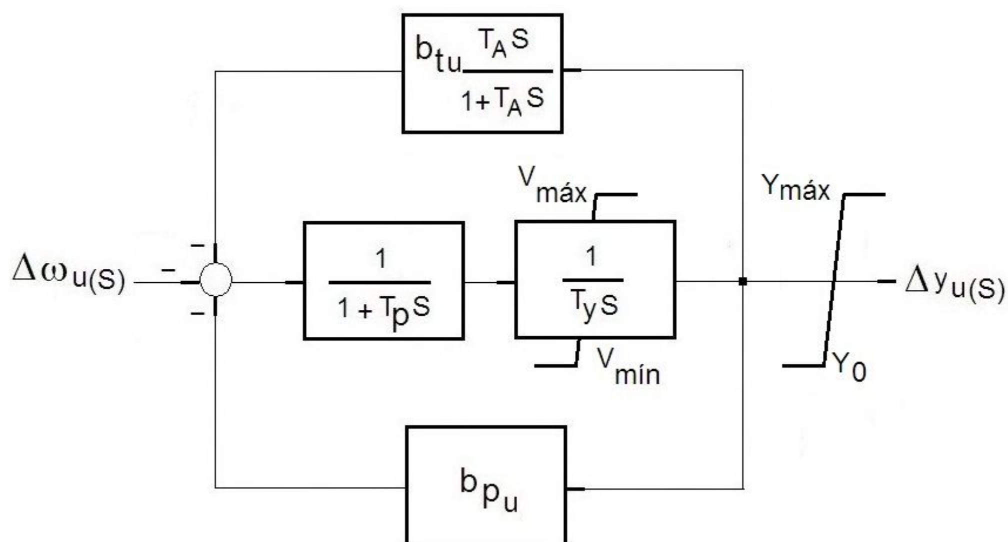



***Figura 3.63 – Diagrama em Blocos Geral do Regulador de Velocidade com Não Linearidades***

Na figura 3.63 considerar a seguinte legenda:

$V_{máx\,u}$ : velocidade máxima do servomotor no sentido de abertura

$V_{mín\,u}$ : velocidade mínima do servomotor no sentido de fechamento

$Y_{máx\,u}$ : abertura máxima do servomotor

$Y_0$ : abertura referente a condição em vazio do servomotor

A abertura em vazio $Y_0$ do servomotor do distribuidor das palhetas diretrizes da turbina se refere ao valor do curso do servomotor referente à rotação de nominal estando a máquina operando em vazio.

## 3.8.4. Válvula Proporcional

Como já explicado anteriormente, o dispositivo da válvula proporcional, trata-se de um mecanismo que tem por finalidade promover o controle sobre o curso do servomotor principal sempre a partir de um sinal de erro, no caso um erro de freqüência. Como também já foi mencionado antes, existe uma relação linear entre o sinal de entrada de comando e o curso da válvula proporcional, porém as velocidades são diferentes nos dois sentidos do movimento. Sempre será notado que a velocidade será mais rápida no sentido de fechamento que no sentido oposto, o de abertura. Isso se deve ao fato de que, via de regra, todas as válvulas proporcionais mantém presente, através da ação de uma mola, um comando de fechamento, independente se houver ou não o sinal de entrada.
No caso, por exemplo, de uma válvula proporcional do tipo eletro-hidráulico, haverá a necessidade de se disponibilizar um sinal de *off-set* sobre a bobina elétrica, um sinal residual, para vencer a força de mola. Na falta desse sinal, um comando permanente de fechamento será deliberado. Isso visa criar um sistema de proteção para o caso de haver uma perda da pressão de óleo de acionamento, por exemplo. Portanto, já existirá instalada uma força mecânica extra de garantia no sentido de fechamento promovendo o comando sobre o distribuidor as palhetas diretrizes independente de agentes externos.
As figuras 3.64 e 3.65 mostram o resultado de um levantamento feito no campo sobre o conjunto válvula proporcional e servomotor piloto do regulador de velocidade de uma grande instalação. A válvula proporcional, cuja resposta no domínio do tempo é apresentada na figura 3.64, trata-se de um dispositivo do tipo eletrônico-hidráulico em que o sinal de entrada, uma função da freqüência do grupo, é dado em volts enquanto que o sinal de saída, a velocidade de movimentação do *spool* da válvula proporcional, obtido através de um LVDT de alto desempenho interno ao bloco, é dado em volts por segundo. Na figura 3.65 é exibida a resposta em freqüência do conjunto.
De modo a evitar aquilo que no jargão de controle se habituou a chamar de vício de posição, os fabricantes costumam sobrepor aos movimentos do *spool* da válvula proporcional um sinal de alta freqüência, também conhecido como *dither*, normalmente entre $75$ e $150\,Hz$. Esse sinal não consegue promover a ação do regulador de velocidade em si por ser de elevadíssimo valor para tal, mas para a válvula proporcional ele se torna interessante por eliminar os possíveis problemas advindos com a viscosidade do óleo de acionamento. Esse sinal pode ser de origem elétrica ou de origem mecânica. Eletricamente seria como um sinal em tensão alternada aplicado diretamente à bobina da válvula proporcional e mecanicamente seria um sinal do tipo intermitente na forma de um torniquete hidráulico que visa buscar manter o *spool* da válvula proporcional em movimento constante de alta rotação.

Ressonância entre Regulador de Velocidade e SEP

Um problema que foi pesquisado e identificado numa UHE, uma instalação de grande porte, estava associado a um fenômeno de ressonância que aparecia quando havia algum tipo de perturbação externa. Posteriormente, analisando os registros, constatou-se que não só uma perturbação externa influenciara no transcurso, como também a variação de cargas locais ou variações ligadas a ensaios que foram realizados nos reguladores de velocidade dessa instalação.
Quando foi promovida uma série de estudos focado o problema, descobriu-se que tais fenômenos tinham tudo a ver com o arranjo em que se encontrava montada a estrutura física do conjunto válvula proporcional e servomotor piloto do regulador de velocidade. Esse conjunto forma aquilo que muitos fabricantes costumaram chamar de regulador mecânico de abertura que no fundo representa o estágio de controle que atua sobre a válvula distribuidora do grupo regulador. Em reguladores de velocidade cujo projeto remonta à década de 1970 tais arranjos são enormes, pesados e ocupam grande espaço se comparados aos conjuntos compactados vistos nos projetos mais recentes, década 2000. Nos reguladores dotados de tecnologia digital, o regulador de abertura, ou o conjunto válvula proporcional mais o servomotor piloto, utiliza o procedimento de alimentação da bobina de comando pelo método PWM ou *Pulso Width Modulation*, uma técnica aplicada na eletrônica de telecomunicações que diminui sobremaneira as perdas permitindo uma redução significativa no tamanho do aparato. A figura 3.66 exibe um regulador de velocidade com o diagrama em blocos que mostra o esquema da válvula proporcional com a realimentação do sinal do *spool*.
Como observação, vale lembrar que quando o valor da constante de proporcionalidade é $k = 1V/V$ e da constante de tempo é $T_r = 1s$, o valor da constante de tempo tende a $T'_p \rightarrow T_p$.

Foram realizados dois casos considerando-se o esquema do diagrama em blocos da figura 3.66, com máquina contra a barra infinita, utilizando a realimentação permanente em potência, sendo empregados os seguintes dados:

$b_{pu} = 0,045\,pu/pu \quad b_{tu} = 0,30\,pu/pu \quad T_A = 2s$

$k = 60\,V/V \quad T_p = 0,01s \quad T'_p = 0,6s \quad T_r = 0,2s$

$T_y = 0,14s \quad D_u = 0,5\,pu/pu \quad T_W = 0,8s$

$2H = 11,52s \quad T_{12} = 3,1\,pu/rad$

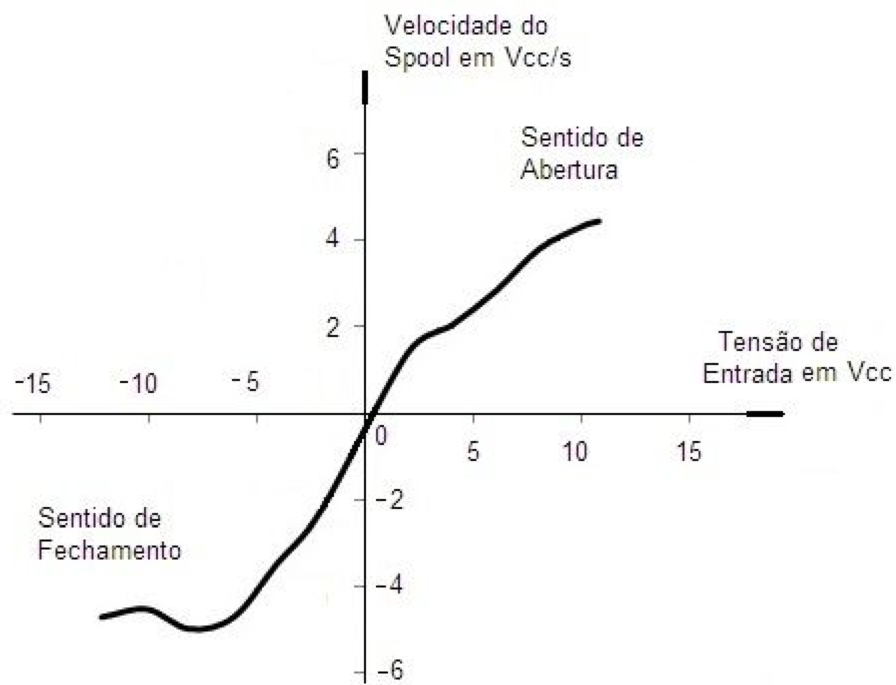



***Figura 3.64 – Característica Real Operativa de uma Válvula Proporcional***

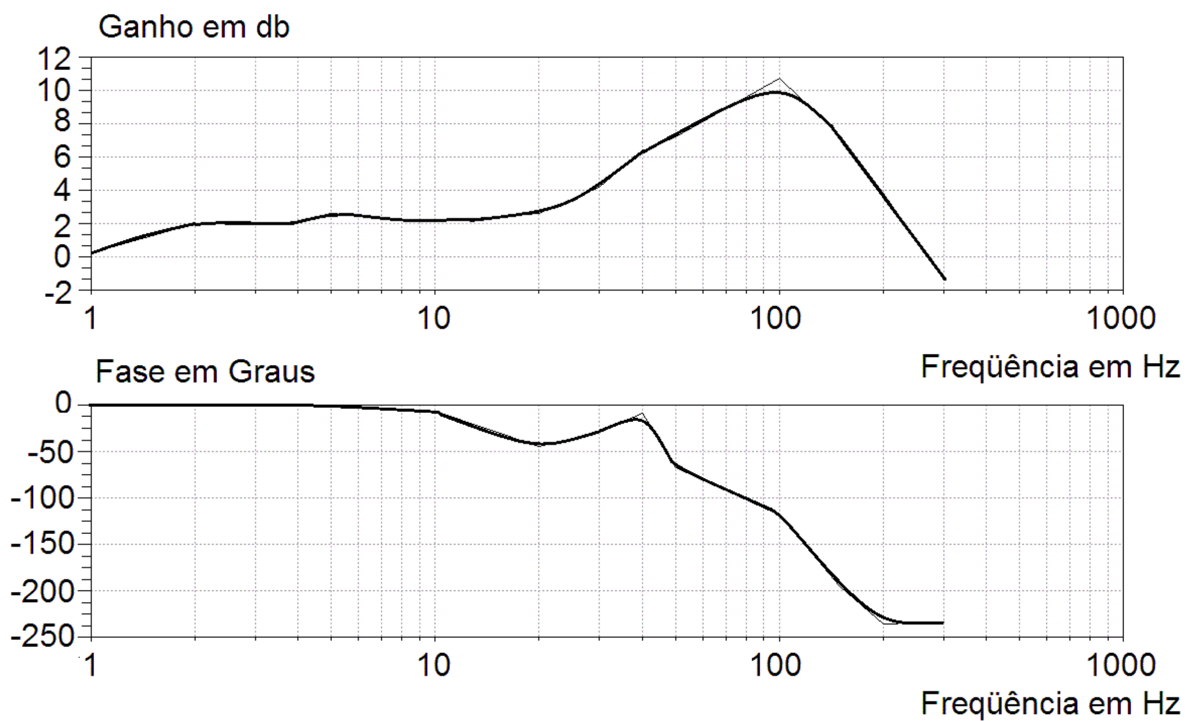



***Figura 3.65 – Resposta em Freqüência da Válvula Proporcional da Figura 3.64***

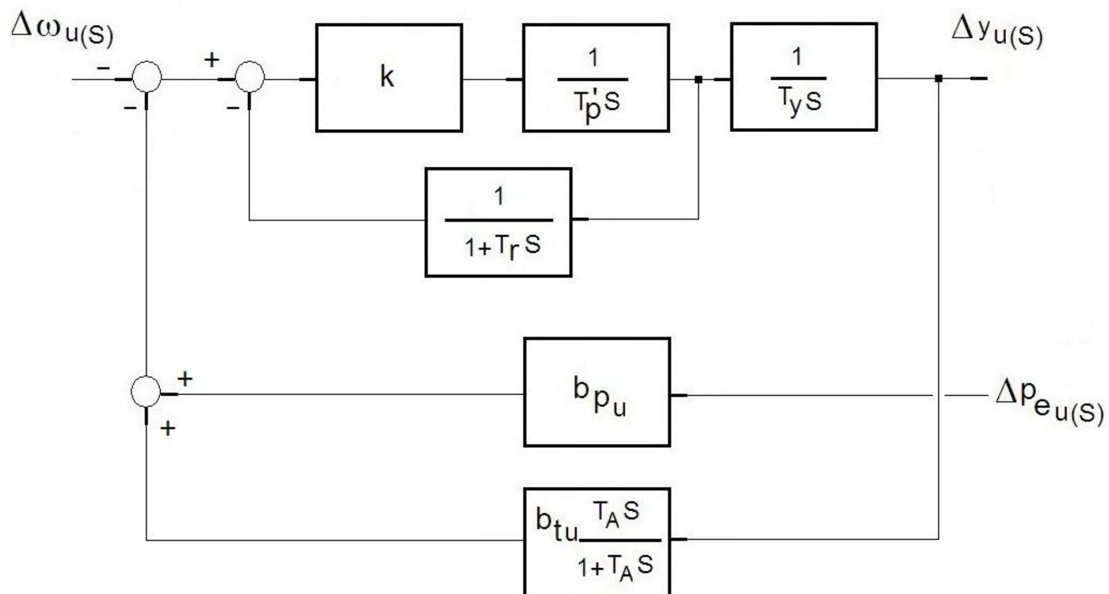



***Figura 3.66 – Regulador de Velocidade com Válvula Proporcional Dotada de Realimentação Tipo Filtro Passa-Baixas***

Na figura 3.66 considerar as mesmas indicações que foram utilizadas nos diagramas em blocos das figuras anteriores de mesma semelhança além da seguinte legenda:

$k$ : constante de proporcionalidade da válvula proporcional

$T'_p$ : constante de tempo pura da válvula proporcional

$T_r$ : constante de tempo da realimentação do spool

$\Delta p_{eu}(t)$ : variação da potência ativa elétrica

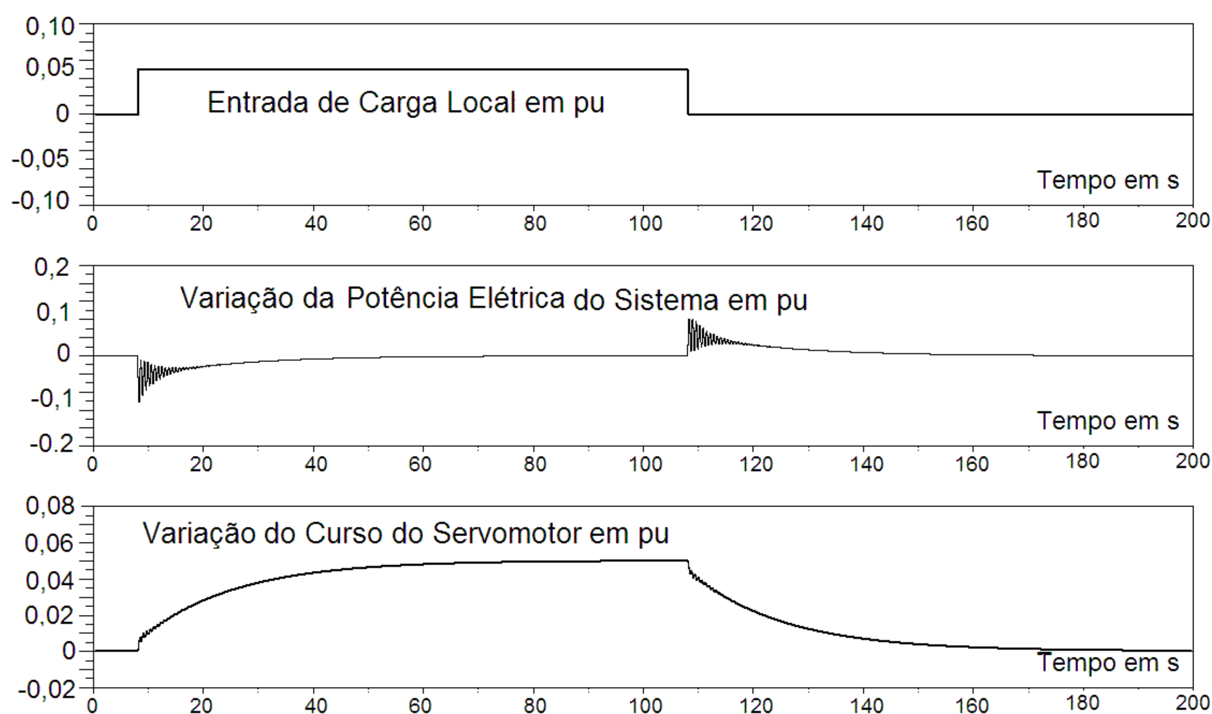



***Figura 3.67 – Entrada de Carga Local e Regulador de Velocidade com Válvula Proporcional Dotada de Realimentação Unitária***

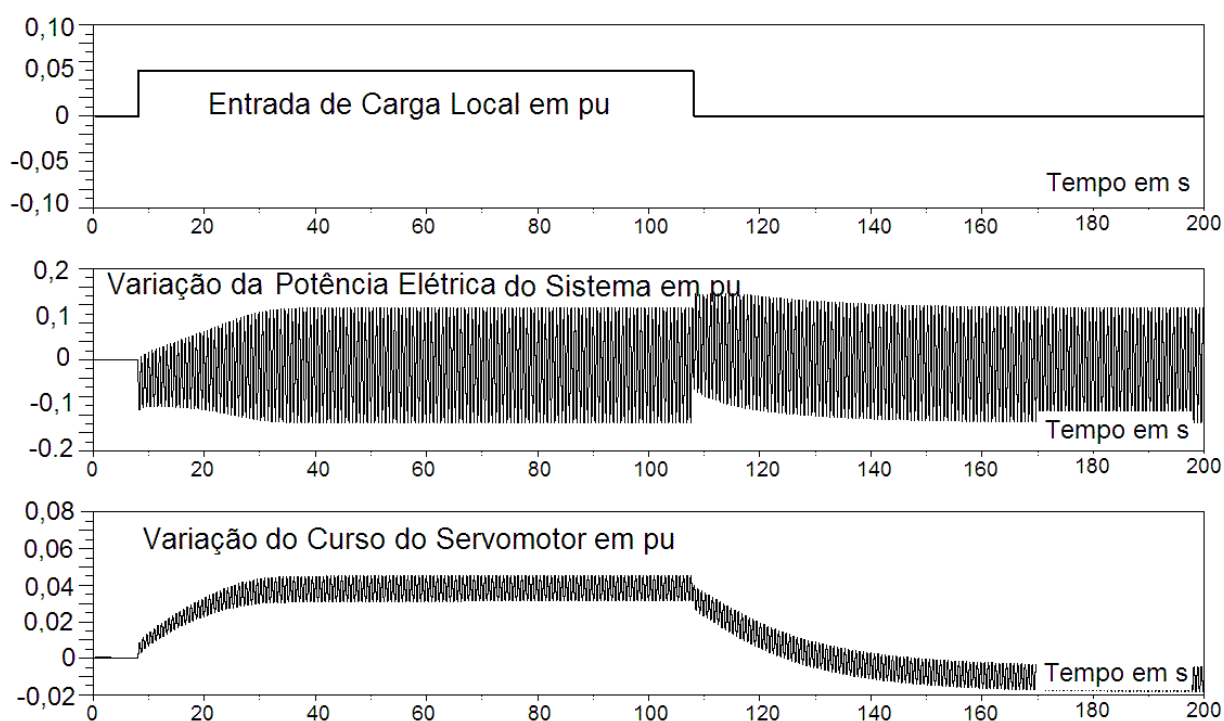



***Figura 3.68 – Entrada de Carga Local e Regulador de Velocidade com Válvula Proporcional Dotada de Realimentação Tipo Filtro Passa-Baixas***

As figuras 3.67 e 3.68 mostram os casos em que há uma entrada de carga local e o desempenho do sistema regulador de velocidade em cada um deles. No primeiro caso, o sistema da válvula proporcional se trata de um sistema com realimentação unitária e, na figura 3.67, as ações de tomada e de retirada de carga se dão pelo regulador de velocidade já que a realimentação permanente é em potência ativa elétrica. O desempenho é normal. No segundo caso, o sistema da válvula proporcional se trata de um sistema com realimentação através de um filtro passivo tipo passa baixas sintonizado exatamente num ponto em que se pode notar a presença da ressonância. É visível a forte oscilação existente sobre o servomotor das palhetas e, por conseguinte, sobre o distribuidor. Em ensaios de campo, observaram-se oscilações fortíssimas que provocaram batimentos acentuados das válvulas e servomotores sendo que o ensaio teve de ser interrompido em função disso. Após verificações, nada de anormal foi constatado, porém não se realizaram mais os ensaios.
O motivo dos movimentos abruptos era mesmo o fenômeno de ressonância que existia considerando-se as freqüências naturais envolvidas com os processos do regulador de velocidade e do chamado *modo local de oscilação*. Ambos os sistemas apresentavam as características de um sistema de controle de segunda ordem o que implica, como visto no capítulo 2, na possibilidade da existência de raízes complexas o que determina uma resposta oscilatória no domínio do tempo. Como não se podiam mudar os parâmetros relativos ao sistema elétrico, a forma de evitar tal problema foi alterar os parâmetros do regulador de abertura, mais precisamente, mudar o tipo de realimentação do *spool* da válvula proporcional. Na época, optou-se por uma realimentação unitária o que solucionou o problema.
Por tanto, o uso da realimentação do *spool*, em sistemas dotados de reguladores de abertura, na forma de um filtro passivo tipo passa baixas, conforme está mostrado na figura 3.66, deve ser realizado com os devidos cuidados. Nos casos mostrados nas figuras 3.67 e 3.68, a freqüência natural não amortecida registrada em ambos os sistemas era da ordem de $1{,}6\ Hz$.

### 3.8.5. Sensor de Velocidade

Um dispositivo fundamental nos reguladores de velocidade é aquele que responde pela medição e transdução da velocidade de rotação do conjunto girante. Os sensores de velocidade empregados em sistemas de regulação de velocidade variam conforme a geração de seus projetos.
Empregam-se desde os tacômetros a base de pêndulos centrífugos, tocados por correias, polias e volantes, passando pelos tacômetros de pêndulos centrífugos tocados por um PMG, até os circuitos medidores de freqüência mais modernos que se utilizam da tecnologia das sondas tipo Hall baseadas no efeito físico de mesmo nome.
Em todos esses sistemas a finalidade, como o próprio nome diz, é a medição da velocidade de rotação do grupo turbina-gerador fornecendo um sinal ao somador de entrada do regulador de velocidade, no máximo possível, livre de ruídos e flutuação.
Cada um desses sistemas, dependendo de sua geração, pode vir a apresentar algum tipo de problema específico. Nos sistemas puramente mecânicos, as

correias costumam apresentar frouxidão o que, vez por outra, acaba impondo ao controle uma espécie de modulação que, na faixa de baixas freqüências, na ordem de $0{,}05\ Hz$, interferem bastante no processo.

Nos sistemas tocados por um PMG, são duas as questões que podem ser evidenciadas pela experiência: a perda do magnetismo residual do gerador do sistema PMG e a flutuação mecânica do grupo. O desequilíbrio de fases no gerador do PMG também tem sido verificado ultimamente, porém a causa é outra. O primeiro caso poderia se provocado por superaquecimento do rotor do gerador enquanto o segundo poderia estar relacionado com problemas no acoplamento entre o gerador e o motor que aciona os pêndulos centrífugos.

Em sistemas com base nos sensores que se utilizam do efeito Hall um problema que ocorre está ligado aos circuitos amplificadores que promovem o acoplamento entre as sondas e o circuito eletrônico do regulador. A questão principal é que na maioria dos casos, tais circuitos acopladores ficam instalados próximo do cone da turbina, um lugar úmido, com impregnação de óleo de acionamento e pó de escova, além de estar sob o efeito de forte vibração, uma característica própria desse local.

O problema do desequilíbrio de fases do gerador do PMG já foi evidenciado por excesso de cargas que foram penduradas nesse dispositivo aproveitando-o para outras funções. Esse fato também foi observado em reguladores de velocidade eletrônicos em função do mesmo problema, ou seja, excesso de carga a ser alimentada pelo circuito pelo circuito de transdução.

O que acontece é que muitas vezes surge a necessidade de modernização de determinada instalação de energia, ou outra qualquer, e se aproveita desses sinais que, originalmente, se apresentavam bem limpos de ruídos e flutuações para diversos fins outros. Isso acaba sobrecarregando tais circuitos, pois seus projetos iniciais não previram tais execuções.

Muitas vezes aparecem queixas do pessoal ligado aos COSs que reclamam de diferenças nos sinais de telemedição tais como potência ativa, velocidade de rotação, por exemplo. Nos sistemas que se utilizam de PMGs, a caracterização desse problema se manifesta no desequilíbrio da tensão deliberada pelo gerador para alimentação do motor e das demais cargas. Nos sistemas eletrônicos, a principal caracterização do problema são os erros de medição nas informações para as salas de controle e COSs.

### 3.8.6. Método Experimental para Obtenção dos Valores do Momento de Inércia e da Constante de Inércia de Grupos Geradores Hidráulicos

Será mostrado, nesse tópico, como se equaciona e determina os valores das grandezas e parâmetros que derivam da inércia de um grupo gerador-turbina.

A equação de transferência do torque entre turbina e gerador, para um sistema mecânico de rotação, é dada pela equação 3.113, repetida a seguir por comodidade.

$$\tau(t) = J\frac{d}{dt}\omega(t) + D\,\omega(t) + \frac{1}{k}\int_0^t \omega(t)dt$$

onde

$J$ : momento de inércia do conjunto girante

$D$ : coeficiente de viscosidade cinemática dos mancais

$K$ : compliância torcional do eixo de acoplamento turbina - gerador

$\omega$ : velocidade angular ou freqüência de giro

$t$ : variável independente tempo

Da experiência de trabalho com grandes grupos de geração hidráulica do tipo turbina-gerador, considerando-se a equação básica de transferência de torque 3.113, repetida anteriormente, constata-se que o parâmetro $J$ possui um valor substancial em relação aos valores dos outros dois parâmetros quando $D$ é praticamente desprezível em função do desempenho dos mancais e $K$ tende a elevados valores em função das características próprias do eixo de acoplamento entre a turbina e o gerador propriamente dito. Matematicamente, $D \to 0$ e $K \to \infty$.

Assim, a equação do torque toma a forma mais simplificada da equação 3.114, aqui também repetida:

$$\tau(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

Em termos de equação diferença, levando-se em conta as variáveis de estado envolvidas, tem-se que:

$$\Delta\tau(t) = \tau(t) - \tau_0 \quad \therefore \quad \tau(t) = \tau_0 + \Delta\tau(t)$$

e também que

$$\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0 \quad \therefore \quad \omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) \quad \therefore \quad \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d\Delta\omega(t)}{dt}$$

onde $\tau_0$ e $\omega_0$ se referem a valores da base de valores escolhida previamente ou então à condição inicial de operação

Substituindo-se as expressões de $\tau_0$ e $\omega_0$, na equação 3.114, vem:

$$\tau_0 + \Delta\tau(t) = J\frac{d\Delta\omega(t)}{dt}$$

ou, em termos de potência, pois já se sabe que $p = \tau\,\omega$ e que $p = P_0 + \Delta p$:

$$P_0 + \Delta p(t) = J\omega(t)\frac{d\Delta\omega(t)}{dt}$$

Assim

$$P_0 + \Delta p(t) = J\omega_0\frac{d\Delta\omega(t)}{dt} + J\Delta\omega(t)\frac{d\Delta\omega(t)}{dt}$$

$$P_0 = J\omega_0 \frac{d\Delta\omega(t)}{dt}$$

ou melhor, simplificando:

$$P_0 = J\omega_0 \frac{d\Delta\omega(t)}{dt} \quad \therefore \quad J = \frac{P_0}{\omega_0} \frac{1}{d\omega(t)/dt}$$

Linearizando-se no ponto correspondente à condição inicial de operação da máquina quando, em $t = t_0$, tem-se que $\omega(t) = \omega_0$, vem que:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \left.\frac{\partial\omega(t)}{\partial t}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}$$

Assim

$$J = \frac{P_0}{\omega_0 \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}} \qquad (3.263)$$

onde

$P_0$ : potência ativa elétrica em *W*

$\omega$ : velocidade angular ou freqüência de giro em *radianos/s*

$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ : taxa de variação velocidade no tempo em *radianos/s*$^2$

$t$ : variável independente tempo

Para obtenção da curva $\frac{\partial\omega(t)}{\partial t}$ bastará, numa rejeição de carga, obter os valores de gráfico do chamado ensaio de rejeição de carga, considerando-se como potência $P_0'$ o valor $P_0' = 1{,}0025\,P_0$ que se aproxima das perdas do estator da máquina principal. No caso de se optar pela rejeição de carga, não se pode esquecer que a taxa de variação $\frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}$ tem a ver com o momento dinâmico do processo, também conhecido como $Gd^2$.

Assim, a equação final do momento de inércia será:

$$J = \frac{1{,}0025\,P_0}{\omega_0 \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}} \qquad (3.264)$$

Muitas vezes, na prática, o que se faz é utilizar mesmo a definição de $Gd^2$, associada ao diâmetro $d$ da massa girante ao invés de se utilizar do raio $r$ de giração do grupo que é associado ao momento de inércia $J$.

Deste modo, tem-se, para o momento de inércia, que:

$$J = Gr^2 \tag{3.265}$$

como $r = \frac{d}{2}$

$$J = G(\frac{d}{2})^2 = \frac{Gd^2}{4} \quad \therefore \quad Gd^2 = 4J = \frac{1{,}0025\,P_0}{\omega_0 \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}}$$

O aspecto do resultado do ensaio de rejeição de carga é mostrado na figura 3.69. Trata-se do registro do sinal da velocidade de rotação do conjunto girante.

Deve-se procurar a taxa de variação $\frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}$ na região reta da curva, logo após o aumento da rotação.

A partir do registro do ensaio de rejeição de carga, o que deverá ser promovido num ponto de carregamento mais próximo possível da potência nominal da máquina em questão, obtém-se o valor da taxa de variação da rotação em relação ao tempo, calculando-se, então, o valor do parâmetro momento de inércia $J$ através da seguinte fórmula:

$$J = \frac{1{,}0025\,P_0}{4\,\omega_0 \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}} \tag{3.266}$$

onde $J$ é dado em $Kg\,m^2$

Para o cálculo da constante de inércia, pela equação 3.120, tem-se que:

$$p_u(t) = 2H \frac{d}{dt} \omega_u(t)$$

onde $H = \frac{W}{P_0} = \frac{\frac{1}{2} J \omega^2{}_0}{P_0}$ é a constante de inércia do conjunto girante em $\left[\frac{MJ}{MW}\right]$ ou em s

$$H = \frac{\frac{1}{2} J \omega^2{}_0}{P_0} \tag{3.267}$$

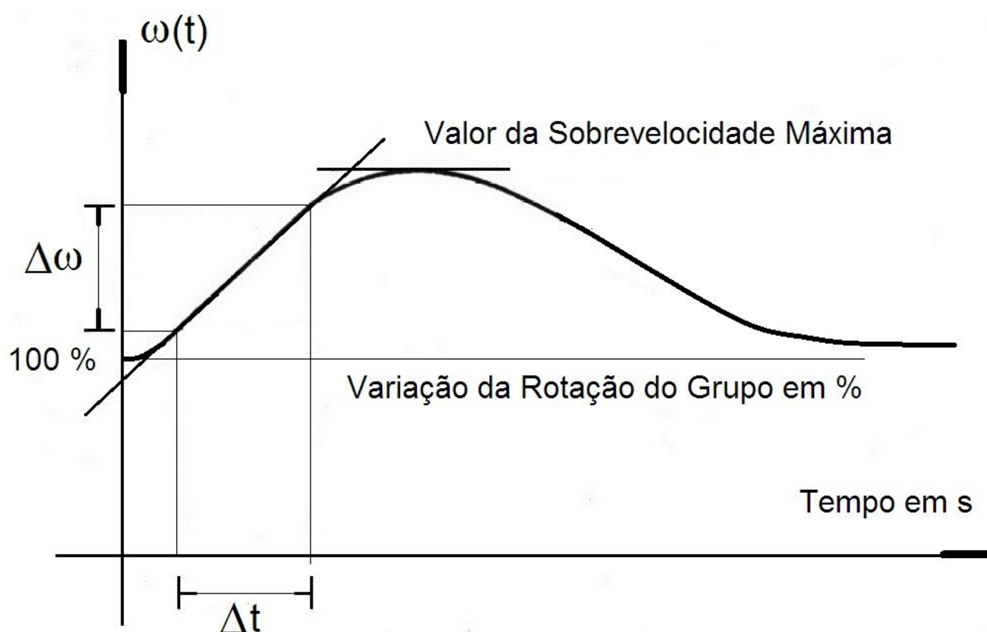



***Figura 3.69 – Curva de Sobrevelocidade do Ensaio de Rejeição de Carga***

### 3.8.7. Valores Típicos para os Parâmetros Principais de Reguladores de Velocidade

As referências 22 e 27 apresentam, de maneira bem compacta, as faixas específicas de valores típicos para reguladores de velocidade e a tabela 3.4 traz esses valores complementados.

| ***Tabela 3.4*** | | |
|---|---|---|
| **Valores Típicos de Parâmetros de Reguladores de Velocidade** | | |
| Parâmetro | Valor Típico | Faixa |

| | | |
|---|---|---|
| constante de tempo de escoamento do regulador - $T_R$ | $50\,s$ | $19$ a $440\,s$ |
| constante de tempo do regulador - $T_G$ | $0{,}2\,s$ | $0{,}2$ a $0{,}4\,s$ |
| constante de tempo da queda transitória - $T_A$ | $5\,s$ | $2$ a $55\,s$ |
| valor da queda permanente - $b_{pu}$ | $0{,}05\,pu/pu$ | $0{,}03$ a $0{,}06\,pu/pu$ |
| valor da queda transitória - $b_{tu}$ | $0{,}30\,pu/pu$ | $0{,}20$ a $1{,}00\,pu/pu$ |
| banda morta - $\beta$ | $\pm 0{,}05\,Hz$ | ___ |
| velocidade máxima do servomotor principal - $V_{máx}$ | $+0{,}15\,pu/s$ | ___ |
| velocidade mínima do servomotor principal - $Vmín$ | $-0{,}15\,pu/s$ | ___ |
| abertura em vazio do servomotor principal | $+0{,}10\,pu$ | $0{,}8$ a $16\,pu$ |

## 3.9. Exercícios Propostos

**1.** Enumerar as partes principais de um regulador de velocidade destinado a controlar o fluxo de água de uma turbina hidráulica do tipo Kaplan.

Sugestão: uma turbina tipo Kaplan deve ser controlada por duas vias sendo a primeira sobre as palhetas diretrizes da turbina e a segunda sobre as pás do rotor.

**2.** Uma instalação hidrelétrica possui uma tubulação de $400\,m$ de comprimento. Esta tubulação é constituída por virolas feitas de placas de aço tipo SAE 1020, com um teor de $0{,}2\%$ de carbono, de $1\,inch$ de espessura, numa forma circular cujo diâmetro é $4{,}65\,m$. Sabendo-se que o aço carbono tipo SAE 1020 tem o módulo de elasticidade máximo de $170.000\ MPa$, calcular a velocidade de propagação da onda de pressão nesta tubulação, o tempo de propagação de onda e a freqüência de oscilação desta onda na tubulação. Considerar para tal que a massa específica da água seja $1\,g/cm^3$ e que o seu coeficiente de compressibilidade seja $20.000\ MPa$. Adotar a aceleração da gravidade como $10\,m/s^2$.

**3.** Simular a resposta do controle de potência de uma turbina hidráulica considerando a condição inelástica da tubulação. A função de transferência no plano complexo de Laplace do processo é dada a seguir e nela a designação das variáveis e parâmetros segue a mesma indicação obedecida até aqui neste livro.
Para $T_W = 0{,}8\,s$ calcular a resposta no domínio do tempo e responder se é possível desprezar essa função de transferência na modelagem de um sistema de regulação de velocidade de uma turbina hidráulica.

$$\frac{\Delta p_U(S)}{\Delta y_U(S)} = \frac{1 - T_W\,S}{1 + \frac{1}{2}T_W\,S}$$

**4.** É sempre constatado que, ao se elevar via regulador de velocidade o fluxo de água sobre as palhetas diretrizes de uma turbina do tipo Francis, por exemplo, estando a máquina interligada, ao invés de o sinal da potência ativa elétrica gerada subir ele momentaneamente desce para, somente após um determinado tempo, subir, obedecendo ao pedido solicitado. O mesmo ocorre quando a ordem é oposta, ou seja, para diminuir a potência gerada. Aqui também, ao invés de o sinal da potência ativa elétrica gerada descer ele momentaneamente sobe para, somente após um determinado tempo, descer. Explicar esses fenômenos característicos observados em toda instalação hidráulica durante as operações de tomada e retirada de carga via controle suplementar.

Sugestão: analisar os sinais da potência ativa elétrica e do curso do servomotor principal do regulador de velocidade e compará-los.

**5.** Na obtenção da função de transferência da válvula proporcional, tomando-se como base a equação 3.182 anteriormente deduzida, foi desprezado o efeito da massa do conjunto formado pelo *spool* da válvula. Obteve-se, deste modo, uma função de transferência tal que apresentava a forma de uma equação de primeira ordem no plano complexo de Laplace. Considerando-se, agora, que um determinado fabricante quisesse modificar essa ordem e propusesse confeccionar uma válvula proporcional em que apenas o efeito de mola fosse desprezado e que, além disso, uma realimentação fosse introduzida de maneira que uma função do tipo filtro passa-baixas, com uma constante de tempo de realimentação, fosse introduzida no processo, como seria a função de transferência desse novo sistema?

Sugestão:
Lembrar que o projeto dessa válvula proporcional é baseado num sistema eletrônico-hidráulico em que o sinal de entrada, sinal de erro de freqüência proveniente do regulador de velocidade, em tensão contínua, é aplicado à bobina da válvula que por sua vez movimenta um *spool* cuja posição é lida por um dispositivo tipo LVDT e transferida, mediante a realimentação eletrônica, a uma placa eletrônica que faz a comparação deste sinal com aquele sinal de erro de velocidade referente ao comando inicial. Seguir o esquema da figura 3.70 onde $\Delta v(S)$ é o sinal em tensão contínua disponibilizado a partir do regulador eletrônico de velocidade e $\Delta x(S)$ é o sinal em tensão contínua disponibilizado a partir do LVDT que monitora a posição do *spool* da válvula proporcional. Desprezar a constante de tempo do dispositivo LVDT.

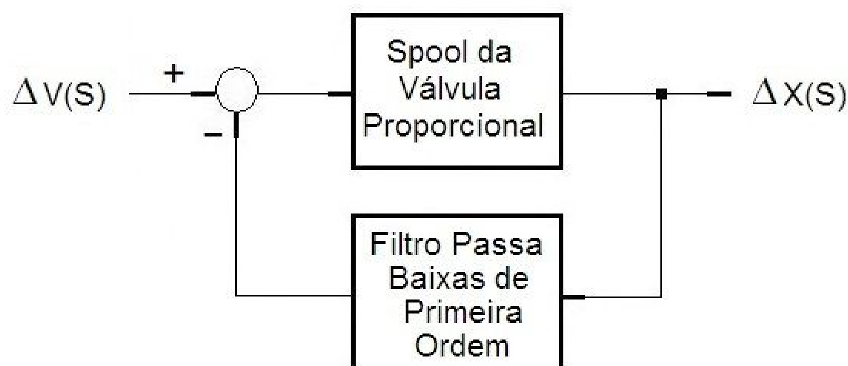



***Figura 3.70 – Esquema da Válvula Proporcional do Exercício Proposto 3.5***

**6.** Considerando-se a questão anterior 3.5 dos exercícios propostos, após a obtenção da função de transferência inerente ao processo, calcular as respostas nos domínios do tempo e da freqüência do sistema. Comparar a resposta de um sistema de segunda ordem com um sistema semelhante de primeira ordem.

Sugestão:
Utilizar como sistema de primeira ordem o mesmo sistema estudado, porém com a realimentação unitária.

**7.** Um grupo regulador de velocidade do tipo mecânico-hidráulico de uma turbina de grande porte foi analisado e decomposto segundo suas partes onde se buscaram agrupar elementos que compunham certas funções próprias.
Obteve-se um diagrama em blocos como aquele que se encontra mostrado na figura 3.71 que deverá ser resumido em um modelo igual àquele que foi exibido na figura 3.63, genérico.
O sistema é do tipo regulador de velocidade com queda transitória de velocidade com as ações do sistema mecânico-hidráulico agrupadas também por funções específicas.
Determinar a função de transferência geral $\Delta y / \Delta \omega$, em por unidade, numa base de valores determinada, evidenciando os principais parâmetros do processo.

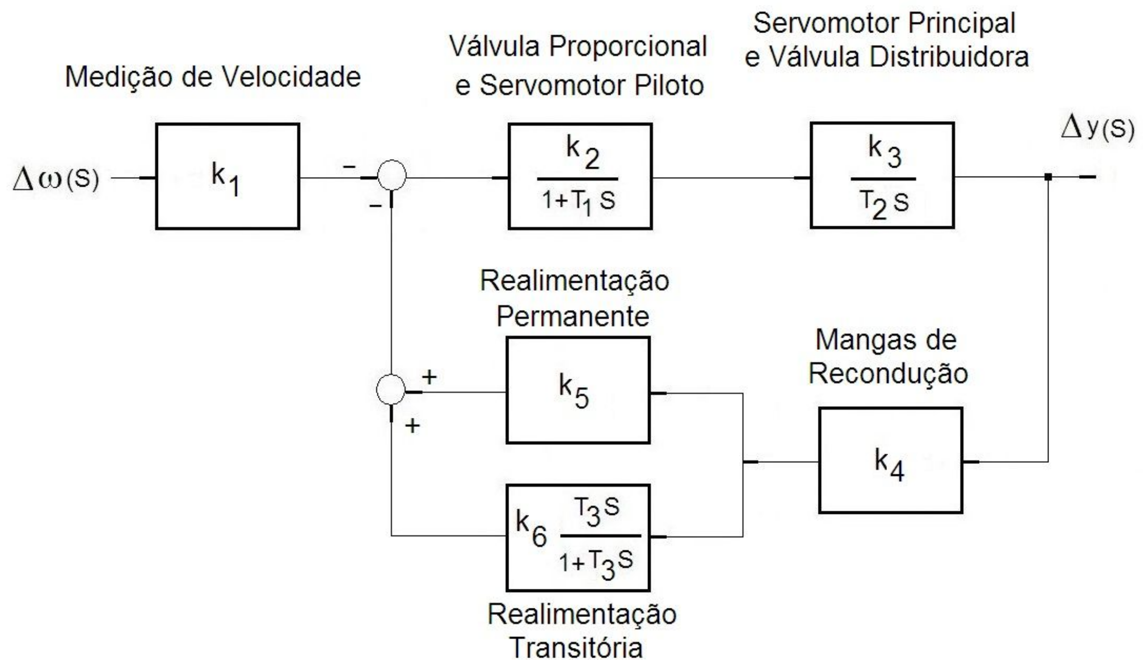



***Figura 3.71 – Esquema de um Regulador de Velocidade Mecânico-Hidráulico***

Na figura 3.71 considerar a seguinte legenda:

$k_1$ : parâmetro de proporcionalidade do circuito de medição de freqüência em *Kgf/Hz*

$k_2$ : ganho da amplificação hidráulica do primeiro estágio em $cm^3/s/Kgf$

$k_3$ :ganho da amplificação hidráulica do segundo estágio em $mm/cm^3/s$

$k_4$ :ganho da recondução mecânica em *mm/mm*

$k_5$ :ganho da realimentação permanente em *Kgf/mm*

$k_6$ :ganho da realimentação transitória em *Kgf/mm*

$T_1$ : constante de tempo de integração da válvula proporcional em *s*

$T_2$ : constante de tempo de integração do servomotor principal em *s*

$T_3$ : constante de tempo da realimentação transitória em *s*

$\Delta\omega(S)$ : variação da freqüência de rotação em *Hz*

$\Delta y(S)$ : variação do curso do servomotor principal em *mm*

*S*: variável complexa de Laplace

**8.** Um determinado SEP é formado por quatro áreas que se encontram sob controle de seus respectivos CAGs. Em determinado período, o seguinte programa de freqüência e intercâmbios de potência foi estabelecido:

a) área A, operação em TLB, freqüência programada *58,00 Hz*, potência programada *250 MW*, com um bias de *25 MW/ 0,1Hz*

b) área B, operação em TLB, freqüência programada $59{,}25\ Hz$, potência programada $250\ MW$, com um bias de $35\ MW/0{,}1Hz$

c) área C, operação em FF, freqüência programada $60{,}00\ Hz$, com um bias de $25\ MW/0{,}1Hz$

d) área D, operação em TLB, freqüência programada $58{,}00\ Hz$, potência programada $350\ MW$, com um bias de $25\ MW/0{,}1Hz$

Determinar quais são os valores de freqüência e potência reais de cada área e a partir daí determinar o intercâmbio final.

**9.** Em uma UHE de grande porte, pertencente ao SIN, houve a necessidade de se saber quais eram os valores dos principais parâmetros do regulador de velocidade de suas máquinas, máquinas iguais. Para tal, foram obtidos dois registros relativos a dois ensaios especiais, executados com uma das máquinas interligada e carregada numa condição próxima de sua plena carga, registros esses que se encontram estampados nas figuras 3.72 e 3.73.
A partir desses registros, e sabendo-se que a amplitude do sinal na forma de degrau aplicado na entrada de medição de velocidade do regulador, no domínio do tempo, já fora obtido através de outro ensaio feito com a máquina em vazio, valor esse correspondente a uma variação de $60\,mHz$ da rotação da máquina em questão, pedem-se os valores dos seguintes parâmetros:

a) queda permanente de velocidade ou estatismo permanente $b_p$

b) queda transitória de velocidade ou estatismo transitório $b_t$

c) constante de tempo do estatismo transitório $T_A$

d) tempo morto de resposta do regulador $T_m$

e) constante de tempo de integração do servomotor principal mais válvula distribuidora $T_y$

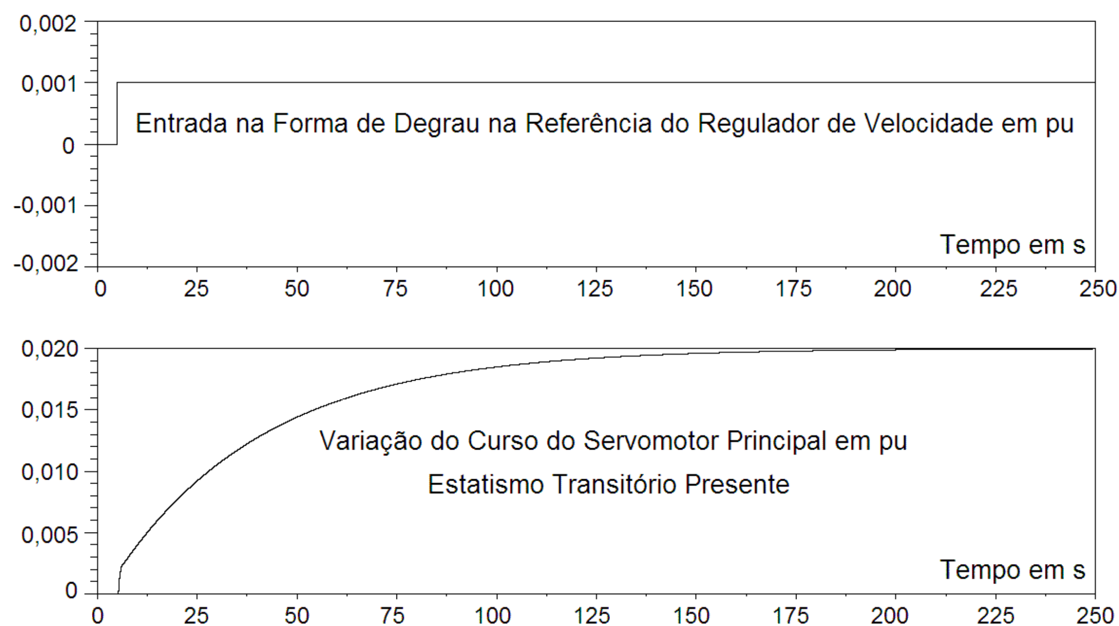



***Figura 3.72 – Resposta do Regulador de Velocidade ao Degrau na Referência com Estatismo Transitório Presente***

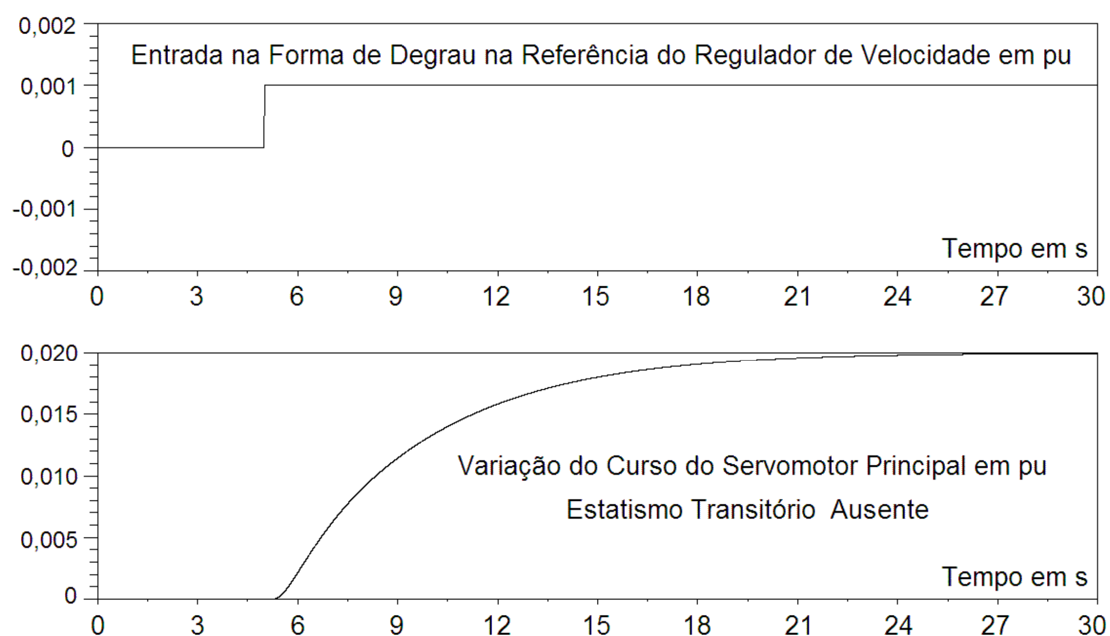



***Figura 3.73 – Resposta do Regulador de Velocidade ao Degrau na Referência com Estatismo Transitório Inibido***

**10.** Durante a etapa de comissionamento de um grupo turbina-gerador de uma instalação hidrelétrica foi realizado um ensaio de rejeição de carga de $350.355,0\ kW$ , um valor bem próximo da potência nominal do gerador, para, além de outas medições, obter os dados necessários visando à medida dos parâmetros constante de inércia e momento de inércia do conjunto girante.
Do registro da rotação *versus* tempo, obteve-se a taxa de variação de $\frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t} = 13,07\ rpm/s$ .
Sabendo-se que, de outros ensaios, as seguintes perdas do gerador foram obtidas, calcular os parâmetros: constante de inércia em $s$ e momento de inércia do conjunto girante em $Tm^2$:

a) perdas térmicas no cobre durante o carregamento nominal : $485,0\ kW$
b) perdas térmicas no ferro durante o carregamento nominal : $276,07\ kW$

**11.** Se por algum motivo, em uma determinada máquina de uma UHE de grande porte pertencente ao SIN, ocorrer uma falha no circuito de medição de freqüência que é utilizado pelo regulador de velocidade para o controle e o sinal de saída do bloco correspondente à medição de velocidade desaparecer, estando a máquina interligada e operando com carga nominal, o que ocorrerá? Por quê?

**Nota:** na terminologia técnica dos processos de manutenção das empresas concessionárias de energia no Brasil, existe uma diferença entre os termos falha e defeito. Por definição, nesses processos, chama-se defeito uma restrição de caráter transitório na qual um determinado sistema ou equipamento fica sujeito temporariamente e que não o impede de operar, mesmo que parte de suas funções estejam inoperantes. A situação tem caráter de urgência.
Chama-se falha uma restrição de caráter permanente na qual um determinado sistema ou equipamento fica sujeito caracterizando a perda total de suas funções por qualquer razão. A situação tem caráter de emergência.

**12.** Uma instalação hidrelétrica de geração, uma unidade de produção, possui 6 máquinas geradoras. Uma das máquinas vinha apresentando um comportamento anormal intermitente. A partir de certa época, a máquina 4 começou a receber comandos de trip por ação da proteção *32*, ou seja, relé de proteção contra potência inversa.
Havia uma suspeita de que o problema era no regulador de velocidade, pois a máquina começava a perder geração muito lentamente, sem qualquer interveniência humana ou de comando automático, num período de aproximadamente *5* horas. A geração chegava a ser zerada e a máquina acabava se motorizando.
Sabendo-se que se trata de um regulador de velocidade do tipo eletrônico-hidráulico, onde os comandos até a válvula proporcional são elétricos, que ensaios deveriam ser realizados no regulador de velocidade dessa máquina que poderiam detectar um possível problema nesse equipamento?
Descrever os ensaios e o tipo de instrumentos a serem utilizados.

**Nota:** este foi um problema real ocorrido numa grande instalação e estava mesmo localizado no regulador de velocidade.

**13.** Considerando-se que, um gerador síncrono de uma unidade de produção, operando interligado ao SIN, transferindo sua potência nominal, no horário de ponta do sistema, venha a ter, momentaneamente, o bloco referente à queda transitória de velocidade ou estatismo transitório de seu regulador de velocidade desligado, o que ocorreria?

**14.** O diagrama em blocos do sistema representado na figura 3.74 representa um regulador de velocidade do tipo com queda transitória de velocidade ou estatismo transitório, porém com um bloco extra chamado de bloco acelero-tacométrico. Esse regulador também é conhecido como regulador de velocidade acelero-tacométrico, ou seja, a entrada do regulador é a soma dos sinais de velocidade do grupo e da aceleração freqüencimétrica do grupo.
Estudar os efeitos da presença do bloco acelero-tacométrico sobre o sistema regulador de velocidade da figura dada apontando suas vantagens e desvantagens se houver tais vantagens ou desvantagens.

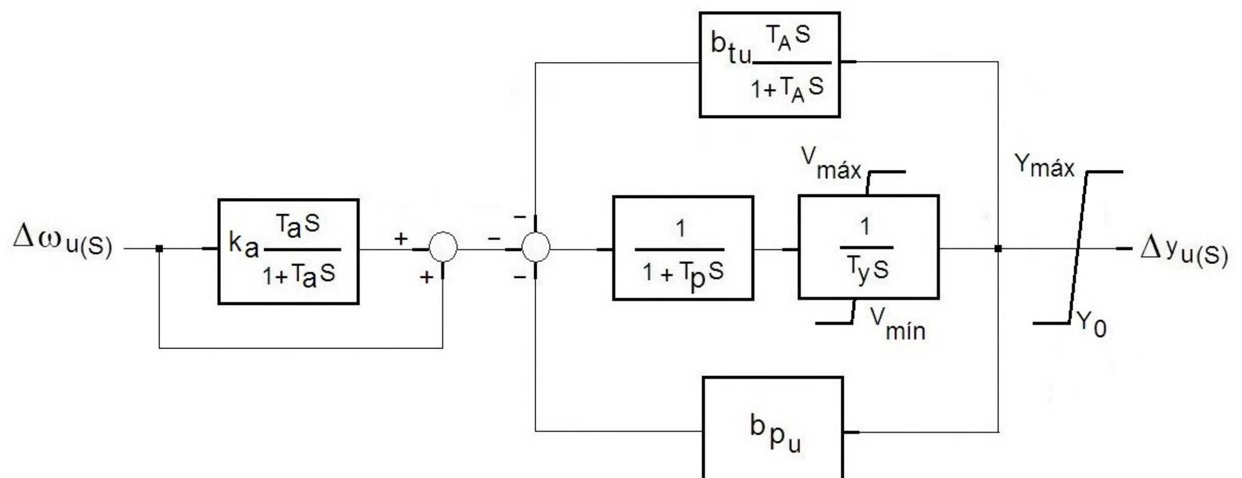



***Figura 3.74 – Diagrama em Blocos do Regulador de Velocidade Tipo Acelero-Tacométrico***

Na figura 3.74 considerar as mesmas indicações que foram utilizadas nos diagramas em blocos das figuras anteriores de mesma semelhança além da seguinte legenda:

$k_a$ : constante de proporcionalidade do circuito acelero - tacométrico

$T_a$ : constante de tempo do circuito acelero - tacométrico

**15.** O levantamento de campo de um regulador de velocidade culminou com a seguinte função de transferência em pu numa base de valores escolhida previamente:

$$\frac{\Delta y_u}{\Delta \omega_u} = -20 \frac{(1+5S)}{(1+35S)(1+0{,}57S)}$$

Pede-se calcular a resposta analítica no domínio do tempo e a resposta em freqüência com os gráficos do plano de Bode de ganho e fase.

**16.** Um gerador de uma UHE de potência $100\,MW$, trabalhando isolado, está alimentando um conjunto de cargas de $50\,MW$. Sabendo-se que o regulador de velocidade tem estatismo permanente de $0{,}045\,pu$, na capacidade da máquina, encontrar o valor final da freqüência elétrica se houver o desligamento de $15\,MW$ da carga. E se um relé *load shedding* atuar cortando $10\,MW$ de carga qual será o novo valor final da freqüência?

**17.** Uma instalação hidrelétrica deve ter seu sistema gerador diesel de emergência composto por dois geradores síncronos e, por exigência de seus proprietários, um deles deverá ficar instalado na casa de força da usina enquanto o outro deverá ser instalado na casa de força da subestação. Sabe-se que cada um dos geradores diesel deverá ter uma potência nominal de $500\,MVA$ e ser instalado na rede auxiliar de $440\,VCA$ dessa instalação que, normalmente, é alimentada através dos próprios geradores principais da instalação. Pergunta-se como deveria ser a interligação do sistema diesel de emergência dessa instalação com o sistema auxiliar da usina.

Sugestão: deve-se lembrar que a função do sistema gerador diesel de emergência de uma instalação elétrica é prover uma fonte independente de energia que possa alimentar algumas cargas essenciais para o restabelecimento da instalação durante uma situação emergencial tal como um *blackout*, por exemplo.

**18.** Um gerador trifásico de $350\,MVA$, tensão entre fases de $16{,}5\,kV$, de uma instalação hidrelétrica acabara de ser interligado ao SIN, através de seu disjuntor de alta tensão, quando houve um religamento automático satisfatório em uma LT da rede básica na SE elevadora dessa instalação. Sabendo-se que o RA da LT encontra-se ajustado para um tempo máximo de $1{,}2\,s$, e que a potência entregue na barra da SE, pela LT, era de $35\,MW$, determinar o valor em *Hertz* da freqüência natural amortecida do sistema nas condições apresentadas e o valor da potência ativa elétrica máxima, em $MW$, atingida durante a ocorrência.
Considerar que o gerador em questão seja uma máquina síncrona de pólos lisos cuja constante de inércia é $11{,}45\,s$, na base de $350\,MW$, e que os reguladores de velocidade e de tensão estejam tão bem ajustados que, no instante do processo de sincronização, as tensões e as rotações nas barras *incoming* e *running* eram de $1\,pu$.
A reatância síncrona da máquina vale $16\,ohm$ e a reatância do transformador elevador vale $2\,ohm$.

Considerar que o transformador elevador dessa máquina tenha uma potência nominal de $350\,MVA$ e possua uma relação de transformação de $16{,}5 - 500\,kV$ .

# CAPÍTULO 4

# A MÁQUINA SÍNCRONA

## 4.1. Geral

Este capítulo tem por finalidade apresentar uma pequena análise introdutória relativa à operação da máquina síncrona nas condições de gerador síncrono e de motor síncrono, situações operativas verificadas com as máquinas síncronas do SIN.
A análise se fará nos níveis de regimes permanente e transitório de modo a permitir uma melhor compreensão sobre o comportamento operativo da máquina síncrona.
Para facilitar o estudo, nesse item, optou-se por executar uma breve análise através de diagramas vetoriais e curvas de capacidade que são largamente utilizados.
A justificativa para a utilização das máquinas síncronas, principalmente como geradores, vem ligada ao fato de estas máquinas apresentarem certas particularidades necessárias ao perfeito controle operativo do sistema interligado síncrono.
As máquinas síncronas, basicamente, compõem o parque gerador do SIN juntamente com os transformadores, as LTs e as LTs. A importância do estudo dessas máquinas elétricas tem tudo a ver com a manutenção da condição operativa do SEP onde dois parâmetros são muito importantes, a confiabilidade e a estabilidade. Para o desenvolvimento dos estudos é requerida a utilização de uma ferramenta poderosa, a modelagem a partir do equacionamento matemático do processo envolvido.
As máquinas síncronas, na condição operativa de gerador síncrono, constituem aquilo que mais se vê no parque elétrico nacional sendo que em determinados casos a condição operativa motor síncrono em vazio também é verificada. Como motor síncrono, o que se pode constatar são máquinas operando em vazio na função de regulação da potência reativa e da tensão da rede.
Em termos construtivos, destacam-se as máquinas síncronas de pólos lisos e as máquinas síncronas de pólos salientes. Nas primeiras não se consegue separar o que é o eixo direto relativo ao pólo da máquina do que é o eixo em quadratura relativo ao espaço destinado entre os pólos, enquanto que nas máquinas de pólos salientes esta distinção é notória.
Geralmente, por construção e características próprias, nas máquinas movidas a turbinas hidráulicas verificam-se coroas de pólos salientes enquanto que nas máquinas movidas a turbinas térmicas verificam-se coroas de pólos lisos. As máquinas de pólos lisos geralmente são máquinas de alta rotação enquanto que as máquinas de pólos salientes são de baixa rotação.

## 4.2. A Máquina Síncrona

Ao se iniciar o estudo relativo à máquina síncrona, propriamente dita, pode-se apresentar uma comparação direta entre as máquinas síncronas e outras máquinas rotativas.

Com relação às máquinas assíncronas ou máquinas de indução, outro tipo físico de máquina elétrica, pode-se afirmar que:

a) como as máquinas assíncronas trabalham com escorregamento entre rotação do fluxo magnético e rotação mecânica, os controles de freqüência e tensão, em relação à operação isolada com geradores de indução, tornam-se impraticáveis;

b) as máquinas síncronas, quando operam como gerador, fornecem, ao mesmo tempo, potência ativa e potência reativa, já o gerador assíncrono fornece apenas potência ativa, continuando como no motor assíncrono, a consumir potência reativa;

c) um gerador assíncrono consome em média, por característica, uma potência externa de aproximadamente $40\%$ de sua potência nominal no processo de excitação o que inviabilizaria sua utilização já que o processo de excitação de um gerador síncrono exige apenas uma potência da ordem de $1\%$ de sua potência nominal;

d) a operação de motores assíncronos de grande porte, interconectados ao sistema síncrono interligado, é limitada uma vez que para esta operação o consumo de reativo será dispendioso exigindo a instalação de dispositivos compensadores.

A máquina síncrona pode ser representada, esquematicamente, pela figura 4.1 seguinte.

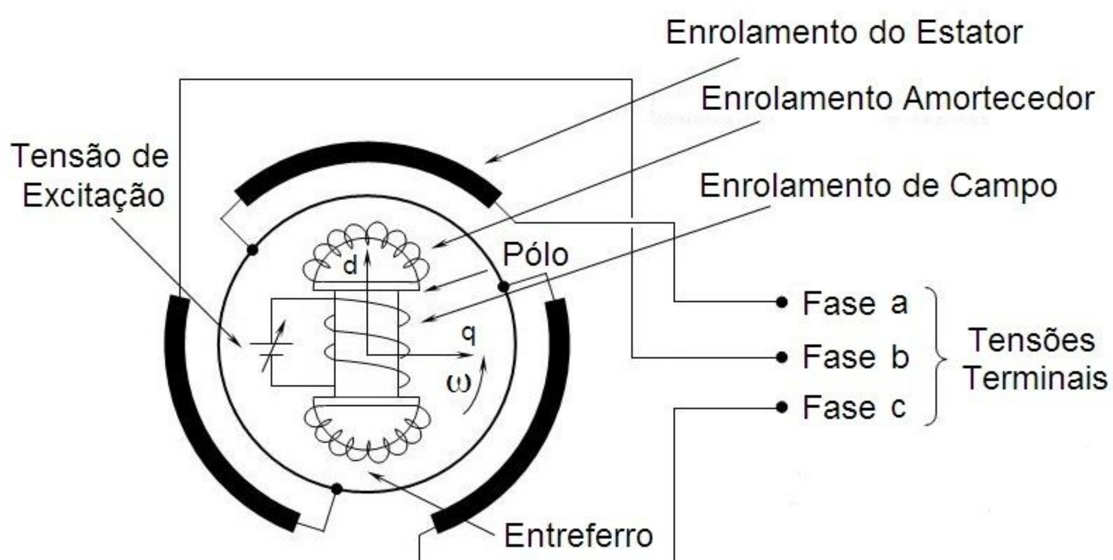


***Figura 4.1 – Esquema Básico de uma Máquina Síncrona com um Par de pólos e Ligação do Estator em Estrela***

Pode-se notar pela figura 4.1 que existem dois eixos, um na direção do pólo e outro em quadratura com este. O eixo na direção do pólo é chamado de eixo direto ou apenas $d$, enquanto o outro é chamado de eixo em quadratura ou apenas $q$. Apenas lembrando que nesse caso, por questões didáticas, o estator se refere à parte fixa da máquina e o rotor à parte que se move com velocidade $\omega$ em relação ao estator.
Observar que este sistema de eixos $d-q$, idealizado, gira na mesma rotação do rotor, ou seja, com velocidade $\omega$.
Como o torque mecânico é transferido através da rotação do rotor via eixo de acoplamento rotor/fonte de energia primária, quando em gerador síncrono, ou via eixo de acoplamento rotor/carga mecânica, quando em motor síncrono, existe um sincronismo entre o campo magnético de excitação e o torque mecânico que é desenvolvido neste eixo de acoplamento, ou seja, ambos deverão girar na mesma velocidade, portanto sincronizados. Esta é a razão da máquina se chamar máquina síncrona.
Nota-se, também, que o sistema de eixos $d-q$ gira sincronizado na freqüência de rotação do conjunto girante uma vez que se trata de eixos fictícios idealizados sobre o rotor da máquina. A idealização desse sistema de eixos vem ligada às facilidades de análise quando todas as grandezas, mesmo aquelas localizadas no estator, são referidas ao rotor, portanto aos eixos $d-q$.
Estas transformações são clássicas no estudo da máquina síncrona e são conhecidas originalmente como transformações de Blondel, primeiro estudioso que as idealizou. Logo após, Park, Doherty, Nickle, entre outros estudiosos, apresentaram trabalhos nesta área. Nesse livro essas transformações serão chamadas apenas de transformações $d-q-0$.
O estudo da máquina síncrona, considerando-se as transformações de Blondel, será então desenvolvido de maneira fundamentada uma vez que sem esse conceito é difícil compreender perfeitamente o processo de regulação de tensão da máquina síncrona.
Segue a descrição das principais partes componentes de uma máquina síncrona de maneira sucinta.

## Rotor

Sobre o rotor vem montado todo o sistema polar constituindo a parte girante eletromagnética e eixo de acoplamento, a saber:

a) **eixo de acoplamento da máquina**

Refere-se ao eixo rotor/fonte de energia primária, quando se trata de gerador; ou ao eixo rotor/carga mecânica quando se trata de motor. É o eixo de transmissão do torque mecânico e pode ser horizontal ou vertical.

b) **núcleo magnético**

Constituído de chapas laminadas dispostas e presas através de tirantes que sustentam os pólos. São suportadas pelo cubo e pela aranha do rotor formando a chamada coroa polar ou anel magnético.
A chaparia é constituída de aço silicioso, ou seja, uma liga de aço com silício que apresenta alta permeabilidade magnética e baixas perdas.
Nas máquinas de grande porte, mesmo quando a roda polar não seja laminada, as cabeças dos pólos deverão o ser evitando, com isto, o indesejável efeito de vibração introduzido nos dentes do estator pela variação do fluxo de excitação durante o ciclo operativo.
Este núcleo comporta os caminhos do fluxo magnético de excitação que é originário nos pólos e que propiciará o efeito eletromagnético de interação entre campo e estator responsável pela conversão eletromecânica da energia. Preso à roda polar, em sua parte periférica, encontram-se dispostos os pólos que contém os enrolamentos de campo responsáveis pela criação do fluxo magnético.

c) **enrolamento amortecedor**

Constituído por espiras, em forma de barras, dispostas radialmente às cabeças dos pólos e afixadas sobre estes no espaço do entreferro.
Este enrolamento auxiliar cumpre a função de reforçar, mecanicamente, as cabeças dos pólos, além de ser um elemento criador de um torque frenante auxiliar, de efeito estabilizante, quando da ocorrência de distúrbios que venham a provocar perda de sincronismo da máquina síncrona operando como gerador.
Na operação como motor síncrono o enrolamento amortecedor tem também a função de criar o toque de partida inicial.

d) **anéis coletores**

Fazem a comunicação elétrica entre o enrolamento de campo formado pelo conjunto das bobinas polares da máquina síncrona e o sistema de controle da excitação cujos dispositivos se encontram localizados externamente à máquina.
Os anéis são afixados sobre o rotor, em uma de suas extremidades, sendo confeccionados de latão, de cobre ou alguma liga ferrosa, formando pistas sobre as quais patinam escovas que são confeccionadas de carvão, associado ao cobre, elementos que promovem o contato elétrico. Consiste no dispositivo que coloca em contato as partes fixas e móveis da máquina síncrona.

e) **ventiladores e guias de ar**

Montados sobre os acessórios mecânicos do rotor, esses dispositivos têm como principal função promover a ventilação forçada da máquina através de dutos de ar existentes dentro da chaparia da máquina síncrona, tanto do rotor quanto de estator.

## Mancais de Guia, de Escora e de Encosto

Constituem os suportes mecânicos básicos da máquina sendo que a confecção destes dispositivos depende da posição do eixo de acoplamento entre a turbina e o gerador, ou seja, entre as partes mecânica e elétrica do conjunto. Observa-se o eixo na posição vertical nas máquinas de grande porte enquanto que nas máquinas de pequeno porte observa-se o eixo na posição horizontal.
Nas máquinas síncronas destacam-se mancais de guia, mancais de escora e mancais guia-escora combinados principalmente nas grandes unidades de eixo vertical, enquanto que nas pequenas unidades de eixo horizontal, além dos mancais citados, encontram-se os mancais de encosto. Os mancais, usualmente, são constituídos de metal patente, geralmente do tipo composto de sapatas, formados através de diferentes ligas a partir de elementos químicos tais como estanho, chumbo, antimônio e cobre, entre outros, sendo o conjunto lubrificado a graxa ou a óleo sob pressão.

## Enrolamento de Campo

O enrolamento de campo que envolve cada pólo  cumpre o papel de, a partir de uma fonte de corrente contínua, que pode ser externa ou auto-alimentada, produzir o campo magnético indutor responsável pela excitação da máquina síncrona.
Em uma máquina síncrona com um par de pólos, por exemplo, nota-se que o fluxo magnético gerado em um dos lados do eixo polar é norte enquanto que do lado oposto, o fluxo magnético gerado é sul. Em outras palavras, trata-se de um grande eletroímã. O enrolamento em si é constituído por espiras na forma de barras de cobre eletrolítico numa disposição retangular que envolve cada pólo  de modo concentrado.

## Estator

O estator da máquina síncrona, na sua forma padrão, constitui a parte estática que é varrida pelo fluxo magnético contínuo gerado no rotor. É formado pela carcaça, pelo núcleo magnético e pelos enrolamentos de fase da máquina.
O núcleo do estator, semelhantemente ao núcleo do rotor, é confeccionado de chapas de aço silicioso, ou seja, uma liga de aço com silício que apresenta alta permeabilidade magnética e baixas perdas, isoladas umas das outras e montadas segundo um alinhamento definido previamente através de pinos guia e presas por tirantes. O conjunto é chumbado na estrutura civil da instalação hidrelétrica.
O enrolamento do estator é constituído de bobinas cujos condutores encontram-se alojados em ranhuras na sua parte interna. A estrutura final do

anel magnético do estator termina em uma armação circular tendo na sua parte externa a carcaça e os trocadores de calor e em sua parte interna uma superfície dentada com as ranhuras que comportarão as bobinas. O estator da máquina síncrona também é conhecido como armadura da máquina.

**Sistema de Excitação**

Este sistema é responsável pela produção do fluxo magnético indutor a partir de uma fonte de corrente contínua podendo ser externa ou auto-alimentada que, no caso de grandes máquinas, se constitui de um controlador automatizado e que em pequenas máquinas pode ser composto de um sistema reostático controlado manualmente. Nas grandes instalações, esse sistema torna-se complexo e cumpre importantes ações que se refletem na própria estabilidade do SEP.
A tensão de corrente contínua de alimentação é levada ao enrolamento de campo através de escovas que se encontram em contato permanente com os anéis coletores.
Além daquilo que foi descrito até aqui, é importante lembrar que as máquinas síncronas se diferem quanto à construção do rotor e, por conseguinte, do enrolamento de campo.

## 4.3. Análise Preliminar da Máquina Síncrona por Diagramas

### 4.3.1. Introdução

Como mencionado anteriormente, a aplicação do sistema de eixos $d-q$ vem associada ao fato de se poder introduzir uma série de facilidades quando da análise do comportamento operativo da máquina síncrona. Nesses termos, o que se obtém é um retrato daquilo que se pode esperar quanto a limites operativos, condições especiais e mesmo orientação ao pessoal da equipe de operadores da máquina.
Neste particular, serão abordados os aspectos operativos obtidos a partir do traçado do diagrama vetorial sob regime permanente e do traçado da carta de capacidade, este último documento de extrema importância para a operação normal da máquina síncrona por se envolver com a estabilidade e com os chamados limites térmicos da máquina elétrica.

### 4.3.2. Diagrama Vetorial de uma Máquina Síncrona sob Regime Permanente

Como se sabe, a análise vetorial implica na utilização de certas entidades matemáticas chamadas de vetor. Para o desenvolvimento da teoria de máquina síncrona, por diagramas vetoriais, é importante saber que uma grandeza vetorial trata-se de uma grandeza física que para ficar bem acomodada necessita de três identificações básicas, quais sejam, o módulo, a direção e o

sentido. E para que essas três identificações fiquem bem estabelecidas é também necessária a definição de uma referência. Como o vetor é uma entidade cujo lugar geométrico é uma circunferência, adotou-se, por conveniência, salvo o contrário, o sentido anti-horário como o sentido positivo de contagem do movimento angular, assim como se tomou como positivo o sentido dos eixos localizados no primeiro quadrante do sistema de eixos cartesianos para a contagem de coordenadas.

A idéia de vetor se confunde com a idéia de fasor que implica na representação de uma grandeza instantânea e harmônica, por exemplo, cujo valor eficaz é tomado como módulo do vetor correspondente e cujo argumento varia no domínio do tempo segundo uma velocidade angular periódica.

Na construção do diagrama da máquina síncrona serão observadas as condições operativas relativas ao trabalho da máquina como motor e como gerador.

Imaginando uma máquina síncrona de pólos salientes operando como gerador síncrono, tem-se o seguinte diagrama cujas grandezas encontram-se representando a fase $a$ do estator e os eixos $d-q$ do rotor. Normalmente, a análise das grandezas é promovida referenciando-as ao estator da máquina.

O diagrama vetorial esboçado na figura 4.2 já é o produto final da aplicação da chamada transformação $d-q-0$ com referência aos eixos $d-q$. Considerando o gerador síncrono, observa-se, do diagrama, que a carga do gerador cria uma reação provocando um efeito de distorção no fluxo $\lambda_F$, do campo, fazendo com que este mesmo fluxo seja reduzido resultando num fluxo $\lambda_R$ atrasado e de menor magnitude em relação ao primeiro.

Com relação ao sentido anti-horário de rotação do campo, pode-se facilmente perceber que o pólo arrasta o fluxo resultante $\lambda_R$, operação como gerador. Outra importante observação, quanto à condição operativa do gerador síncrono representado no diagrama da figura 4.2, se refere à relação onde $\left|\dot{E}_q\right| > \left|\dot{V}_a\right|$, o que significa estar o gerador na condição de sobrexcitação. Neste caso notar que a corrente de estator da máquina, vetor $I_a$, encontra-se atrasada com relação à tensão terminal, vetor $V_a$, fato que garante ao gerador, sob tais condições, operar cedendo energia reativa indutiva ao sistema sob o qual está conectado. Como houve uma redução no fluxo principal de campo, $\left|\dot{\lambda}_R\right| < \left|\dot{\lambda}_F\right|$, diz-se que a reação do estator do estator é desmagnetizante.

**Notas:**

a) A sinalização de uma variável com um ponto em cima denota grandeza vetorial ou fasorial na forma complexa polar semelhante a seguinte amostra $\dot{E}_q = \left|\dot{E}_q\right| e^{j\theta}$, onde $\left|\dot{E}_q\right|$, trata-se do módulo, e $\theta$, trata-se do ângulo, geralmente obedecendo a condição $\theta = \omega t$, sendo $\omega$ a velocidade angular e $t$ a variável independente tempo.

b) A transformação a ser adotada nesse livro, referente à geração do sistema de eixos $d-q$ que gira sincronizado na freqüência de rotação do conjunto

girante, não se trata da transformação original adotada por Blondel, mas sim uma transformação um pouco modificada, tema que será abordado mais à frente.




***Figura 4.2 – Diagrama Vetorial de um Gerador Síncrono de Pólos Salientes Desprezadas as Resistências Internas para a Condição Gerador Sobrexcitado Fase A***

Na figura 4.2 considerar a seguinte legenda:

$E_a$ : vetor fem da máquina síncrona na fase a

$V_a$ : vetor tensão terminal da máquina na fase a

$I_a$ : vetor corrente de estator da máquina na fase a

$I_d$ : vetor corrente de estator da máquina relativa ao eixo d

$I_q$ : vetor corrente de estator da máquina relativa ao eixo q

$E_q$ : vetor fem da máquina relativa à operação a vazio

$x_d$ : reatância da máquina relativa ao eixo d

$x_q$ : reatância da máquina relativa ao eixo q

$\lambda_F$ : vetor fluxo enlaçado indutor do campo da máquina

$\lambda_d$ : vetor fluxo enlaçado de reação da armadura de eixo d

$\lambda_q$ : vetor fluxo enlaçado de reação da armadura de eixo q

$\lambda_R$ : vetor fluxo enlaçado resultante

$\theta$ : ângulo elétrico entre o eixo d e a referência

$\delta$ : ângulo elétrico de transferência de potência

$\omega$ : velocidade angular de rotação

O contrário seria imaginar a operação do mesmo gerador síncrono na condição de subexcitação, ou seja, $\left|\dot{E}_q\right| < \left|\dot{V}_a\right|$.

Nestes termos, o diagrama vetorial da máquina síncrona ficaria conforme está estampado na figura 4.3.

Na figura 4.3 considerar a mesma identificação de grandezas verificada para a figura 4.2.

Considerando-se o gerador síncrono subexcitado, uma inspeção ao diagrama vetorial da figura 4.3 mostra importantes conclusões.

Com relação ao sentido anti-horário de rotação do campo, pode-se perceber que o pólo continua arrastando o fluxo resultante $\lambda_R$ caracterizando a operação da máquina como gerador.

A condição de subexcitação do gerador é confirmada, pois a inequação $\left|\dot{E}_q\right| < \left|\dot{V}_a\right|$ é verificada.

Pelo diagrama vetorial da figura 4.3 nota-se, também, que a corrente de estator da máquina, vetor $I_a$, encontra-se adiantada com relação à tensão terminal, vetor $V_a$, caracterizando alimentação de uma carga capacitiva, razão pela qual a reação do estator apresenta uma natureza magnetizante.

Conclui-se que um gerador síncrono, operando interligado a um determinado sistema, sempre fornecerá potência ativa enquanto que a potência reativa será fornecida obedecendo-se o seguinte critério: será fornecida potência reativa indutiva sempre que o gerador trabalhar sobrexcitado ao passo que será fornecida potência reativa capacitiva quando o gerador trabalhar subexcitado.

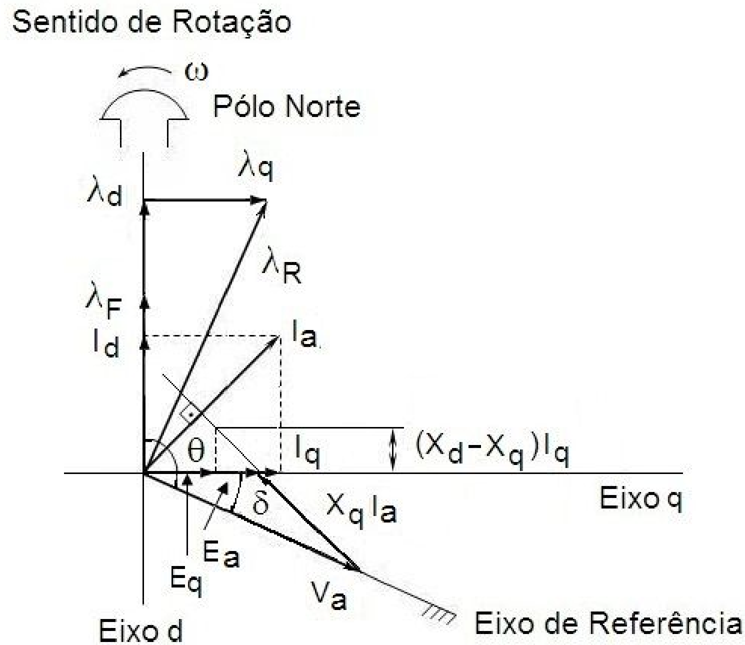



***Figura 4.3 – Diagrama Vetorial de um Gerador Síncrono de Pólos Salientes Desprezadas as Resistências Internas para a Condição Gerador Subexcitado Fase A***

Imaginando agora uma máquina síncrona de pólos salientes operando como motor. Para tal, tem-se o diagrama vetorial representado na figura 4.4

Na figura 4.4 considerar a mesma identificação das grandezas verificada para a figura 4.2.

Considerando o motor síncrono sobrexcitado, a inspeção ao diagrama vetorial da figura 4.4 permite que se tirem importantes conclusões.

Na operação como motor o fluxo enlaçado resultante $\lambda_R$, com relação ao sentido anti-horário de rotação do campo, arrasta o pólo da máquina, pois o vetor $\lambda_R$ encontra-se adiantado do vetor de fluxo principal $\lambda_F$.

A condição de sobrexcitação, também, é verificada visto que é satisfeita a relação $\left|-\dot{E}_q\right| > \left|\dot{V}_a\right|$.

Nota-se, também, que o vetor corrente de estator $I_a$ encontra-se adiantado em relação ao vetor tensão terminal da máquina, $V_a$, fato que confirma a condição de operação do motor como uma carga capacitiva.

Nas condições prévias estabelecidas para o motor síncrono, conclui-se que a reação do enrolamento do estator é de natureza desmagnetizante.

***Figura 4.4 – Diagrama Vetorial de um Motor Síncrono de Pólos Salientes Desprezadas as Resistências Internas para a Condição Motor Sobrexcitado Fase A***

O contrário da condição anterior seria imaginar a operação do mesmo motor síncrono na condição de subexcitação, ou seja, $\left|-\dot{E}_q\right| < \left|\dot{V}_a\right|$.

Nestes termos o diagrama vetorial da máquina síncrona ficaria como na figura 4.5.

Na figura 4.5 considerar a mesma identificação de grandezas verificada na figura 4.2.

Considerando-se o motor síncrono subexcitado, uma inspeção ao diagrama vetorial da figura 4.5 mostra importantes conclusões.

Com relação ao sentido anti-horário de rotação do campo, pode-se perceber que o fluxo resultante $\lambda_R$ continua arrastando o pólo, caracterizando a operação máquina como motor.

A condição de subexcitação também é verificada visto que é satisfeita a relação $\left|-\dot{E}_q\right| < \left|\dot{V}_a\right|$.

Nota-se, também, que o vetor corrente de estator $I_a$ encontra-se atrasado em relação ao vetor tensão terminal da máquina, $V_a$, fato que garante a condição de operação do motor como uma carga indutiva.

Nas condições prévias estabelecidas para o motor síncrono, conclui-se que a reação do enrolamento do estator é de natureza magnetizante.

*Figura 4.5 – Diagrama Vetorial de um Motor Síncrono de Pólos Salientes Desprezadas as Resistências Internas para a Condição Motor Subexcitado Fase A*

Conclui-se que um motor síncrono, operando interligado a um determinado sistema, se apresentará como uma carga capacitiva quando estiver sobrexcitado, e se apresentará como uma carga indutiva quando estiver subexcitado.

**Nota:** é interessante observar a diferença física entre as representações do diagrama vetorial para as condições operativas de gerador síncrono e motor síncrono. No primeiro caso, percebe-se que o vetor representativo do fluxo resultante da ação da reação da armadura contra o fluxo de excitação do campo encontra-se atrasado em relação à flecha do eixo *d* do pólo. Neste caso é fácil constatar que a parte mecânica da máquina, o pólo no caso, arrasta o fluxo magnético. Já no último caso, percebe-se que o vetor representativo do fluxo resultante da ação da reação da armadura contra o fluxo de excitação do campo encontra-se adiantado em relação à flecha do eixo *d* do pólo. Neste caso também é fácil constatar que a parte magnética da máquina é que arrasta a parte mecânica, no caso o pólo.

## 4.3.3. Carta de Capacidade de uma Máquina Síncrona

A carta de capacidade de uma máquina síncrona é um diagrama que visa mostrar os limites operativos da máquina quando em regime continuo de trabalho.
O desenvolvimento teórico da carta de capacidade baseia-se no diagrama vetorial de regime permanente, mostrado na figura 4.7, que por sua vez é

obtido a partir das chamadas transformações $d - q - 0$ a serem estudadas mais à frente.
Para o desenvolvimento da carta de capacidade será tomada como base uma máquina síncrona operando na condição de gerador sobrexcitado, tendo as resistências internas dos enrolamentos e o efeito de saturação magnética dos núcleos de ferro desprezados.
O diagrama vetorial da máquina, em regime permanente, terá o esboço básico conforme está mostrado na figura 4.6 retirado do diagrama vetorial da máquina síncrona que se encontra representado na figura 4.7 de maneira completa. Na figura 4.6, as quedas de tensão estão apresentadas divididas pela reatância síncrona de eixo em quadratura $x_d$ .

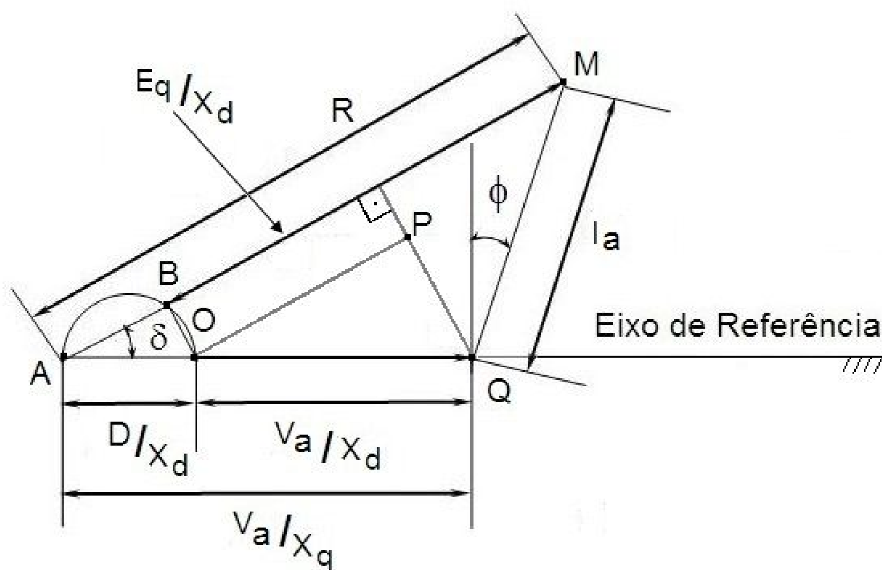



***Figura 4.6 – Diagrama Vetorial Básico de um Gerador Síncrono***

Nas figuras 4.6 e 4.7 considerar a mesma legenda adotada para a figura 4.2 além dos seguintes parâmetros:

$\phi$ : ângulo de carga relativo ao conhecido cos phi

$D$ : vetor auxiliar relativo ao círculo de mínima excitação da máquina síncrona

Notar que o diagrama vetorial da figura 4.7 se refere a uma máquina síncrona de pólos salientes o que significa que os caminhos para o fluxo magnético indutor nos eixos $d$ e $q$ não apresentam as mesmas características relativas à permeabilidade magnética. O caminho associado ao eixo $d$ é promovido através do ferro enquanto que o caminho associado ao eixo $q$ se dá pelo ar.

Por inspeção ao diagrama vetorial da figura 4.6, pode-se criar a seguinte equação:

$$r = L + E_q \quad (4.1)$$

sendo $R = \frac{r}{x_d}$ um vetor auxiliar para futuros cálculos

Do mesmo modo, pode-se criar também outro vetor auxiliar a partir do diagrama vetorial da figura 4.6 conforme é mostrado na equação seguinte:

$$\vec{AB} = \vec{AO} \cos\delta \quad \therefore \quad \frac{L}{x_d} = \frac{D}{x_d} \cos\delta \quad \therefore \quad L = D \cos\delta \tag{4.2}$$

A equação 4.1 representa a equação de excitação da máquina síncrona, ou seja, trata-se da equação que resume a lei de existência do fluxo indutor necessário à máquina para que esta opere nas condições definidas no diagrama da figura 4.7.

No diagrama da figura 4.7, nota-se que o triângulo ABO é semelhante ao triângulo OPQ de onde se extrai a relação seguinte:

$$\frac{|\vec{AO}|}{|\vec{OQ}|} = \frac{|\vec{OB}|}{|\vec{QP}|} \tag{4.3}$$

ou

$$\frac{D}{V_a} = \frac{(x_d - x_q)I_q}{x_q I_q} = \frac{x_d - x_q}{x_q} \tag{4.4}$$

Obtendo o valor de $D$, da equação 4.4, e levando-o na equação 4.2, tem-se que:

$$L = \frac{x_d - x_q}{x_q} V_A \cos\delta \tag{4.5}$$

Levando o valor obtido para $L$, da equação 4.5, na equação 4.1, tem-se:

$$r = \frac{x_d - x_q}{x_q} V_a \cos\delta + E_q \tag{4.6}$$

Dividindo a equação 4.6 por $x_d$ tem-se que:

$$R = \frac{r}{x_d} = \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d}\right) V_A \cos\delta + \frac{E_q}{x_d} \tag{4.7}$$

A equação anterior, 4.7, pode ser resumida na seguinte relação:

$$R = a\ cos\,\delta + b \qquad (4.8)$$

onde

$$a = (\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d})\ V_a$$

e

$$b = \frac{E_q}{x_d}$$

Notar que na equação 4.8, a variação do parâmetro *b* corresponderia à variação de excitação, ou seja, do fluxo $E_q$ indutor da máquina síncrona, aqui operando como gerador. Já o parâmetro *a* se apresenta como um valor fixo dependendo das características internas da máquina.

A figura 4.7, deste modo, mostra melhor a condição descrita pela equação 4.8 obtida via diagrama vetorial simplificado da figura 4.6.

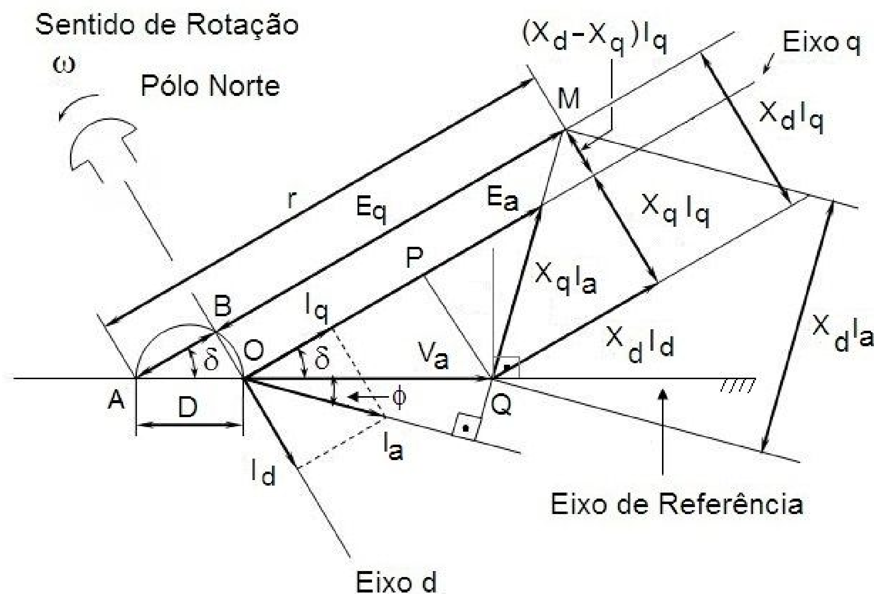



***Figura 4.7 – Diagrama Básico da Carta de Capacidade do Gerador Síncrono***

Analisando melhor a equação 4.8, conclui-se que o vetor $R$ toma formas especiais de cônicas clássicas em função da variação do parâmetro $b$, fisicamente representativo da excitação da máquina síncrona.

Deste modo, a equação 4.8, genericamente, representa uma cônica chamada Limaçon de Pascal.
Para certos valores particulares dos parâmetros $a$ e $b$, nomes especiais são dados às cônicas obtidas sempre a partir da equação 4.8.

Para $b = 0$, $R = a\cos\delta$ torna-se a equação de uma circunferência e para $b = a$, $R = a\,(\cos\delta + 1)$ torna-se a equação de uma cardióide.
Nota-se, então, que para um valor nulo de excitação existirá sempre um valor $R$, de excitação mínima, delimitando uma circunferência denominada na literatura técnica de círculo de excitação mínima da máquina síncrona.
Na figura 4.6, o triângulo $AMQ$ mostra que o vetor $QM$ é proporcional à potência aparente, no caso presente, do gerador enquanto que o vetor $AM$ é proporcional à corrente de excitação aplicada ao campo da máquina.
Para valores quaisquer de excitação o aspecto do lugar geométrico descrito pelo vetor $R$ terá o aspecto das Limaçons mostradas na figura 4.8.

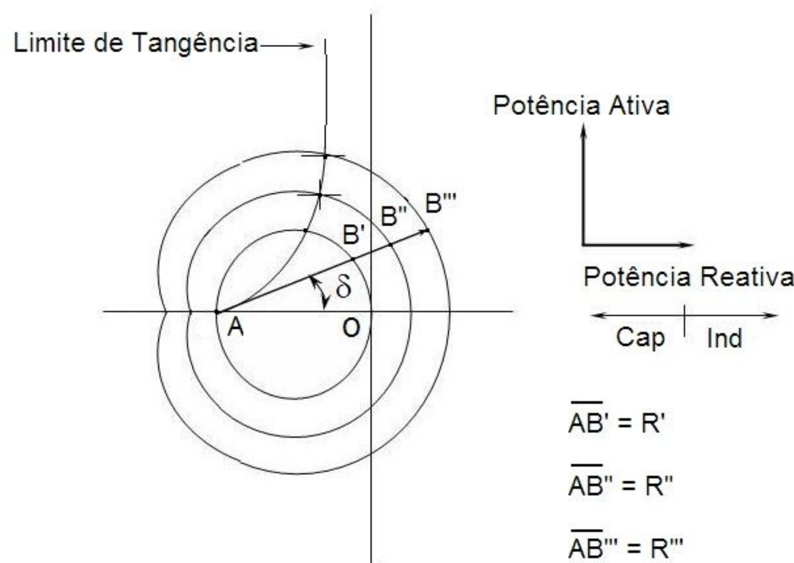



***Figura 4.8 – Família de Limaçons de Pascal***

Conclui-se que para diferentes valores de excitação, diferentes Limaçons representarão os lugares geométricos descritos pelo vetor $R$ da equação 4.8.
Teoricamente, é possível se trabalhar do lado esquerdo do diagrama da figura 4.8, porém uma restrição operativa aparece nesta área da curva, área também conhecida como área de subexcitação da máquina síncrona.
Analisando o diagrama da figura 4.8, se reportando ao diagrama da figura 4.6, verifica-se que a partir dos pontos de tangência das Limaçons com a horizontal

uma situação conflitante aparece. Imaginando-se que o ângulo $\delta$ do vetor $R$ em relação à referência, assuma um valor tal que o ponto $B$ fique do lado esquerdo da linha de limite de tangência. Pelo próprio diagrama, nota-se que um aumento na potência ativa entregue pelo órgão primário ao gerador, que na prática corresponderia a um aumento do ângulo $\delta$, neste diagrama está associado a uma redução na potência ativa transferida pelo mesmo gerador. Esta situação operativa caracteriza uma instabilidade que deve ser evitada. Fisicamente, o que ocorre é uma redução tal no valor do fluxo magnético de excitação que o equilíbrio, entre a potência ativa elétrica e a potência ativa mecânica, é rompido não existindo mais estabilidade no processo de conversão eletromagnética de energia.
Na prática, durante os ensaios realizados no sentido de se levantar os limites operativos de uma máquina síncrona, para cada um dos pontos escolhidos de carregamento dentro da área de subexcitação da carta de capacidade, observam-se oscilações nas principais variáveis de estado tais como potência reativa, tensão terminal e corrente de campo.
A solução mais prática para esse problema sugere o estabelecimento de uma curva limite de estabilidade para a operação da máquina na região de subexcitação.
Para o caso presente será utilizado um recurso matemático para solução do problema.
Seja novamente o diagrama vetorial da figura 4.7 representado na figura 4.9 de modo simplificado.

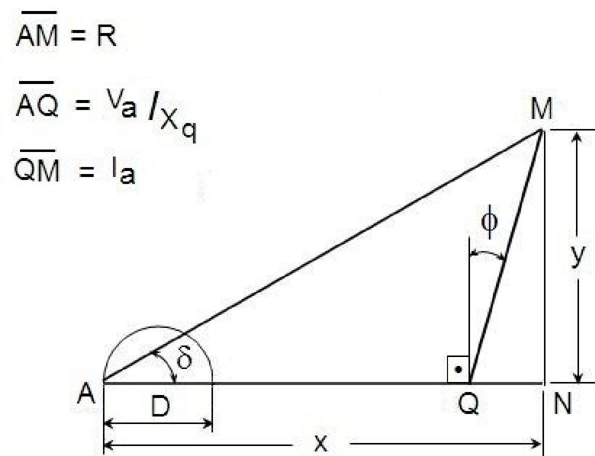



***Figura 4.9 – Diagrama Básico Reportado da Figura 4.7***

O triângulo $AMN$ permite que se escreva:

$$\left| \overline{AM} \right|^2 = \left| \overline{AN} \right|^2 + \left| \overline{NM} \right|^2 \tag{4.9}$$

ou seja

$$R^2 = x^2 + y^2 \tag{4.10}$$

e também obtém-se da figura 4.9 que:

$$\cos\delta = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{x}{R} \tag{4.11}$$

Ou melhor:

$$\cos\delta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{4.12}$$

Com os valores de $R$, da equação 4.10, e de $\cos\delta$, da equação 4.12, a equação 4.8, anterior, é transformada da forma polar para a forma cartesiana, ficando do modo seguinte:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a + b \tag{4.13}$$

Como o interesse recai nos pontos da cônica da equação 4.13 que representam a intersecção desta com a horizontal bastará derivá-la implicitamente e igualar a derivada $\frac{dy}{dx}$ a zero.

Derivando implicitamente a equação 4.13, tem-se:

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 2y\frac{dy}{dx}) =$$

$$= a[(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 2y\frac{dy}{dx})\frac{x}{(x^2 + y^2)}]$$

Simplificando e tomando $\frac{dy}{dx} = 0$, tem-se que:

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \tag{4.14}$$

A equação 4.14, obtida, representa uma cônica aberta chamada de Cissóide de Diócles e delimita a região de subexcitação permitida para a operação da máquina síncrona.
Na prática, existe um processo gráfico, bastante aproximado, que permite traçar, a partir da circunferência de excitação mínima, a curva da cissóide. Ver as orientações mostradas na figura 4.10.

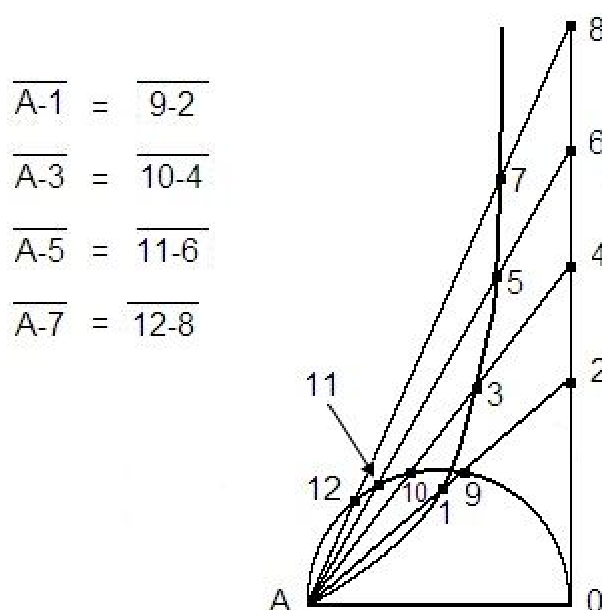



***Figura 4.10 – Critério para Traçado da Cissóide de Diócles***

Na prática, após o traçado da cissóide, a curva que define o limite de subexcitação da máquina síncrona, são descontados, nesta mesma curva, *10%* como fator de segurança para que não se opere o gerador próximo do limite.
Também no círculo de excitação mínima é usual descontar *5%* devido ao fato de que normalmente o gerador não consegue reduzir a zero sua tensão de excitação.
Assim, as regiões de subexcitação e de excitação mínima ficam determinadas e definidas conforme está mostrado na figura 4.11.

De posse do diagrama básico da figura 4.7, levando-se em conta as restrições impostas, a carta de capacidade da máquina síncrona, aqui representada na condição de gerador, poderá ser traçada.

Sabe-se da teoria de eletricidade, considerando-se as tensões e correntes da fase a de uma máquina síncrona, que:

- potência ativa:

$$p = V_a I_a \cos\phi \tag{4.15}$$

- potência reativa:

$$q = V_a I_a \sin\phi \tag{4.16}$$

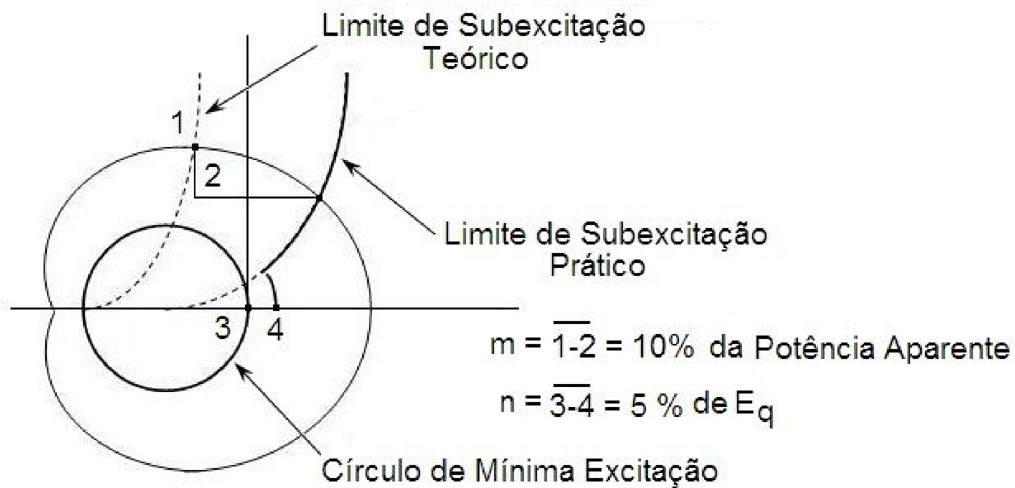



***Figura 4.11 – Área de Subexcitação Teórica da Máquina Síncrona***

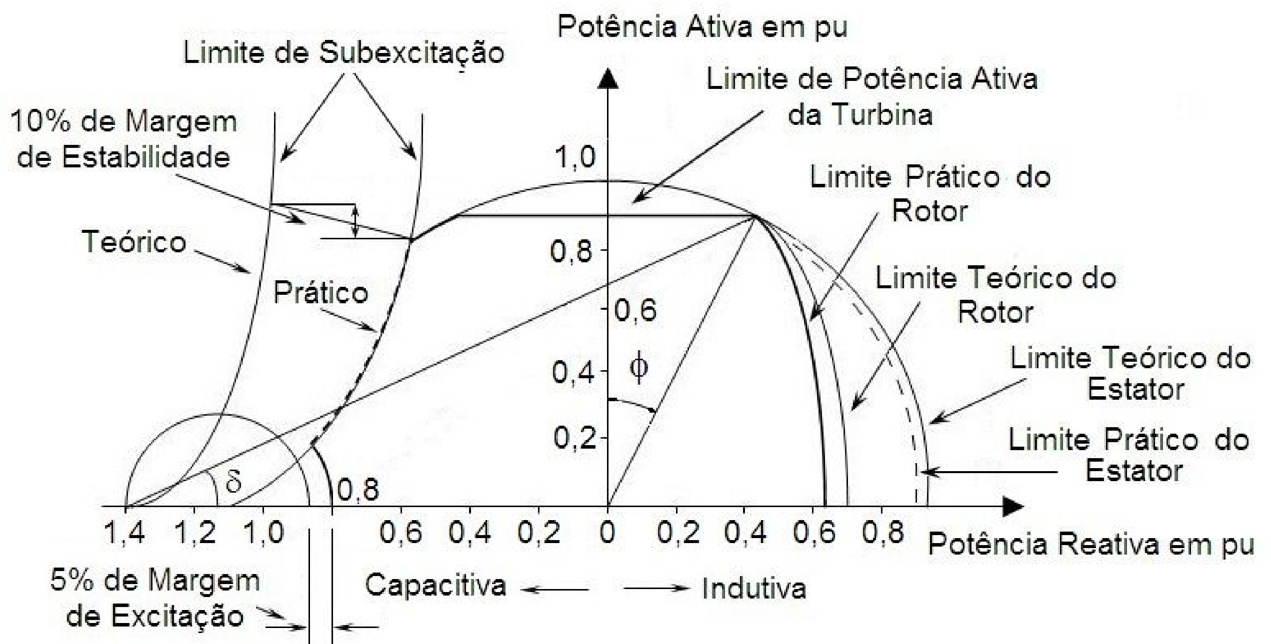



***Figura 4.12 – Carta de Capacidade de uma Máquina Síncrona como Gerador de pólos Salientes com Valores em PU***

Do diagrama básico da figura 4.9 extraem-se as expressões para as transferências de potências ativa e reativa da máquina síncrona operando como gerador.

Da figura 4.9 tem-se que:

$$I_a \; cos\phi = R \; sin\,\delta \tag{4.17}$$

$$I_a \; sin\,\phi = R \; cos\,\delta - \frac{V_a}{x_q} \tag{4.18}$$

Levando-se as expressões de $I_a \; cos\phi$ e de $I_a \, sin\,\phi$, respectivamente das equações 4.17 e 4.18, nas equações 4.15 e 4.16 vem que:

potência ativa:

$$p = V_a \, R \; sin\,\delta \tag{4.19}$$

potência reativa:

$$q = V_a \, (R \; cos\,\delta - \frac{V_a}{x_q}) \tag{4.20}$$

Trazendo nas equações 4.19 e 4.20 a expressão do vetor auxiliar $R$, da equação 4.7, obtém-se as seguintes expressões para as potências ativa e reativa, respectivamente:

$$p = \frac{E_q V_a}{x_d} sin\,\delta + \frac{1}{2} V_a^2 \; (\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d}) sin2\delta \tag{4.21}$$

$$q = \frac{E_q V_a}{x_d} cos\delta - \frac{1}{2} \frac{V_a^2}{x_d x_q} \left[ (x_d + x_q) - (x_d - x_q) cos2\delta \right] \tag{4.22}$$

O estudo que resultou no traçado da carta de capacidade da figura 4.12 contemplou a condição operativa da máquina síncrona como gerador.
Considerando agora a condição operativa da máquina como motor síncrono, será feita a analogia sobre a mesma carta descrita na figura 4.12 de modo a contemplar essa modalidade operativa.
As mesmas observações da carta da figura 4.12, quanto às definições dos limites práticos e teóricos, são validas.

Na nova carta de capacidade da máquina síncrona operando como motor pode ser vista na figura 4.13. Ela é como o reflexo espelhado da carta da figura 4.12. Como nesse texto não se está interessado no estudo específico do motor síncrono, a não ser aquele que tem a ver com a utilização dessa modalidade operativa na regulação de potência reativa do SEP, a única carga permitida nesse caso será aquela associada ao próprio consumo de potência ativa da máquina. Essa operação é conhecida como operação na condição de motor síncrono em vazio.
A modalidade operativa das máquinas de UHEs em ambas as situações, motor e gerador síncronos, é caracterizada por adaptações que fazem parte do projeto inicial, ou seja, uma máquina síncrona projetada para operar apenas como gerador, em seu projeto original, não pode operar na condição de motor, pois não dispõe dos requisitos para tal. Para se ter uma idéia, a operação como motor síncrono em vazio requer um sistema específico de rebaixamento do nível de água de jusante dentro do tubo de sucção, pois, como se sabe, os projetos atuais de hidrogeradores sempre visam a condição de trabalho com a turbina afogada, ou seja, com o nível de jusante presente nas região das pás do rotor. Se não se promover o rebaixamento, a máquina, ao operar como motor, terá um carregamento de água extra que se manifestará como carga, deixando a operação de ser uma operação em vazio podendo vir a trazer danos irreversíveis ao conjunto girante.

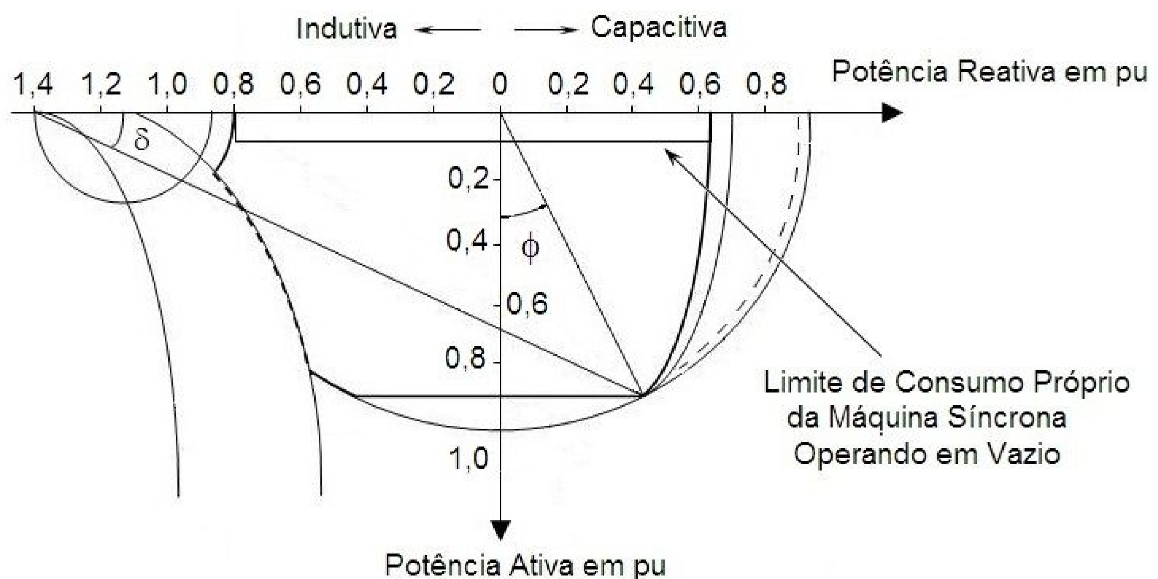



***Figura 4.13 – Carta de Capacidade de uma Máquina Síncrona como Motor de pólos Salientes com Valores em PU***

## 4.3.4. Freqüência Mecânica e Freqüência Elétrica

Numa máquina síncrona existe uma diferença entre a rotação mecânica do eixo e a rotação elétrica do fluxo gerado no rotor.

Esta diferença dependerá do número de pólos da máquina e desta afirmativa pode-se assim escrever que:

$$RPM_{elétrico} = (RPM_{mecânico}) \frac{Pólos}{2} \tag{4.23}$$

onde

$Pólos$: números de pólos
$RPM_{elétrico}$: rotação do fluxo indutor em $rmp$
$RPM_{mecânico}$: rotação da turbina em $rmp$

A própria velocidade angular acaba sendo assim definida:

$$\omega_{elétrico} = (\omega_{mecânico}) \frac{Pólos}{2} \tag{4.24}$$

Como a freqüência mecânica ou rotação mecânica $\eta$ é normalmente dada em $rpm$ vale a seguinte relação entre as freqüências:

$$f_{elétrico} = \frac{Pólos}{2} \frac{\eta[rpm]}{60} \quad \text{em Hz} \tag{4.25}$$

---

## EXEMPLO 4.1

Um gerador síncrono tem 52 pólos. Encontrar, a partir desse dado, a velocidade de rotação em $rpm$ do conjunto girante sabendo-se que essa máquina pertence ao SIN.

**Solução:**

Pela quantidade de pólos, percebe-se que se trata de uma máquina síncrona de grande porte, de uma usina hidrelétrica.
Como a máquina é pertencente ao SIN então a freqüência nominal será de $60\ Hz$.
Pode-se, então, aplicar a fórmula da equação 4.25, diretamente.

Logo

$$f_{elétrico} = \frac{Pólos}{2}\frac{\eta[rpm]}{60} \quad \text{em Hz}$$

$$\eta[rpm] = \frac{2\,x\,60}{Pólos} f_{elétrico}[Hz] = \frac{2\,x\,60}{52} 60 = 138{,}46$$

A velocidade será aproximada para *138,5 rpm*.

---

## EXEMPLO 4.2

Seja uma máquina geradora de uma instalação de hidreletricidade que apresenta as seguintes quantidades relativas a uma base de valores nominais onde a potência aparente é de *313,6 MVA* trifásicos e a tensão é de *16,5 kV* fase-fase:

a) potência aparente nominal do gerador trifásico: $S_G = 1{,}0\ pu$

b) tensão nominal entre fases: $V_0 = 1{,}0\ pu$

c) ângulo de potência nominal: $\delta = 27{,}2$ *graus elétricos*

d) fator de potência nominal: $\phi = 18{,}2$ *graus elétricos*$[\cos\phi = 0{,}95]$

e) reatância síncrona nominal de eixo d: $xd = 0{,}93\ pu$

f) reatância síncrona nominal de eixo q: $xq = 0{,}69\ pu$

g) tensão de excitação em vazio: $Eq = 0{,}87\ pu$

h) potência mecânica máxima da turbina: $P_T = 0{,}96\ pu$

Considerar desprezíveis as resistências internas dos enrolamentos da máquina bem como o efeito de saturação magnética do núcleo de ferro tanto do campo quanto da armadura.
Considerar também que as três fases do enrolamento do estator estão conectadas em estrela aterrada.

**Solução:**

Não se pode esquecer que o gerador desse problema se trata de uma máquina síncrona trifásica de modo que os vetores contidos no diagrama vetorial da figura 4.7, correspondente, deverão ser multiplicados pelo fator $\sqrt{3}$. Lembrar também que, por ser a conexão do estator em estrela, as correntes de linha serão as mesmas que as de fase.

A equação 4.8, anterior, fornece a expressão do vetor $R$, da figura 4.6, em função dos parâmetros $a$ e $b$. Senão veja-se:

$$R = a\ cos\,\delta + b$$

onde, substituindo-se os valores, já levando em conta a condição de máquina síncrona trifásica, vem que:

$$a = (\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d})\ \sqrt{3}V_a = (\frac{1}{0{,}69} - \frac{1}{0{,}93})\ 1{,}0 = 0{,}374$$

e

$$b = \frac{\sqrt{3}\,E_q}{x_d} = 1{,}62$$

Uma nota deve ser feita aqui; como o sistema é trifásico, e a base de valores levou em conta a tensão terminal fase-fase, o fator de multiplicação do diagrama vetorial terá o seguinte valor: $\sqrt{3}V_a = 1\,pu$ .

Com relação ao diagrama vetorial da figura 4.6, considerando-se a condição trifásica da máquina síncrona, vem que:

$$\vec{AO} = \frac{D}{x_d} = \frac{x_d - x_q}{x_q x_d}V_a = \frac{0{,}93 - 0{,}69}{0{,}69x0{,}93}1{,}0 = 0{,}373$$

$$\vec{OQ} = \frac{V_a}{x_d} = \frac{1{,}0}{0{,}93} = 1{,}075$$

$$\vec{AM} = \frac{\sqrt{3}\,E_q}{x_d} = \frac{\sqrt{3}\,0{,}87}{0{,}93} = 1{,}62$$

$$\vec{QM} = \sqrt{3}V_a I_a = I_a$$

Deste modo, a equação do vetor $R$ terá a seguinte equação recursiva:

$$R = 0{,}373\ cos\,\delta + 1{,}62\,pu$$

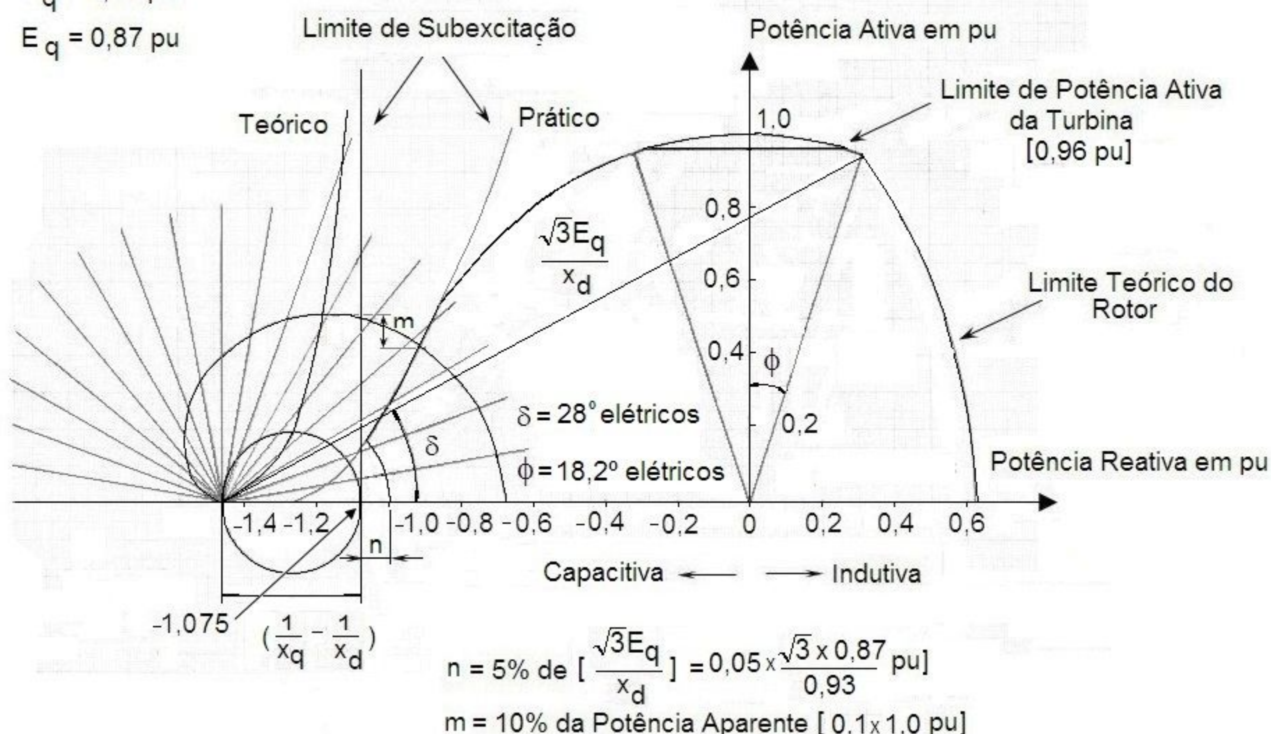



***Figura 4.14 – Carta de Capacidade do Gerador Síncrono do Exemplo 4.2***

A figura 4.14 traz a carta de capacidade da máquina síncrona pedida pelo problema em questão.

**Nota a respeito do exemplo 4.2:**

Nesse exemplo, o problema básico foi adaptar as análises feitas anteriormente considerando-se um caso monofásico para um caso trifásico. O cuidado sempre é o de se trabalhar com uma base de valores trifásicos onde a potência aparente deve ser dada pelo produto da tensão terminal entre-fases da máquina pela corrente de fase já que a máquina síncrona foi tomada como tendo a conexão das três bobinas de fase do estator ligadas em estrela. O resultado desse produto deverá ainda ser multiplicado pelo fator $\sqrt{3}$. No SIN, as máquinas síncronas são projetadas com a conexão das bobinas de fase do estator ligadas em estrela aterrada. Esse arranjo cria a possibilidade da efetivação da proteção de falta a terra no estator, uma proteção primordial para o equipamento.
Outra observação tem a ver com os descontos marcados no diagrama vetorial da figura 4.14 e identificados pelas letras $m$ e $n$.

Esses descontos são sugeridos na referência 23 e tem a função de criar uma margem de segurança, principalmente na definição, por exemplo, da proteção de perda de excitação e também para a delimitação da ação de dispositivos limitadores de operação da máquina na região de subexcitação, uma região de alta instabilidade.
Lembrar que o traçado da Cissóide de Diocles foi promovido de maneira geométrica conforme mostrado na figura 4.10.
Lembrar também que o traçado da carta de capacidade, na figura 4.14, trata-se de um procedimento teórico que deverá ser, como ocorre nas instalações em época de comissionamento, confirmado a partir de ensaios de campo.

---

## EXEMPLO 4.3

Seja colocar na forma de uma função instantânea o sistema de tensões trifásicas de um gerador síncrono do SIN cujo dado de placa indica que a tensão de saída é de $16,5\,kV$ .

**Solução:**

Como se sabe das menções feitas anteriormente, a tensão de saída, como dado de placa, tem a ver com a representação na forma vetorial genérica considerando um sistema trifásico de tensões equilibradas, o que quer dizer que, para cada uma das três tensões de saída do gerador, em cada uma das fases $a,b,c$, o módulo será sempre o mesmo, ou seja, $16,5\,kV$ .
É importante saber que um gerador síncrono do tipo utilizado nas UHEs do SIN gera apenas tensões equilibradas, na forma harmônica de seno ou co-seno e de um tipo de seqüência conhecida como seqüência positiva, indicando que o fluxo indutor do rotor, por ação da turbina, ao varrer as bobinas do estator, respeita a seqüência de fase $a,b,c$ e sempre nessa ordem.

A equação geral de um vetor de tensão é dada pela seguinte expressão:

$$\dot{V} = \left|\dot{V}\right| e^{j\theta} = \left|\dot{V}\right| e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Na equação anterior tem-se o seguinte, respeitando o que é apresentado na teoria:

$\left|\dot{V}\right|$ : módulo do vetor básico de tensão

$\omega = 2\pi f$ : velocidade angular onde $f$ é a freqüência

$\varphi$ : um ângulo de defasamento

O vetor básico na forma de uma função instantânea no domínio do tempo seria:

$$v = V_{máx} \sin(\omega t + \varphi)$$

onde $\left|\dot{V}\right|$ é o valor eficaz da função *v(t)*

Quando se trabalha com uma função $f(t)$ genérica, periódica de período $T$ , a expressão para o valor eficaz dessa função, segundo a teoria, é dada pela fórmula seguinte:

$$valor\ eficaz = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

Porém, se a função $f(t)$ for uma função harmônica do tipo $v(t) = V_{máx} \sin(\omega t + \varphi)$, os cálculos do valor eficaz, através da fórmula apresentada, fornece o valor fixo $valor\ eficaz = \frac{Vmáx}{\sqrt{2}}$ .

Considerando-se o problema atual, pode-se escrever que:

$$\left|\dot{V}\right| = \frac{Vmáx}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad Vmáx = \sqrt{2}\left|\dot{V}\right| = \sqrt{2}(16,5) = 23,334\ kV$$

Levando-se em conta que o gerador em questão tem três fases e que estas fases estão distribuídas uniformemente de modo que cada uma fique exatamente a *120 graus elétricos* uma da outra, as expressões para as tensões instantâneas serão as seguintes:

$$v_a = 23,334 \sin(\omega t)\ kV$$
$$v_b = 23,334 \sin(\omega t - 120^o)\ kV$$
$$v_c = 23,334 \sin(\omega t + 120^o)\ kV$$

Considerar, nas expressões anteriores, o sentido como positivo, ou seja, sentido anti-horário de giro do conjunto de vetores $v_a, v_b, v_c$ e que a fase $a$ esteja, exatamente, sobre o eixo das abscissas no plano cartesiano.

---

## 4.4. Equações da Máquina Síncrona

### 4.4.1. Geral

A máquina síncrona caracteriza o elemento representativo do processo sobre o qual vão atuar os órgãos de comando e controle para a obtenção do produto final, qual seja, a potência elétrica despachada a partir da potência motriz de entrada fornecida pela turbina.

Para o equacionamento da parte relativa à regulação de tensão, faz-se necessária a utilização da representação da máquina síncrona através de um equacionamento tal que venha a facilitar as análises e os estudos envolvidos.
O procedimento normal é a aplicação das chamadas transformações $d-q-0$ que busca a conversão de grandezas estatóricas em grandezas rotóricas através da transformação de grandezas estacionárias em grandezas pseudo-estacionárias referidas a um sistema de eixos fixado sobre o rotor e que gira na mesma velocidade deste, velocidade síncrona, fazendo com isto que estas grandezas independam da rotação.
O fato consiste na criação de três eixos chamados $d-q-0$, ou mais propriamente, eixo direto, eixo em quadratura e eixo zero, sendo que os eixos $d$ e $q$ perfazem entre si um ângulo de $90\ graus\ elétricos$ e se movimentando na velocidade síncrona, sendo o eixo zero um eixo estacionário simplesmente utilizado nas representações em que as condições desequilibradas são verificadas.
O processo visa à projeção das grandezas dos eixos estatóricos, aqui designados por $a-b-c$ , segundo uma matriz de transformação particular, sobre aqueles eixos $d-q-0$, do rotor, e a partir daí obter o equacionamento de toda a dinâmica da máquina síncrona.
Com o estabelecimento do equacionamento básico relativo às indutâncias, segundo as influências próprias e mútuas dos enrolamentos envolvidos, serão equacionadas as funções de transferência das partes implicadas buscando-se com isto a definição do modelo da máquina síncrona.
Em cima da modelagem e da análise, detalhadas previamente, será possível a realização de diagnósticos sobre o comportamento operativo da máquina síncrona sob determinadas condições.

## 4.4.2. A Transformação d-q-0

Como já foi comentada anteriormente, a idéia da utilização da transformação de grandezas estacionárias em grandezas pseudo-estacionárias teve seu embasamento matemático formulado na utilização de uma matriz de transformação, um método específico de tratamento matemático para essa questão.
A transformação a ser aqui utilizada se trata da transformação específica proposta por W A Lewis, ver referência 57.
Primeiramente será representada uma máquina síncrona composta de um par de pólos conforme está mostrado na figura 4.1.
Os eixos $d$ e $q$ giram com a velocidade síncrona do conjunto no sentido horário. O eixo $d$ encontra-se em fase com a direção do pólo enquanto o eixo $q$ encontra-se em fase, na direção $90\ graus\ elétricos$, atrasados do eixo $d$, considerando o sentido de giro.
O diagrama fasorial para a máquina síncrona, anteriormente mostrado na figura 4.1, é apresentado na figura 4.15 considerando-se apenas a fase $a$ do estator.

A equação básica da transformação $d-q-0$ é a seguinte:

$$G_{dqo} = P\ G_{abc} \qquad (4.26)$$

onde

$G$: matriz das grandezas no sistema indicado
$P$: matriz de transformação

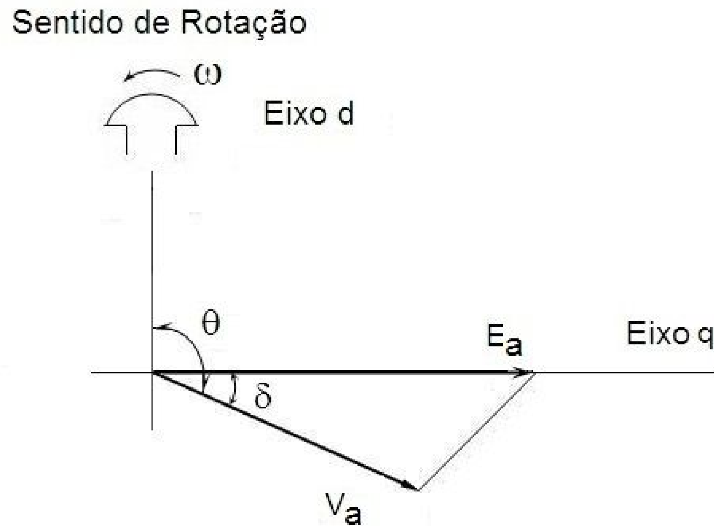



***Figura 4.15 – Diagrama Vetorial da Máquina Síncrona para a Fase A***

Na figura 4.15, considerar que o ângulo elétrico de giro do sistema seja dado pela seguinte expressão:

$$\theta(t) = \delta + \omega t + \frac{\pi}{2} \qquad (4.27)$$

onde $\omega$ é a rotação ou freqüência do conjunto girante, geralmente tomada como um valor fixo, síncrono e sob controle automático em função da presença do regulador de velocidade.

Em relação à figura 4.15, deve-se notar que essa representação expressa a posição momentânea dos vetores de tensão da máquina síncrona, mormente o vetor de tensão da fase $a$. Deste modo, num dado momento em que a localização do rotor fica definida, o vetor da tensão terminal relativa à fase $a$ está localizado exatamente a um ângulo $\theta$ radianos elétricos atrás do eixo $d$ cuja flecha positiva indica o sentido da fmm perpendicular ao plano de uma espira hipotética que concentraria toda a corrente gerada na fase $a$ pelo processo de conversão eletrodinâmica da máquina elétrica. A equação 4.27 é bem clara nesse sentido.

**Nota importante:**

A partir desse ponto, apenas nesse capítulo, no sentido de dar mais clareza e simplicidade ao equacionamento que será um tanto quanto trabalhoso, nas designações de grandezas variantes no domínio temporal será suprimida a denotação $(t)$ como indicação de dependência da variável tempo.

Assim, a equação 4.27, de modo mais simplificado, tomará a seguinte forma:

$$\theta = \delta + \omega t + \frac{\pi}{2}$$

onde $\theta$ é variante com o tempo

Considerando- se a matriz $P$, da transformação desejada, vem que:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

A transformação $P$, aqui utilizada, trata-se de uma transformação ortogonal, ou seja, aquela que obedece à seguinte operação quando a inversa da matriz original é exatamente igual a sua transposta:

$$P^{-1} = P^T \quad (4.29)$$

Portanto, para as correntes, para as tensões e para os fluxos magnéticos enlaçados, grandezas variantes no tempo e associadas à armadura da máquina síncrona e refletidas no sistema $d-q-0$, pode-se escrever, de forma matricial resumida, que:

$$i_{dqo} = P\, i_{abc} \quad (4.30)$$

$$V_{dqo} = P\, V_{abc} \quad (4.31)$$

$$\lambda_{dqo} = P\, \lambda_{abc} \quad (4.32)$$

A matriz inversa da matriz $P$ de transformação é a seguinte:

$$P^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos\theta & \sin\theta \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

A transformação escolhida garante a invariância da potência em ambos os sistemas $a-b-c$ e $d-q-0$ e para comprovar isso bastará considerar a expressão da potência instantânea, no domínio do tempo, deliberada por uma máquina síncrona operando como gerador.

Assim, vem que, levando-se em conta as tensões e correntes instantâneas de cada uma das fases do estator da máquina síncrona, variantes no tempo:

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \quad (4.34)$$

onde

$p$ : potência instantânea total gerada

$v_{a,b,c}$ : tensões instantâneas de estator por fase

$i_{a,b,c}$ : correntes instantâneas de estator por fase

De outra maneira, a equação 4.34 pode ser reescrita numa forma mais adequada para as operações matriciais futuras. Deste modo, tem-se que:

$$p = [V_{abc}]^T [I_{abc}] \quad (4.35)$$

Notar que as tensões e as correntes instantâneas de estator da máquina síncrona se distribuem na forma de uma matriz coluna, assim como tais entidades são denominadas na teoria. Isso quer dizer que:

$$[V_{abc}] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = V_{abc} \quad (4.36)$$

e

$$[I_{abc}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = I_{abc} \quad (4.37)$$

Notar que na equação 4.35, a matriz coluna das tensões de fase teve de ser transposta para que a operação de multiplicação matricial tivesse consistência.

A partir das equações 4.30 e 4.31, podem-se escrever as seguintes equações, respectivamente para as correntes e as tensões de fase da máquina síncrona:

$$I_{abc} = P^{-1} I_{dqo} \quad \text{e} \quad V_{abc} = P^{-1} V_{dqo}$$

Levando-se as expressões anteriores, respectivamente para as correntes e para as tensões, na equação 4.35, vem que:

$$p = \left[P^{-1} V_{dqo}\right]^T \left[P^{-1} I_{dqo}\right] = \left[V_{dqo}\right]^T \left[P^{-1}\right]^T P^{-1} I_{dqo} \qquad (4.38)$$

Uma importante observação relativa à transformação via matriz $P$ é que ela se trata de uma transformação ortogonal, valendo então a relação da equação 4.29 anterior e as observações concernentes a esta.
A partir da matriz de transformação $P$, tem-se, para a equação 4.38 referente à potência total instantânea transferida pela máquina síncrona, que:

$$p = \left[V_{dqo}\right]^T P P^{-1} I_{dqo} = \left[V_{dqo}\right]^T I_{dqo} \qquad (4.39)$$

Através do cálculo matricial anterior fica comprovada a invariância da potência na transformação $a-b-c \leftrightarrow d-q-0$. Essa propriedade será fundamental para o estudo da transformação $G_{dqo} = P\, G_{abc}$ e *vice versa*.

Uma observação é interessante se fazer; quando se trabalha com sistemas trifásicos equilibrados, as projeções das grandezas sobre o eixo $0$, na transformação $a-b-c \leftrightarrow d-q-0$, tornam-se nulas uma vez que a existência desse eixo tem a ver com a questão do desequilíbrio. Isso será visto mais à frente neste livro.

### 4.4.3. Equação Geral dos Fluxos Enlaçados

Na figura 4.1, embora muito simples, podem-se verificar os enrolamentos que interferem no processo de trabalho de uma máquina síncrona.
Tendo em vista se tratar de uma máquina síncrona trifásica, notam-se os enrolamentos do estator, em número de três, o enrolamento de campo e os enrolamentos amortecedores.
Em todos estes enrolamentos aparecem os efeitos da indução própria e da indução mútua, uma vez que eles se interagem simultaneamente.
De uma maneira geral, podem-se equacionar os efeitos dos fluxos enlaçados segundo a relação matricial seguinte.

$$
\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \hdashline \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ \hdashline L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ \hdashline i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \tag{4.40}
$$

onde

$\lambda_{a,b,c,F,D,Q}$ : fluxos instantâneos enlaçados nos enrolamentos indicados

$L_{a,b,c,F,D,Q}$ : indutâncias de estator e de rotor por fase envolvidas

$i_{a,b,c,F,D,Q}$ : correntes instantâneas de estator e de rotor por fase

Considerar para a designação da indutância $L_{ij}$ que:

$j = i$ : para a indutância própria do enrolamento $i$

$i \neq j$ : para a indutância no enrolamento $i$ devido ao enrolamento $j$

### 4.4.4. Indutâncias Próprias e Mútuas do Estator

Para obtenção das fórmulas das indutâncias próprias e mútuas do estator de uma máquina síncrona considerar os seguintes desenvolvimentos.

Figura 4.16 – Esquema Auxiliar da Máquina Síncrona para as Indutâncias Próprias com a Representação da Espira da Fase A

Para a indutância própria tem-se, considerando o esquema da figura 4.16 que representa a fase *a* do estator da máquina síncrona:

$$\Phi_{ad} = \Im_d \mathcal{F}_{ad} \qquad (4.41)$$

$$\Phi_{aq} = \Im_q \mathcal{F}_{aq} \qquad (4.42)$$

onde

$\Phi_{ad}$ : fluxo magnético indutor de eixo d

$\Phi_{aq}$ : fluxo magnético indutor de eixo q

$\Im_d$ : permeância magnética do eixo d

$\Im_q$ : permeância magnética do eixo q

$\mathcal{F}_a$ : fmm relativa à fase A

$\mathcal{F}_{ad}$ : fmm relativa ao eixo d

$\mathcal{F}_{aq}$ : fmm relativa ao eixo q

Mas ainda assim, pode-se escrever, para as projeções das fmms em cada um dos eixos, que:

$$\mathcal{F}_{ad} = \mathcal{F}_a \cos\theta \quad (4.43)$$

$$\mathcal{F}_{aq} = \mathcal{F}_a \sin\theta \quad (4.44)$$

Levando-se as expressões de cada variável das equações 4.41 e 4.42, respectivamente, nas equações 4.43 e 4.44, vem que:

$$\Phi_{ad} = \Im_d \mathcal{F}_{ad} = \Im_d \mathcal{F}_d \cos\theta \quad (4.45)$$

$$\Phi_{aq} = \Im_q \mathcal{F}_{aq} = \Im_q \mathcal{F}_q \sin\theta \quad (4.46)$$

Deste modo, para o fluxo total da fase $a$, recomposto a partir das expressões dos fluxos em cada um dos eixos $d-q$, vem:

$$\Phi_a = \Im_d \mathcal{F}_a \cos^2\theta + \Im_q \mathcal{F}_a \sin^2\theta \quad (4.47)$$

Notar que $\Phi_{ad}$ e $\Phi_{aq}$ não formam uma relação pitagórica entre si devido ao fato de as permeâncias $\Im_d$ e $\Im_q$ se referirem a diferentes meios por onde o fluxo magnético indutor passa.

Como dentro da teoria de eletromagnetismo, as seguintes relações são válidas, então:

$$L = \frac{N\Phi}{i} \qquad \therefore \quad Li = N\Phi = \lambda$$

Para a fase $a$ da máquina síncrona em questão onde $N_a$, trata-se do número de espiras da bobina dessa fase, tem-se, considerando o fluxo magnético enlaçado a partir da equação 4.47, que:

$$\lambda_a = N_a \mathcal{F}_a (\Im_d \cos^2\theta + \Im_q \sin^2\theta) \quad (4.48)$$

Mas sabe-se também que:

$$\mathcal{F}_a = N_a\, i_a \quad \therefore \quad N_a \mathcal{F}_a = N_a^2\, i_a$$

Logo, a equação 4.48 tomará a seguinte forma:

$$\lambda_a = N_a^2\, i_a (\Im_d \cos^2\theta + \Im_q \sin^2\theta)$$

De modo que, para a indutância própria do enrolamento do estator da máquina síncrona, levando-se em conta a fase $a$, vem que:

$$L_{aa} = \frac{\lambda_a}{i_a} = N_a^2 \, (\Im_d \cos^2\theta + \Im_q \sin^2\theta) \qquad (4.49)$$

Utilizando-se de um artifício da trigonometria, a expressão anterior pode também ser escrita numa forma mais adequada visando futuras análises. Senão, veja-se:

$$L_{aa} = N_a^2 \left(\frac{\Im_d + \Im_q}{2} + \frac{\Im_d - \Im_q}{2} \cos 2\theta\right) \qquad (4.50)$$

ou simplesmente

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2\theta \qquad (4.51)$$

onde

$$L_s = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{2}$$

e

$$L_m = N_a^2 \; \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Portanto $L_{aa}$ possui uma parcela síncrona $L_s$, e uma parcela dependente da velocidade dupla $L_m \cos 2\theta$.

Utilizando da analogia com a equação 4.51 relativa à fase $a$, considerando-se que as outras duas fases do estator da máquina síncrona devem receber tratamento matemático semelhante, já que o sistema é considerado trifásico e equilibrado, tem-se para estas fases as seguintes expressões para as indutâncias próprias do estator:

$$L_{bb} = L_s + L_m \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (4.52)$$

$$L_{cc} = L_s + L_m \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (4.53)$$

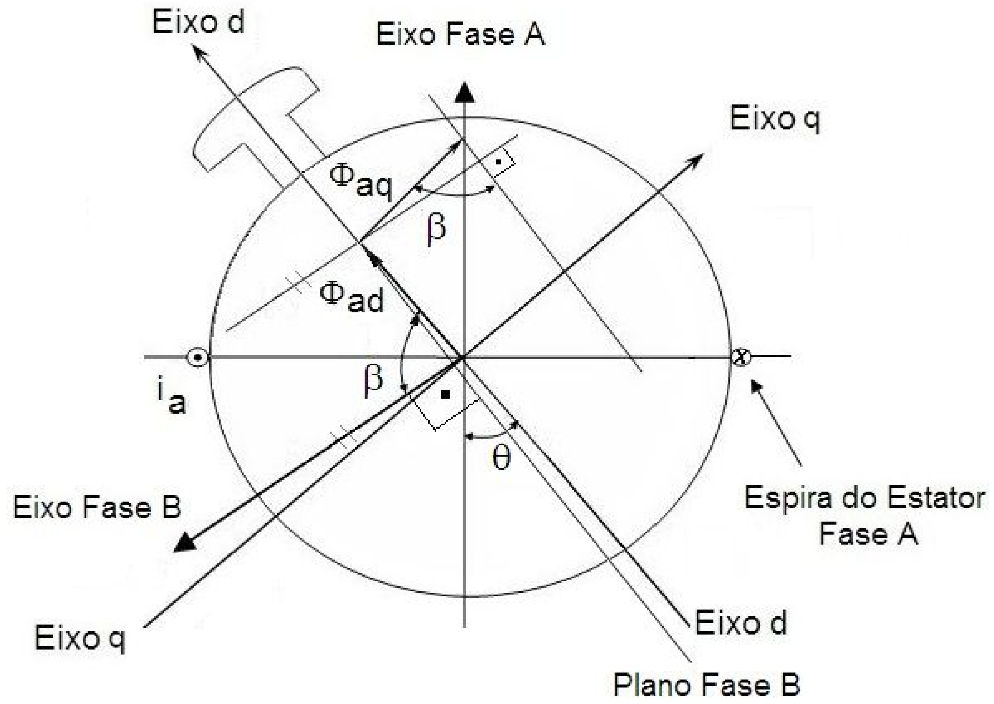



***Figura 4.17 – Esquema Auxiliar da Máquina Síncrona para as Indutâncias Mútuas com a Representação da Espira da Fase A***

Para a indutância mútua tem-se, considerando o esquema da figura 4.17 que representa a interação entre uma espira genérica referente às fases *a* e *b* do estator da máquina síncrona:

$$\Phi_{ba} = \Phi_{ad} \cos\beta - \Phi_{aq} \sin\beta \tag{4.54}$$

Das equações 4.45 e 4.46 obtém-se que:

$$\Phi_{ba} = \Im_d \mathcal{F}_a \cos\theta \cos\beta - \Im_q \mathcal{F}_a \sin\theta \sin\beta \tag{4.55}$$

Analogamente ao caso anterior:

$$L_{ba} = N_a^2 [\Im_d \cos\theta \cos\beta - \Im_q \sin\theta \sin\beta] \tag{4.56}$$

Da figura 4.17 pode-se tirar a relação $\theta + \beta = \frac{2\pi}{3}$

Utilizando-se de um artifício algébrico, a equação 4.56 tomará a seguinte forma:

$$L_{ba} = N_a^2 [\Im_d \cos\theta \cos(\frac{2\pi}{3} - \theta) - \Im_q \sin\theta \sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)] \quad (4.57)$$

Considerando-se as seguintes relações trigonométricas vem, para a equação 4.57, que:

$$\cos(\frac{2\pi}{3} - \theta) = -\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

$$\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$L_{ba} = N_a^2 [\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \cos\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta] \Im_d - N_a^2 [\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta] \Im_q =$$

$$= N_a^2 [\frac{\Im_d - \Im_q}{2}\sqrt{3}\sin\theta \cos\theta - \frac{\Im_d}{2}\cos^2\theta - \frac{\Im_q}{2}\sin^2\theta]$$

(4.58)

Considerando-se as seguintes relações trigonométricas, a equação 4.58, anterior, tomará a seguinte forma:

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$L_{ba} = N_a^2 \{\frac{\Im_d - \Im_q}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta - \frac{\Im_d [\frac{\cos 2\theta + 1}{2}] + \Im_q [\frac{1 - \cos 2\theta}{2}]}{2}\} =$$

(4.59)

$$= N_a^2 [\frac{\Im_d - \Im_q}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta - \frac{\Im_d - \Im_q}{2}\frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{\Im_d + \Im_q}{4}]$$

Por meio de um novo artifício algébrico, a equação 4.59 poderá ser reescrita na forma seguinte:

$$L_{ba} = N_a^2 [-\frac{\Im_d + \Im_q}{4} - \frac{\Im_d - \Im_q}{2}\cos 2(\theta + \frac{\pi}{6})] \quad (4.60)$$

Logo

$$L_{ba} = L_{ab} = -M_s - L_m cos\,2(\,\theta + \frac{\pi}{6}\,) \qquad (4.61)$$

onde

$$M_s = N_a{}^2 \;\; \frac{\Im_d + \Im_q}{4}$$

e

$$L_m = N_a{}^2 \;\; \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Portanto $L_{ba}$ ou $L_{ab}$ possui uma parcela síncrona $M_s$, e uma parcela dependente da velocidade dupla $L_m\, cos\,2(\,\theta + \frac{\pi}{6}\,)$.

Utilizando da analogia com a equação 4.61 relativa à influência da fase $a$ na fase $b$, considerando-se que as outras duas fases do estator da máquina síncrona devem receber tratamento matemático semelhante, já que o sistema é considerado trifásico e equilibrado, tem-se para estas fases as seguintes expressões para as indutâncias mútuas do estator:

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_s - L_m cos2(\,\theta - \frac{\pi}{2}\,) \qquad (4.62)$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_s - L_m cos2\,(\,\theta + \frac{5\pi}{6}\,) \qquad (4.63)$$

## 4.4.5. Indutâncias Próprias e Mútuas do Rotor

As indutâncias próprias e mútuas do rotor independerão do ângulo $\theta$ de giro da máquina síncrona, referenciado na equação 4.27, uma vez que seus valores já se encontram vinculados aos eixos $d$ e $q$ relativos ao sistema de eixos já em movimento na velocidade síncrona.

Assim, para as indutâncias próprias do rotor, tem-se, considerando no rotor os enrolamentos amortecedores de eixo direto e de eixo em quadratura $D$ e $Q$ respectivamente, e o enrolamento de campo apenas no eixo direto, enrolamento $F$, seguindo a designação mais comum na literatura.

enrolamento de campo: $L_{FF} = L_F$ (4.64)

enrolamento amortecedor de eixo direto: $L_{DD} = L_D$ (4.65)

enrolamento amortecedor de eixo em quadratura: $L_{QQ} = L_Q$ (4.66)

Para as indutâncias mútuas tem-se que:

campo e o enrolamento amortecedor *D*: $L_{FD} = L_{DF} = M_R$ (4.67)

campo e o enrolamento amortecedor *Q*: $L_{FQ} = L_{QF} = 0$ (4.68)

enrolamentos amortecedores *D* e *Q*: $L_{DQ} = L_{QD} = 0$ (4.69)

**Nota:** nas equações 4.68 e 4.69, as indutâncias mútuas entre os enrolamentos $D$ e $Q$ e entre os enrolamentos $F$ e $Q$, nesse sentido, são nulas, isso porque esses enrolamentos fictícios perfazem entre si um ângulo teórico de 90º. O fluxo indutor $\Phi$ da máquina síncrona é dado pela fórmula $\Phi = \oint_S \vec{B}.\hat{n}ds$, uma grandeza escalar do cálculo vetorial onde o integrando é o produto escalar do vetor indução magnética $\vec{B}$ pelo vetor relativo à área $d\vec{s} = \hat{n}ds$, um vetor normal à superfície $s$ por onde o fluxo passa. Essa integral, para o presente caso, é nula uma vez que o ângulo envolvido vale 90º.

## 4.4.6. Indutâncias Mútuas Entre Estator e Rotor

Considerando, ainda, a figura 4.16, e lembrando que a fem gerada no enrolamento de campo apresenta apenas a componente de eixo direto, torna-se possível a obtenção das expressões para as indutâncias mútuas do estator com o enrolamento de campo.

Sabe-se que a fmm gerada no campo da máquina síncrona é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{F}_F = N_f \, i_f \tag{4.70}$$

onde

$\mathcal{F}_F$ : fmm relativa ao eixo q

$i_f$ : corrente de campo

$N_f$ : número de espiras do enrolamento de campo

Porém, sabe-se também que, o fluxo gerado pelo campo é dado por:

$$\Phi_F = \Im_d \mathcal{F}_F \tag{4.71}$$

onde $\Phi_F$ é o fluxo magnético indutor

O fluxo na fase $a$, induzido a partir do campo, é fornecido pela expressão seguinte:

$$\Phi_{aF} = \Phi_F \cos\theta = \Im_d \mathscr{F}_F \cos\theta$$

de modo que se obtém:

$$\Phi_{aF} = \Im_d N_f i_f \cos\theta \tag{4.72}$$

Mas as seguintes relações da teoria podem ser utilizadas:

$$L_{aF} = \frac{N_f \Phi_{aF}}{i_F} \quad \therefore \quad L_{aF} = \frac{N_f \Im_d N_f i_f}{i_f} \cos\theta$$

Logo, a partir da expressão de $\Phi_{aF}$ da equação 4.72, tem-se que:

$$L_{aF} = N_f^2 \Im_d \cos\theta \tag{4.73}$$

ou simplesmente

$$L_{aF} = L_{Fa} = M_F \cos\theta \tag{4.74}$$

Analogamente, para as demais fases, tem-se que:

$$L_{bF} = L_{Fb} = M_F \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{4.75}$$

$$L_{cF} = L_{Fc} = M_F \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{4.76}$$

Para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se, considerando a fase $a$ e o enrolamento $D$:

$$L_{aD} = L_{Da} = \frac{N_a \Phi_{aD}}{i_a}$$

Mas sabe-se que o fluxo induzido no enrolamento amortecedor de eixo direto pelo fluxo da fase $a$ é fornecido pela expressão seguinte:

$$\phi_{aD} = \Im_d \, \mathcal{F}_a \cos\theta \tag{4.77}$$

Logo, a partir da expressão de $\Phi_{aD}$ da equação 4.77, tem-se que:

$$L_{aD} = \frac{N_a}{i_a} \Im_d N_a i_a \cos\theta = N_a^2 \Im_d \cos\theta$$

Portanto

$$L_{aD} = L_{Da} = M_D \cos\theta \tag{4.78}$$

Analogamente para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se:

$$L_{bD} = L_{Db} = M_D \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{4.79}$$

$$L_{cD} = L_{Dc} = M_D \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{4.80}$$

Para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo em quadratura, $Q$, tem-se um caso análogo ao anterior, porém com a projeção executada sobre o eixo $q$.

Assim

$$L_{aQ} = L_{Qa} = M_Q \sin\theta \tag{4.81}$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = M_Q \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{4.82}$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = M_Q \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{4.83}$$

onde

$$M_Q = N_a^2 \Im_q$$

## 4.4.7. Equações dos Fluxos Enlaçados e Desenvolvimento

Considerando-se a equação 4.40, relativa aos fluxos enlaçados envolvidos com a máquina síncrona, e em seus valores instantâneos, numa forma simbólica mais compacta, vem:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{a,b,c} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Multiplicando os membros da equação 4.84 pela matriz seguinte indicada na equação matricial obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a,b,c} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

onde

$I$ é uma matriz unitária $3x3$ e $P$ a matriz da transformação $d - q - 0$

Promovendo-se as operações, inclusive a multiplicação do segundo membro da equação 4.86 pelo produto unitário matricial $[P^{-1} P] = 1$, vem que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

E também:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o,d,q} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

A equação matricial 4.87 encontra-se numa forma compactada. Descompactando-a obtém-se a seguinte equação:

$$
\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \hline \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ \hline 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ \hline i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \qquad (4.88)
$$

onde

$$K = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$L_d = L_s + M_s + \frac{3}{2} L_m$$

$$L_q = L_s + M_s - \frac{3}{2} L_m$$

$$L_0 = L_s - 2M_s$$

---

## EXEMPLO 4.4

Comprovar os parâmetros $K$, $L_d$, $L_q$, $L_0$ da equação matricial 4.88, na operação $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, onde as submatrizes $L_{EE}$, $L_{ER}$, $L_{RE}$, $L_{RR}$, $P$ e $P^{-1}$ têm as suas expressões dadas pelas equações:

- $L_{EE}$ → equações 4.51; 4.52; 4.53; 4.61; 4.62; 4.63

- $L_{ER}$ → equações 4.78, 4.79, 4.80, 4.81, 4.82, 4.83

- $L_{RE}$ → equações 4.78, 4.79, 4.80, 4.81, 4.82, 4.83

- $L_{RR}$ → equações 4.64; 4.65; 4.66; 4.67; 4.68; 4.69

- $P$ → equação 4.28

- $P^{-1}$ → equação 4.33

**Solução:**

A idéia agora é montar, de modo descompactado, as submatrizes que foram indicadas no enunciado do problema.

Assim, tem-se, para as <u>indutâncias próprias e mútuas do estator</u> da máquina síncrona, que:

$$L_{EE} = \begin{bmatrix} L_s + L_m \cos 2\theta & -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) & -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6}) \\ -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) & L_s + L_m \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -M_s - L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6}) & -M_s - L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2}) & L_s + L_m \cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

E para as <u>indutâncias mútuas entre estator e rotor</u> da máquina síncrona:

$$L_{ER} = \begin{bmatrix} M_F \cos\theta & M_D \cos\theta & M_Q \sin\theta \\ M_F \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_D \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_Q \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_F \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & M_D \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & M_Q \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

E para as <u>indutâncias mútuas entre rotor e estator</u> da máquina síncrona:

$$L_{RE} = \begin{bmatrix} M_F \cos\theta & M_F \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_F \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ M_D \cos\theta & M_D \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_D \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ M_Q \sin\theta & M_Q \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_Q \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

E para as <u>indutâncias próprias e mútuas do rotor</u> da máquina síncrona:

$$L_{RR} = \begin{bmatrix} L_F & M_R & 0 \\ M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação é dada pela matriz seguinte, seguida de sua inversa:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

e

$$P^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos\theta & \sin\theta \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

Efetuando-se as operações, operações estas que se caracterizam mais por um trabalho mecânico, chega-se à matriz referente ao resultado pedido pelo problema.

Assim, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ \hline 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array}\right]$$

onde

$$K = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$L_d = L_s + M_s + \frac{3}{2} L_m$$

$$L_q = L_s + M_s - \frac{3}{2} L_m$$

$$L_0 = L_s - 2M_s$$

**Nota a respeito do exemplo 4.4:**

Se forem analisadas as equações anteriores 4.51 e 4.61 que expressam as parcelas síncrona e não síncrona relativas às indutâncias próprias e mútuas do estator da máquina síncrona, em função do número de espiras e das permeâncias magnéticas dos eixos $d$ e $q$, relativamente à fase $a$, imaginando que o sistema em questão seja equilibrado, vem que:

$$L_s = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{2} \quad \text{e} \quad M_s = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{4}$$

Logo:

$$L_0 = L_s - 2M_s = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{2} - 2\,N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{4} = 0$$

Para as demais indutâncias, que antes da transformação eram influenciadas pelo ângulo referente à posição, a cada instante, do rotor em relação ao estator da máquina síncrona, fica claro que na equação 4.88 não há mais essa dependência. Os valores dessas indutâncias sujeitam-se agora apenas aos elementos fixados pelo projeto tais como número de espiras, material ferromagnético empregado na fabricação dos núcleos, dimensões especificadas, etc.

## 4.4.8. Equações das Tensões

O esquema do diagrama da figura 4.18 mostra os circuitos dos enrolamentos componentes de uma máquina síncrona real operando como gerador.
Considerando o esquema da figura 4.18, segue então a equação matricial compactada das tensões envolvidas na máquina síncrona, em seus valores instantâneos.

$$V - V_n + r\,i - \dot{\lambda} + 0 \qquad (4.89)$$

De maneira expandida, a equação matricial anterior toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \\ \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.90)$$

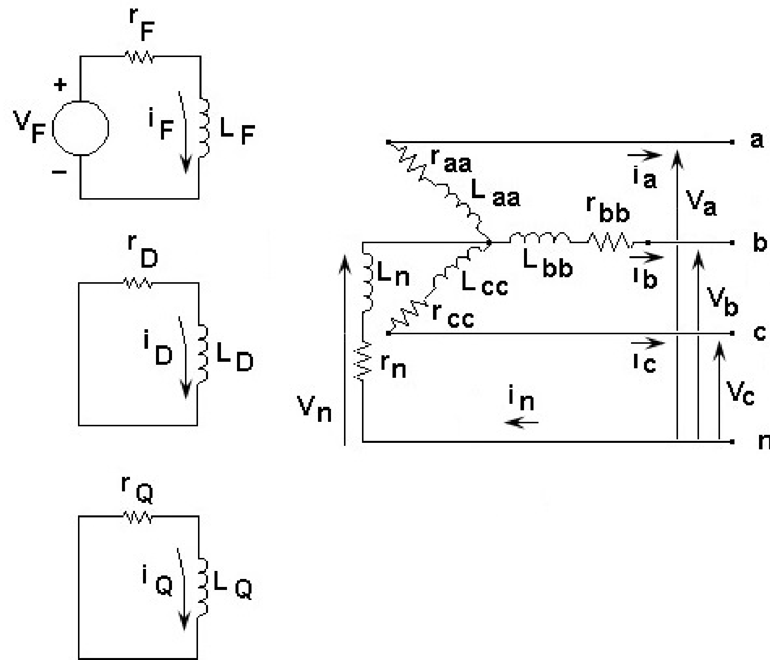



***Figura 4.18 – Enrolamentos Reais da Máquina Síncrona***

**Nota:** o ponto sobre as variáveis das equações 4.89 e 4.90 diz respeito à derivada dessas variáveis em relação variável independente tempo.

Na figura 4.18 considerar, além das variáveis e parâmetros conhecidos e já definidos anteriormente, a seguinte legenda:

$r_{aa,bb,cc}$ : resistências dos enrolementos das fases da máquina síncrona

$v_F$ : tensão instantânea de campo

$i_n$ : corrente de neutro do estator da máquina

$r_n$ : resistência de neutro do estator da máquina

$L_n$ : indutância de neutro do estator da máquina

Para determinação da matriz $V_n$ tem-se:

$$V_n = -\begin{bmatrix} r_n & r_n & r_n \\ r_n & r_n & r_n \\ r_n & r_n & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_n & L_n & L_n \\ L_n & L_n & L_n \\ L_n & L_n & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

De maneira mais resumida, a equação 4.91 toma a seguinte forma mais compacta:

$$V_n = -R_n\, i_{a,b,c} - L_n\, \dot{i}_{a,b,c} \quad (4.92)$$

De maneira compacta, a equação 4.90 poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} V_{a,b,c} \\ V_{F,D,Q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a,b,c} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{a,b,c} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.93)$$

Aplicando-se à equação 4.93 a transformação $d-q-0$**,** pela matriz $P$, sobre as variáveis das tensões e buscando-se analisar cada uma das parcelas em separado, vem:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a,b,c} \\ V_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{0,d,q} \\ V_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Também, para a parcela seguinte da equação 4.93, inclusive com a multiplicação da matriz de correntes pelo produto unitário matricial $[P^{-1}P] = 1$ vem que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a,b,c} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a,b,c} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{o,d,q} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix}$$

(4.95)

Também, para a parcela seguinte da equação 4.93, vem:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{a,b,c} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\,\dot{\lambda}_{a,b,c} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} \qquad (4.96)$$

Para o cálculo da parte $P\,\dot{\lambda}_{a,b,c}$ será promovido o seguinte raciocínio:

$$\lambda_{o,d,q} = P\,\lambda_{a,b,c}$$

$$\dot{\lambda}_{o,d,q} = \dot{P}\,\lambda_{a,b,c} + P\,\dot{\lambda}_{a,b,c} \quad \therefore \quad P\,\dot{\lambda}_{a,b,c} = \dot{\lambda}_{o,d,q} - \dot{P}\,\lambda_{a,b,c}$$

A partir daí, introduzindo novamente produto unitário matricial $[P^{-1}P] = 1$, vem que:

$$P\,\dot{\lambda}_{a,b,c} = \dot{\lambda}_{o,d,q} - \dot{P}P^{-1}P\lambda_{a,b,c} \quad \therefore \quad P\,\dot{\lambda}_{a,b,c} = \dot{\lambda}_{o,d,q} - [\dot{P}P^{-1}]\,\lambda_{o,d,q}$$

(4.97)

A partir das equações 4.28 e 4.33, obtém-se a expressão para o produto matricial $\dot{P}P^{-1}$.

Assim:

$$\dot{P} P^{-1} \lambda_{o,d,q} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_o \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega L_q i_q - \omega K M_Q i_Q \\ \omega L_d i_d + \omega K M_F i_F + \omega K M_D i_D \end{bmatrix}$$

(4.98)

**Nota:** na equação matricial 4.98, na composição das chamadas tensões motoras originárias da operação matricial aplicada, foram incluídas as influências dos enrolamentos de campo e amortecedor.

E finalmente:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\,V_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

Utilizando-se da equação 4.92 multiplicada pela matriz de transformação $P$, vem:

$$P\,V_n = -P R_n\, i_{a,b,c} - P L_n\, \dot{i}_{a,b,c} \quad (4.100)$$

Aplicando, novamente, o produto unitário matricial $[P^{-1} P] = 1$ na equação 4.100, obtém se que.

$$P\,V_n = -P R_n P^{-1} P i_{a,b,c} - P L_n P^{-1} P\, \dot{i}_{a,b,c} \quad (4.101)$$

O produto matricial $P R_n P^{-1} P i_{a,b,c}$ pode ser calculado e permite escrever:

$$P R_n P^{-1} i_{o,d,q} = \begin{bmatrix} 3 r_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 r_n i_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Para o produto $P L_n P^{-1} P\, \dot{i}_{a,b,c}$, pela equação 4.97, tomando-se analogia dos fluxos enlaçados $\lambda_{a,b,c}$ para as correntes $i_{a,b,c}$, vem:

$$PL_nP^{-1}[P\dot{i}_{a,b,c}] = PL_nP^{-1}\left[\dot{i}_{o,d,q} - \dot{P}P^{-1}i_{o,d,q}\right] =$$

$$= PL_nP^{-1}[\dot{i}_{o,d,q} - \omega\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}] = \qquad (4.103)$$

$$= PL_nP^{-1}[\begin{bmatrix} \dot{i}_o \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega i_q \\ \omega i_d \end{bmatrix}]$$

Levando-se a expressão obtida na equação 4.102, para o produto matricial $PR_nP^{-1}$, e aplicando-o, como analogia, para o produto $PL_nP^{-1}$, da equação 4.103, vem que:

$$PV_n = \begin{bmatrix} 3Ln & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{i}_o \\ \dot{i}_d + \omega i_q \\ \dot{i}_q - \omega i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3Ln\,\dot{i}_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deste modo, obtém-se, finalmente, para a equação 4.100 que:

$$PV_n = -\begin{bmatrix} 3r_n\,\dot{i}_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3L_n\,\dot{i}_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.104)$$

Reunindo todas as expressões obtidas das equações 4.94, 4.95, 4.98 e 4.104, a equação 4.93 fica transformada para o sistema de eixos $d-q-0$ segundo a seguinte forma matricial compactada:

$$\begin{bmatrix} V_{o,d,q} \\ V_{F,D,Q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} PV_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{o,d,q} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{o,d,q} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{P}P^{-1}\lambda_{o,d,q} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

(4.105)

Supondo-se que o sistema seja equilibrado, a simetria garante que $V_n = 0$.

Em resumo, a equação matricial 4.88 ficará então do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{o,d,q} & L_m \\ L^T{}_m & L_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{o,d,q} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} \qquad (4.106)$$

com

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{o,d,q} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{o,d,q} & L_m \\ L^T{}_m & L_{F,D,Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{o,d,q} \\ \dot{i}_{F,D,Q} \end{bmatrix} \qquad 4.107)$$

A equação 4.105, de maneira expandida, tomará a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \\ \hline -v_F \\ v_D = 0 \\ v_Q = 0 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ \hline i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_o \\ \dot{\lambda}_d \\ \dot{\lambda}_q \\ \hline \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\lambda_q \\ -\omega\lambda_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3r_n i_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3L_n \dot{i}_o \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

(4.108)

Utilizando-se das relações oriundas das equações 4.106 e 4.107, a equação 4.108 tomará a forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \\ \hdashline -v_F \\ v_D=0 \\ v_Q=0 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc:ccc} r_a+3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r_c & -\omega M_F & -\omega KM_D & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ \hdashline i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} +$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc:ccc} L_o+3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ \hdashline 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{i}_o \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \hdashline \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.109)$$

Utilizando a equação (4.108), pode-se representar o circuito equivalente para uma máquina síncrona, como se vê na figura 4.19, com $r_a = r_b = r_c = r$ uma vez que todo projetista de máquina síncrona persegue esta condição.

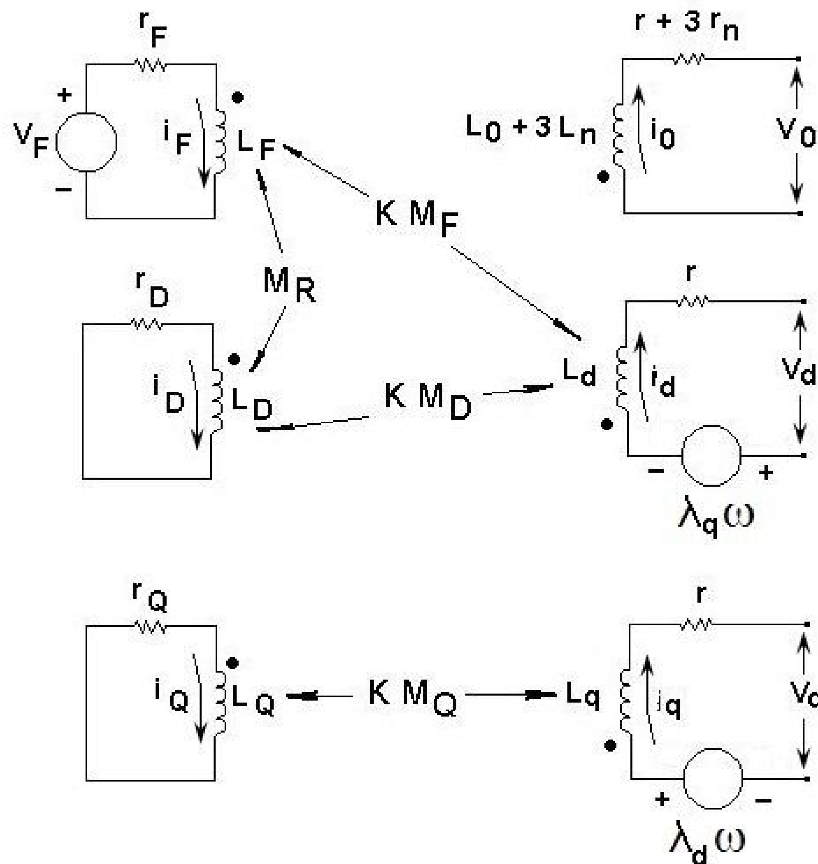



***Figura 4.19 – Circuito Equivalente da Máquina Síncrona***

Pela figura 4.19, pode-se perceber, no circuito dos eixos $d$ e $q$, a presença de duas tensões que são proporcionais ao movimento atual de rotação do conjunto e que são chamadas tensões de rotação.
Portanto, as relações obtidas não são lineares, mas, por aproximação, tomando-se a velocidade de rotação $\omega$ como constante, uma vez que a máquina síncrona dispõe um regulador de velocidade, o problema fica resolvido obtendo-se a linearização procurada. Lembrar que é bem prático se trabalhar com equações lineares.

## 4.4.9. Valores em Por Unidade no Estudo da Máquina Síncrona

Cabe aqui uma observação, para a utilização das equações da máquina síncrona em por unidade há necessidade de se proceder à normalização das grandezas envolvidas no processo.
Para a normalização das grandezas utilizadas deverá ser adotado um referencial baseado no rotor, proposição feita por alguns autores apesar da escolha depender de certos critérios.
Os fluxos enlaçados mútuos dependem da parcela mútua das indutâncias que compõem o sistema magnético da máquina síncrona.
Considerando as parcelas do fluxo mútuo e do fluxo de dispersão, por definição, pode-se escrever a seguinte expressão para o valor total da

indutância de eixo direto da máquina síncrona, primeiro caso a ser visto e a ser seguido daqui para frente neste livro.

$$L_d = L_{md} + L_{dd} \tag{4.110}$$

onde

$L_{md}$ : indutância mútua útil referente ao eixo $d$

$L_{dd}$ : indutância de dispersão referente ao eixo $d$ que é perdida no entreferro

Assim, ficam definidas, para todas as indutâncias em jogo, as relações seguintes referentes às parcelas úteis de cada uma em seu respectivo enrolamento conforme é mostrado na figura 4.19:

$$\begin{aligned} L_{md} &= L_d - L_{dd} \\ L_{mq} &= L_q - L_{dq} \\ L_{mF} &= L_F - L_{dF} \\ L_{mD} &= L_D - L_{dD} \\ L_{mQ} &= L_Q - L_{dQ} \end{aligned} \tag{4.111}$$

As relações elementares para um determinado valor de fluxo enlaçado $\lambda_B$, aqui tomado como um valor base que construirá a base de valores a ser escolhida no processo de normalização envolvendo outras grandezas tais como a tensão base $V_B$, a indutância base $L_B$ , a corrente base $I_B$ e rotação base $\omega_B$, são as seguintes:

$$\lambda_B = L_B I_B \tag{4.112}$$

$$\lambda_B = \frac{V_B}{\omega_B} = L_B I_B \tag{4.113}$$

com

$$\omega_B = \frac{1}{t_B} \tag{4.114}$$

Notar que a equação 4.114 define uma grandeza que não deve ser confundida, trata-se do tempo base que é exatamente o inverso da velocidade angular elétrica, o que para o SIN tem seu valor aproximado para $\omega_B = 2\pi\, 60 = 377\ rad/s$.

As seguintes premissas serão obedecidas:

$S_B = V_B I_B$ → potência para sistemas monofásicos.

$S_B = \sqrt{3}\, V_B I_B$ → potência total para sistemas trifásicos.

onde

$S_B$ : MVA trifásico de base para sistemas trifásicos

$V_B$ : kV trifásico de base para sistemas trifásicos

Podem-se então definir, a partir de certas condições, as grandezas básicas do rotor.

Assim, tem-se que:

$$\lambda_{md} = L_{md} I_B = KM_F I_{FB} = KM_D I_{DB}$$

$$\lambda_{mF} = KM_F I_B = L_{mF} I_{FB} = M_R I_{DB}$$

$$\lambda_{mD} = KM_D I_B = M_R I_{FB} = L_{mD} I_{DB} \qquad (4.115)$$

$$\lambda_{mq} = L_{mq} I_B = KM_Q I_{QB}$$

$$\lambda_{mQ} = KM_Q I_B = L_{mQ} I_{QB}$$

Nas equações 4.115, a idéia foi obter uma escolha de correntes base que, a partir da corrente base circulante por um determinado enrolamento, através de sua indutância própria útil, obter uma corrente induzida base nos outros enrolamentos por esse primeiro enrolamento influenciado por intermédio das indutâncias mútuas.

---

## EXEMPLO 4.5

Utilizando-se das equações 4.115, provar que as indutâncias mútuas em pu $KM_{FU}$ e $KM_{DU}$ são iguais.

**Solução:**

Das equações 4.115, podem-se escrever as seguintes relações:

$$\lambda_{md} = L_{md} I_B = KM_F I_{FB} = KM_D I_{DB}$$

Tomando-se a última igualdade tem-se:

$$KM_F \, I_{FB} = KM_D \, I_{DB} \quad \therefore \quad \frac{KM_F}{KM_D} = \frac{I_{DB}}{I_{FB}} \tag{4.116}$$

Porém sabe-se ainda da equação 4.113 que:

$$KM_{FB} = \frac{V_B}{\omega_B \, I_{FB}} \qquad \therefore \qquad I_{FB} = \frac{V_B}{\omega_B \, KM_{FB}} \tag{4.117}$$

$$KM_{DB} = \frac{V_B}{\omega_B \, I_{DB}} \qquad \therefore \qquad I_{DB} = \frac{V_B}{\omega_B KM_{DB}} \tag{4.118}$$

Levando na equação 4.116 as expressões encontradas nas equações 4.117 e 4.118 para as correntes de base $I_{FB}$ e $I_{DB}$, obtém-se:

$$\frac{KM_F}{KM_D} = \frac{\dfrac{V_B}{\omega_B KM_{DB}}}{\dfrac{V_B}{\omega_B KM_{FB}}} = \frac{KM_{FB}}{KM_{DB}} \quad \therefore \quad \frac{KM_F}{KM_{FB}} = \frac{KM_D}{KM_{DB}} \quad \therefore \quad KM_{FU} = KM_{DU}$$

Por analogia ao resultado obtido anteriormente, pode-se generalizar para os circuitos dos eixos $d$ e $q$ da máquina síncrona que:

$$\begin{gathered} L_{mdu} = L_{mFu} = L_{mDu} = KM_{FU} = KM_{DU} = M_{RU} \\ L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{QU} \end{gathered} \tag{4.119}$$

As equações 4.119 são de extrema importância quando da elaboração dos circuitos equivalentes de eixos $d$ e $q$, em pu, da máquina síncrona.

**Nota a respeito do exemplo 4.5:**

Observar sempre que, na definição dos valores base para as indutâncias $KM_{FB}$ e $KM_{DB}$, nas equações 4.117 e 4.118, a tensão base se refere ao enrolamento em questão, porém a corrente base se refere ao enrolamento que criou o fluxo magnético. Essa proposta de base de valores é assim adotada para que os valores em pu das indutâncias mútuas sejam iguais, uma particularidade opcional visando à obtenção de facilidades para futuros cálculos.

## EXEMPLO 4.6

Comprovar as equações 4.115 a partir de uma condição genérica.

**Solução:**

Para a comprovação propriamente dita, será utilizado nas variáveis um subscrito, apenas nesse exemplo, para que fique bem indicado a qual dos circuitos equivalentes $d$, $D$, $F$, $q$ e $Q$ o cálculo se refere.

Imaginando uma escolha genérica para as correntes de base circulantes, tem-se o seguinte raciocínio.

a) enrolamento $d$

Os fluxos enlaçados vistos do enrolamento $d$ serão os seguintes então:

$$\begin{aligned} \lambda_{md_d} &= L_{md} I_B \\ \lambda_{mF_d} &= L_{mF} I_{FB} \\ \lambda_{mD_d} &= L_{mD} I_{DB} \end{aligned} \tag{4.120}$$

Para os fluxos anteriores, a tensão base será sempre a tensão referente ao eixo $d$, ou seja, $V_B$, já que o efeito se dá no enrolamento de estator.

Tomando-se os valores em pu para cada um dos três fluxos enlaçados da equação 4.120 vem que:

$$\lambda_{md_{du}} = \frac{\lambda_{md_d}}{\lambda_{md_{dB}}} = \frac{L_{md} I_B}{L_{mdB} I_B} = \frac{L_{md}}{L_{mdB}} \tag{4.121}$$

A indutância base referente ao eixo $d$ é dada por:

$$L_{mdB} = \frac{V_B}{\omega_B I_B} \tag{4.122}$$

Com a expressão anterior, a equação 4.121 pode ser assim reescrita:

$$\lambda_{md_{du}} = \frac{\omega_B I_B}{V_B} L_{md} \tag{4.123}$$

Por analogia, os três fluxos enlaçados para $\lambda_{mF_{du}}$ e $\lambda_{mD_{du}}$ serão:

$$\lambda_{mF_{du}} = \frac{\omega_B I_{FB}}{V_B} KM_F \tag{4.124}$$

e

$$\lambda_{mD_{du}} = \frac{\omega_B I_{DB}}{V_B} KM_D \tag{4.125}$$

Para que, por suposição, os fluxos enlaçados em pu, relativos ao eixo em questão, sejam iguais, as seguintes relações deverão ser cumpridas:

$$\lambda_{md_{du}} = \lambda_{mF_{du}} = \lambda_{mD_{du}} \tag{4.126}$$

Deste modo, tem-se então que:

$$I_B L_{md} = I_{FB} KM_F = I_{DB} KM_D = \lambda_{md} \tag{4.127}$$

b) enrolamento $q$

Estendendo o raciocínio para o enrolamento $q$ vem:

$$I_B L_{mq} = I_{QB} KM_Q = \lambda_{mq} \tag{4.128}$$

c) enrolamento $F$

Para o enrolamento de campo, em termos de fluxo magnético enlaçado, considerando-se a circulação da corrente base desse enrolamento, tem-se que:

$$\lambda_{mF_F} = L_{mF} I_{FB}$$

Tomando o valor em pu para fluxo magnético enlaçado desse enrolamento, obtém-se:

$$\lambda_{mF_{Fu}} = \frac{L_{mF} I_{FB}}{L_{mFB} I_{FB}} \tag{4.129}$$

A indutância base referente ao eixo $F$ é dada por:

$$L_{mFB} = \frac{V_{FB}}{\omega_B I_{FB}} \tag{4.130}$$

Com a expressão anterior, a equação 4.129 pode ser assim reescrita:

$$\lambda_{mF_{Fu}} = \frac{\omega_B I_{FB}}{V_{FB}} L_{mF} \qquad (4.131)$$

Por analogia, os fluxos enlaçados para $\lambda_{mF_{du}}$ e $\lambda_{mD_{du}}$ serão:

$$\lambda_{md_{Fu}} = \frac{\omega_B I_B}{V_{FB}} KM_F \qquad (4.132)$$

e

$$\lambda_{mD_{Fu}} = \frac{\omega_B I_D}{V_{FB}} M_R \qquad (4.133)$$

Também aqui, para que, por suposição, os fluxos enlaçados em pu, relativos ao eixo em questão, sejam iguais, as seguintes relações deverão ser cumpridas:

$$\lambda_{md_{Fu}} = \lambda_{mF_{Fu}} = \lambda_{mD_{Fu}} \qquad (4.134)$$

Deste modo também, tem-se então que:

$$I_{FB} L_{mF} = I_B KM_F = I_{DB} M_R = \lambda_{mF} \qquad (4.135)$$

d) enrolamentos $D$ e $Q$

Por analogia, podem-se escrever as seguintes equações para os fluxos enlaçados nesses enrolamentos:

$$I_{DB} L_{mD} = I_B KM_D = I_{FB} M_R = \lambda_{mD} \qquad (4.136)$$

e

$$I_{QB} L_{mQ} = I_B KM_Q = \lambda_{mQ} \qquad (4.137)$$

Ficando, deste modo, comprovadas as equações 4.115.

**Nota a respeito do exemplo 4.6:**

Multiplicando-se as equações 4.127, 4.135 e 4.136, relativas ao eixo $d$, respectivamente, por $I_B$, $I_{FB}$ e $I_{DB}$, vem que:

$$\lambda_{md} I_B = L_{md} I_B^2 = KM_F I_{FB} I_B = KM_D I_{DB} I_B \quad (4.138)$$

e

$$\lambda_{mF} I_{FB} = KM_F I_B I_{FB} = L_{mF} I_{FB}^2 = M_R I_{FB} I_{DB} \quad (4.139)$$

e

$$\lambda_{mD} I_{DB} = KM_D I_B I_{DB} = M_R I_{FB} I_{DB} = L_{mD} I_{DB}^2 \quad (4.140)$$

Do mesmo modo para o eixo $q$, multiplicando-se as equações 4.128 e 4.137, respectivamente, por $I_B$ e $I_{QB}$, vem que:

$$\lambda_{mq} I_B = L_{mq} I_B^2 = KM_Q I_{QB} I_B \quad (4.141)$$

e

$$\lambda_{mQ} I_{QB} = KM_Q I_B I_{QB} = L_{mQ} I_{QB}^2 \quad (4.142)$$

Por uma imposição do problema, as equações 4.138, 4.139 e 4.140, relativas ao eixo $d$, são iguais, logo vale a seguinte relação primordial:

$$L_{md} I_B^2 = L_{mF} I_{FB}^2 = L_{mD} I_{DB}^2 = KM_F I_{FB} I_B = KM_D I_{DB} I_B = M_R I_{FB} I_{DB} \quad (4.143)$$

Do mesmo modo para o eixo $q$, as equações 4.141 e 4.142 são iguais, logo vale a outra relação primordial:

$$L_{mq} I_B^2 = L_{mQ} I_{QB}^2 = KM_Q I_{QB} I_B \quad (4.144)$$

As equações 4.138, 4.139, 4.140, 4.141 e 4.142, chamadas aqui de equações primordiais, são relações que confirmam que as potências desenvolvidas nos diferentes enrolamentos dos eixos $d$ e $q$ da máquina síncrona, em termos dos valores base escolhidos nesse contexto, são iguais.

Na realidade, as equações 4.115 são uma conseqüência da condição imposta relativa à conservação da energia entre os enrolamentos dos eixos $d$ e $q$ da máquina síncrona.

Considerando as equações 4.143 e 4.144, além de se manter a mesma potência base de valores, podem-se escrever, para os três enrolamentos do rotor, as seguintes expressões:

$$\frac{I_{FB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{FB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mF}}} = \frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} = \frac{KM_D}{M_R} = K_F \qquad (4.145)$$

$$\frac{I_{DB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{DB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mD}}} = \frac{L_{md}}{KM_D} = \frac{KM_D}{L_{mD}} = \frac{KM_F}{M_R} = K_D \qquad (4.146)$$

$$\frac{I_{QB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{QB}} = \sqrt{\frac{L_{mq}}{L_{mQ}}} = \frac{L_{mq}}{KM_Q} = \frac{KM_Q}{L_{mQ}} = K_Q \qquad (4.147)$$

Assim, as variáveis de corrente de base e de tensão de base são escolhidas de modo que em qualquer enrolamento a potência base seja sempre a mesma.

Portanto, conhecendo-se $L_B$ e $R_B$, das bases do estator, vem:

$$\frac{R_{FB}}{R_B} = \frac{1}{K_F{}^2} \quad , \quad \frac{R_{DB}}{R_B} = \frac{1}{K_D{}^2} \quad , \quad \frac{R_{QB}}{R_B} = \frac{1}{K_Q{}^2} \qquad (4.148)$$

$$\frac{L_{FB}}{L_B} = \frac{1}{K_F{}^2} \quad , \quad \frac{L_{DB}}{L_B} = \frac{1}{K_D{}^2} \quad , \quad \frac{L_{QB}}{L_B} = \frac{1}{K_Q{}^2} \qquad (4.149)$$

E para as indutâncias mútuas será utilizada uma propriedade extraída da equação 4.145, senão veja-se.

$$\frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} \quad \therefore \quad KM_F{}^2 = L_{md}\, L_{mF} \qquad (4.150)$$

**Nota:** nessa propriedade, nota-se que, considerando o efeito mútuo entre dois circuitos magneticamente conectados, o produto das indutâncias próprias úteis de cada circuito elétrico é igual ao quadrado da indutância mútua verificada entre ambos.

Deste modo, por conseqüência, levando-se em conta uma base de valores previamente definida, o quadrado do valor da indutância mútua base entre dois circuitos magneticamente conectados será igual ao produto dos valores das indutâncias próprias base de cada um dos circuitos envolvidos.

Assim:

$$M_{FB}^{2} = L_B L_{FB} \quad \therefore \quad \frac{M_{FB}}{L_B} = \frac{L_{FB}}{M_{FB}} \tag{4.151}$$

Mas, da equação 4.145, tem-se que $\frac{L_{md}}{KM_F} = K_F$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{FB}}{L_B} = \frac{1}{K_F} \tag{4.152}$$

Mas, da equação 4.146, tem-se que $\frac{L_{md}}{KM_D} = K_D$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{DB}}{L_B} = \frac{1}{K_D} \tag{4.153}$$

Mas, da equação 4.147, tem-se que $\frac{L_{mq}}{KM_Q} = K_Q$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{QB}}{L_B} = \frac{1}{K_Q} \tag{4.154}$$

Da equação 4.145 tem-se que:

$$\frac{KM_D}{M_R} = K_F \quad \therefore \quad \frac{L_{md}}{L_{md}} \frac{KM_D}{M_R} = K_F \quad \therefore \quad \frac{M_R}{L_{md}} = \frac{1}{K_F} \frac{KM_D}{L_{md}} \tag{4.155}$$

Da equação 4.146 tem-se que:

$$\frac{KM_D}{L_{md}} = \frac{1}{K_D} \tag{4.156}$$

Logo, a partir da equação 4.155, obtém-se para a equação 4.156, que:

$$\frac{M_R}{L_{md}} = \frac{1}{K_F K_D} \tag{4.157}$$

Em termos de relação base, a partir da equação 4.157, vem que:

$$\frac{M_{RB}}{L_B} = \frac{1}{K_F K_D} \tag{4.158}$$

A equação 4.158 completa o conjunto de equações envolvendo os valores base fornecendo o caminho para o cálculo das demais relações.

---

## 4.4.10. Valores Eficazes para as Grandezas do Estator e do Rotor

O que se pretende nesta seção é comparar duas grandezas fasoriais, uma original referida ao estator, fases $a,b,c$ e outra, resultante da transformação $d-q-0$, no rotor.

Para isto serão tomadas, como exemplo, as tensões de fase de um sistema trifásico equilibrado em seus valores instantâneos, como no sistema de equações seguinte.

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{2}\, V \sin\,(\theta + \alpha\,) \\ v_b &= \sqrt{2}\, V \sin(\theta + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ v_c &= \sqrt{2}\, V \sin(\theta + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \tag{4.159}$$

Utilizando-se da transformação $d-q-0$, vem que:

$$V_{0,d,q} = P\, V_{a,b,c} \tag{4.160}$$

Aplicando a transformação no sistema de equações 4.159 obtêm-se as equações 4.161.

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ v_d &= \sqrt{3}\, V \sin\alpha \\ v_q &= \sqrt{3}\, V \cos\alpha \end{aligned} \tag{4.161}$$

Considerando agora as seguintes correntes de fase relativas ao estator do sistema trifásico em questão obtém-se:

$$
\begin{aligned}
i_a &= \sqrt{2}\, I \sin(\theta + \gamma) \\
i_b &= \sqrt{2}\, I \sin(\theta + \gamma - \frac{2\pi}{3}) \\
i_c &= \sqrt{2}\, I \sin(\theta + \gamma + \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}
\qquad (4.162)
$$

Aplicando-se a transformação $d - q - 0$ às equações 4.162 vem que:

$$
\begin{aligned}
i_o &= 0 \\
i_d &= \sqrt{3}\, I \sin\gamma \\
i_q &= \sqrt{3}\, I \cos\gamma
\end{aligned}
\qquad (4.163)
$$

Calculando-se as expressões para as potências instantâneas envolvidas vem:

a) sistema $a,b,c$

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c$$

Desenvolvendo-se a partir das equações 4.159 e 4.162 vem que:

$$p = 2VI\ [\sin\psi\ \sin\beta + \sin(\psi - \frac{2\pi}{3})\ \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) + \sin(\psi + \frac{2\pi}{3})\ \sin(\beta + \frac{2\pi}{3})] =$$

$$= 2VI\frac{3}{2}\cos(\psi - \beta) = 3VI\cos(\psi - \beta)$$

Finalmente, considerando-se na expressão anterior da potência instantânea, que $\psi = \theta + \alpha$ e $\beta = \theta + \gamma$ vem:

$$p = 3VI\cos(\alpha - \gamma) \qquad (4.164)$$

**Nota:** observar que a equação 4.163 obtida através das condições impostas pela teoria até aqui desenvolvida, nada mais é que a conhecida equação de potência ativa elétrica envolvida com a máquina síncrona, considerando o sistema equilibrado.
A figura 4.20 mostra o diagrama vetorial das tensões considerando-se a fase $A$.

b) sistema $d - q - 0$

$$p = v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0$$

Desenvolvendo-se a partir das equações 4.161 e 4.163 vem que:

$$p = 3VI\ [\sin\alpha \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma]$$

Finalmente, considerando-se na expressão anterior da potência instantânea, vem que:

$$p = 3VI\,cos\,(\alpha - \gamma)$$

Portanto, fica comprovada a invariância da potência na transformação $d - q - 0$.

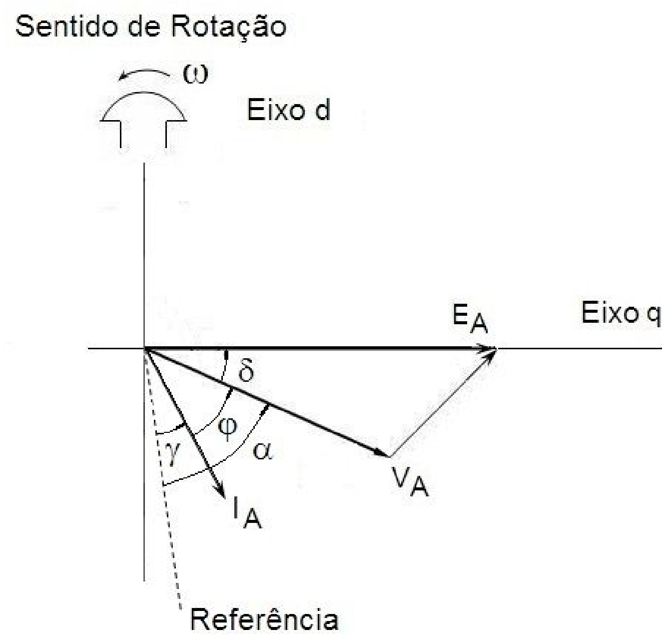



***Figura 4.20 – Diagrama Vetorial de Tensões e Correntes da Máquina Síncrona para a Fase A***

## 4.4.11. Equações em Por Unidade

Colocando a equação matricial 4.109, que se encontra em valores atuais, em por unidade obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} V_B v_{ou} \\ V_B v_{du} \\ V_B v_{qu} \\ \hline -V_{FB} v_{Fu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_o + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r & -\omega kM_F & -\omega KM_D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_B i_{0u} \\ I_B i_{du} \\ I_B i_{qu} \\ \hline I_{FB} i_{Fu} \\ I_{DB} i_{Du} \\ I_{QB} i_{Qu} \end{bmatrix} +$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_o + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ \hline 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_B \dot{i}_{0u} \\ I_B \dot{i}_{du} \\ I_B \dot{i}_{qu} \\ \hline I_{FB} \dot{i}_{Fu} \\ I_{DB} \dot{i}_{Du} \\ I_{QB} \dot{i}_{Qu} \end{bmatrix} = 0$$

(4.165)

Analisando-se cada uma das tensões do vetor tensão, em separado, iniciando-se pelo eixo $d$ vem que:

$$v_{du} + r\frac{I_B}{V_B} i_{du} + \omega L_q \frac{I_B}{V_B} i_{qu} + \omega KM_Q \frac{I_{QB}}{V_B} i_{Qu} + L_d \frac{I_B}{V_B} \dot{i}_{du} + \\ + KM_F \frac{I_{FB}}{V_B} \dot{i}_{Fu} + KM_D \frac{I_{DB}}{V_B} \dot{i}_{Du} = 0 \quad (4.166)$$

Sabe-se que $\frac{1}{L_B \omega_B} = \frac{I_B}{V_B}$, assim a equação 4.166 se transforma na equação 4.167.

$$v_{du} + r_u i_{du} + \omega_u L_{qu} i_{qu} + \omega_u KM_{Qu} i_{Qu} + \frac{L_{du}}{\omega_B} \dot{i}_{du} + \frac{KM_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} + \frac{KM_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0$$

(4.167)

Analogamente, para o eixo $q$, vem:

$$v_{qu} - \omega_u L_{du} i_{du} + r_u i_{qu} - \omega_u KM_{Fu} i_{Fu} - \omega_u KM_{Du} i_{Du} + \frac{L_{qu}}{\omega_B} \dot{i}_{qu} + \frac{KM_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{Qu} = 0$$

(4.168)

Para o circuito de seqüência zero vem que:

$$v_{ou} + (r + 3r_n)\frac{I_B}{V_B} i_{ou} + (L_o + 3L_n)\frac{I_B \omega_B}{V_B \omega_B} \dot{i}_{ou} = 0$$

Assim, obtém-se a seguinte expressão:

$$v_{ou} + R_{ou} i_{ou} + \frac{L_{ou}}{\omega_B} \dot{i}_{ou} = 0 \qquad (4.169)$$

onde $R_{ou} = \frac{(r + 3r_n)}{V_B} I_B$ e $L_{ou} = \frac{(L_0 + 3L_n)}{V_B} I_B \omega_B$

Para o circuito de campo vem:

$$v_{Fu} - r_{Fu} i_{Fu} - \frac{KM_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{du} - \frac{L_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} - \frac{M_{RU}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0 \qquad (4.170)$$

E, para os enrolamentos amortecedores, tem-se:

$$r_{Du} i_{Du} + \frac{KM_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{du} + \frac{M_{Ru}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} + \frac{L_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0 \qquad (4.171)$$

$$r_{Qu} i_{Qu} + \frac{KM_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{qu} + \frac{L_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{Qu} = 0 \qquad (4.172)$$

Colocando as equações 4.167, 4.168, 4.169, 4.170, 4.171 e 4.172 na forma matricial completa, e normalizando o tempo nas parcelas que apresentam derivadas, obtém-se que:

$$
\begin{bmatrix} v_{ou} \\ v_{du} \\ v_{qu} \\ \hdashline -v_{Fu} \\ v_{Du}=0 \\ v_{Qu}=0 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc:ccc} R_{ou} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_u & L_{qu} & 0 & 0 & KM_{Qu} \\ 0 & -L_{du} & r_u & -kM_{Fu} & -KM_{Du} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & r_{Fu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{Qu} \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{ou} \\ i_{du} \\ i_{qu} \\ \hdashline i_{Fu} \\ i_{Du} \\ i_{Qu} \end{bmatrix} +
$$

$$
+\frac{1}{\omega_B}\left[\begin{array}{ccc:ccc} L_{ou} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{du} & 0 & KM_{Fu} & KM_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & L_{qu} & 0 & 0 & KM_{Qu} \\ \hdashline 0 & KM_{Fu} & 0 & L_{Fu} & M_{Ru} & 0 \\ 0 & KM_{Du} & 0 & M_{Ru} & L_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & KM_{Qu} & 0 & 0 & L_{Qu} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{i}_{ou} \\ \dot{i}_{du} \\ \dot{i}_{qu} \\ \hline \dot{i}_{Fu} \\ \dot{i}_{Du} \\ \dot{i}_{Qu} \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.173)
$$

## 4.4.12. Comportamento da Máquina Síncrona em Regime Permanente

Em regime permanente, considerando-se as condições equilibradas do sistema composto da máquina síncrona trifásica em questão, e desconsiderando-se a presença do enrolamento amortecedor, tem-se que o efeito transformador e a variação de rotação podem ser desprezados.

Deste modo, tem-se que:

$$
\dot{\lambda}_i = 0 \quad \text{e} \quad \Delta\omega \cong 0
$$

Da equação 4.109 obtém-se para a tensão de campo em regime permanente que:

$$
v_F = r_F i_F \qquad (4.174)
$$

Idem para a equação 4.88 relativa aos fluxos envolvidos para a operação como gerador síncrono. Podem-se obter as seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
\lambda_d &= L_d i_d + KM_F i_F \\
\lambda_q &= L_q i_q \\
\lambda_F &= L_F i_F + KM_F i_d
\end{aligned} \qquad (4.175)
$$

Da equação 4.108, considerando que as resistências $r_a = r_b = r_c = r$ , obtém-se a seguinte expressão de tensão instantânea para o eixo $q$ :

$$v_q = -r\,i_q + \omega\lambda_d \tag{4.176}$$

Trazendo-se na equação 4.176 a expressão do fluxo $\lambda_d$ das equações 4.88, e desconsiderando-se a presença do enrolamento amortecedor, vem:

$$v_q = -r\,i_q + \omega(L_d i_d + KM_F i_F) = -r\,i_q + \omega L_d i_d + \omega KM_F\,i_F \tag{4.177}$$

Da mesma maneira que a anterior, considerando agora o eixo $d$ , vem que:

$$v_d = -r\,i_d - \omega\lambda_q = -r\,i_d - \omega L_q\,i_q \tag{4.178}$$

Multiplicando a equação 4.178 pelo operador complexo $j$ , membro a membro, e igualando a equação a zero vem que:

$$jv_d + jr\,i_d + j\omega L_q\,i_q = jv_d + jr\,i_d + j\,X_q\,i_q = 0 \tag{4.179}$$

Para a equação de $v_q$ :

$$v_q + r\,i_q - X_d\,j\,i_d - \omega KM_F\,i_F = 0 \tag{4.180}$$

Aplicando-se alguns artifícios algébricos sobre a equação 4.179 obtém-se que:

$$jv_d + jr\,i_d + jX_q\,i_q + (\,j\,X_q\,j\,i_d - j\,X_q\,j\,i_d\,) = 0 \tag{4.181}$$

Para a equação 4.180, vem que:

$$v_q + r\,i_q - X_d\ i_d - e_q = 0 \tag{4.182}$$

Somando-se as equações 4.181 e 4.182 vem:

$$(v_q + j\,v_d) + r\,(i_q + j\,i_d) + j\,X_q\,(i_q + j\,i_d) - e_q - j\,X_d\,j\,i_d - X_q\,i_d = 0$$

Ou melhor:

$$(v_q + j\,v_d) + r\,(i_q + j\,i_d) + j\,X_q\,(i_q + j\,i_d) - e_q + (\,X_d - X_q)\,i_d = 0$$

De onde se tem que:

$$(v_q + j\,v_d) + r\,(i_q + j\,i_d) + j\,X_q\,(i_q + j\,i_d) = e_q - (\,X_d - X_q)\,i_d$$

Como no diagrama fasorial da máquina síncrona, operando como gerador, a corrente $i_d$ encontra-se quase sempre representada em sentido invertido, pois há uma suposição de que a carga acoplada seja indutiva, o sinal deverá ser corrigido na equação anterior o que conduz a $i_d = -i_d$.

Deste modo, a equação real será a seguinte:

$$(v_q + jv_d) + r(i_q + ji_d) + jX_q(i_q + ji_d) = e_q - (X_d - X_q)\, i_d \qquad (4.183)$$

Assim, pode-se dar início à composição do diagrama vetorial da máquina síncrona operando como gerador em regime permanente.

Como se sabe, a equação 4.183 foi obtida a partir da utilização das equações das tensões instantâneas envolvidas nos diferentes circuitos da máquina síncrona, no caso presente um gerador síncrono. Os enrolamentos amortecedores da máquina não foram considerados para a presente análise já que a idéia principal é a obtenção de um diagrama vetorial para a operação em regime permanente.

Prova-se que as grandezas fasoriais oriundas de sinais de natureza harmônica, já estabelecidas ora no estator da máquina síncrona ora do rotor, têm seus valores máximos instantâneos diferentes.

Imaginem-se as seguintes tensões instantâneas componentes de um sistema trifásico equilibrado de uma determinada máquina síncrona, conforme o conjunto de equações seguintes, dadas em co-seno. Trata-se das tensões trifásicas instantâneas de saída do estator da máquina síncrona que podem ser representadas pela equação 4.184.

$$V_{a,b,c} = V_{máx} \begin{bmatrix} \cos(\omega_B t + \alpha) \\ \cos(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \sqrt{2}\, V_{rms} \begin{bmatrix} \cos(\omega_B t + \alpha) \\ \cos(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad (4.184)$$

onde

$V_{máx}$ : valor máximo de amplitude do vetor da tensão terminal

$V_{rms}$ : valor rms ou eficaz de amplitude do vetor da tensão terminal

$\alpha$ : ângulo elétrico de referência

$\omega$ : velocidade angular de rotação

$t$ : variável independente tempo

A equação matricial das tensões estampadas no rotor da máquina síncrona, no sistema de eixos $d-q-0$, pode ser obtida da seguinte forma, já considerando a matriz $P$ de transformação apresentada na equação 4.28:

$$V_{dqo} = P\, V_{abc} \tag{4.185}$$

Assim, de forma descompactada, já aplicando as equações 4.28 e 4.184, obtém-se que:

$$V_{dqo} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \sqrt{2}\, V_{rms} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \cos(\theta + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

onde $\theta = \omega t$

Realizando-se as devidas operações algébricas atinentes à equação matricial anterior vem que:

$$V_{dqo} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\cos\alpha \\ -\frac{3}{2}\sin\alpha \end{bmatrix} = \sqrt{3}\, V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{4.186}$$

Resumindo:

$$V_{a,b,c} \leftrightarrow V_{d,q,0} \;\therefore\; \sqrt{2}\, V_{rms} \begin{bmatrix} \cos(\omega_B t + \alpha) \\ \cos(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \sqrt{3}\, V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{4.187}$$

Na equação 4.187, o que se observa é que, no plano $a-b-c$ do estator da máquina síncrona, os valores de amplitude máxima dos vetores associados são obtidos a partir da multiplicação dos valores rms ou eficazes pelo fator $\sqrt{2}$, enquanto que no plano $d-q-0$ do estator, os valores de amplitude máxima dos vetores associados são obtidos a partir da multiplicação dos valores rms ou eficazes pelo fator $\sqrt{3}$. Notar também como a transformação $a-b-c$ para $d-q-0$ simplesmente eliminou a parcela dependente da rotação que existia no conjunto das tensões instantâneas do estator da máquina síncrona.

A partir desse ponto, deve-se entender que a indicação rms se refere a um valor eficaz de uma grandeza harmônica qualquer.

Na equação 4.183, as devidas composições das grandezas em seus valores rms, quando foi considerado que um valor instantâneo de pico de uma grandeza harmônica é igual ao produto de seu correspondente valor eficaz por $\sqrt{2}$, levando-se em conta as deduções anteriores que culminaram na obtenção da identidade da equação 4.187, vem que:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{3}V_d + j\sqrt{3}\,V_q) + r(\sqrt{3}I_d + j\sqrt{3}I_q) + \\ &+ jX_q(\sqrt{3}I_d + j\sqrt{3}I_q) - [-j\omega\sqrt{\frac{3}{2}}M_F\sqrt{2}\,i_F - j(X_d - X_q)\sqrt{3}I_d] = 0 \end{aligned} \quad (4.188)$$

Seguindo-se com as devidas simplificações e considerando a fase $A$ vem que:

$$V_a + r\,I_a + j\,X_q I_a - [\,j\,E_q - j(X_d - X_q)\,I_d] = 0 \quad (4.189)$$

A relação entre os valores instantâneos e rms da fem $E_q$ é padronizada na literatura técnica e pode ser assim resumida.

$$e_q = \sqrt{2}E_q = -\omega M_F\,i_F \quad \therefore \quad \sqrt{\frac{3}{2}}e_q = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2}E_q = \sqrt{3}E_q$$

$$\sqrt{3}E_q \overset{\Delta}{=} \omega K M_F\,i_F \quad (4.190)$$

**Nota:** a tensão $E_q$ trata-se de um valor rms que apareceu quando se teve a necessidade de representar a equação das tensões instantâneas da máquina síncrona na forma de uma equação vetorial, com os seus respectivos valores eficazes, considerando-se o plano dos eixos $d-q-0$. Foi uma imposição do equacionamento que teve de ser definida. Esse é o valor de tensão rms, que corresponde ao valor da fem que aparece no estator, quando a máquina síncrona encontra-se operando em vazio e em circuito aberto.

A equação 4.189, finalmente, poderá ser representada no diagrama vetorial da figura 4.21 para a condição operativa gerador síncrono de pólos salientes em regime permanente.

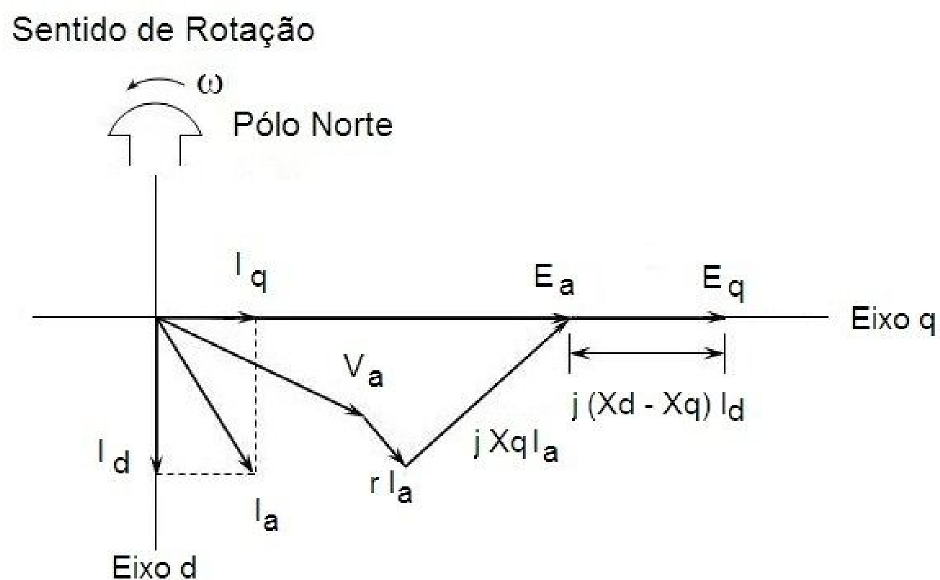



***Figura 4.21 – Diagrama Vetorial do Gerador Síncrono para a Fase A***

Para a formulação da equação vetorial da máquina síncrona, na condição operativa de motor síncrono, bastará interverter o sentido da fem e das correntes na equação 4.189.

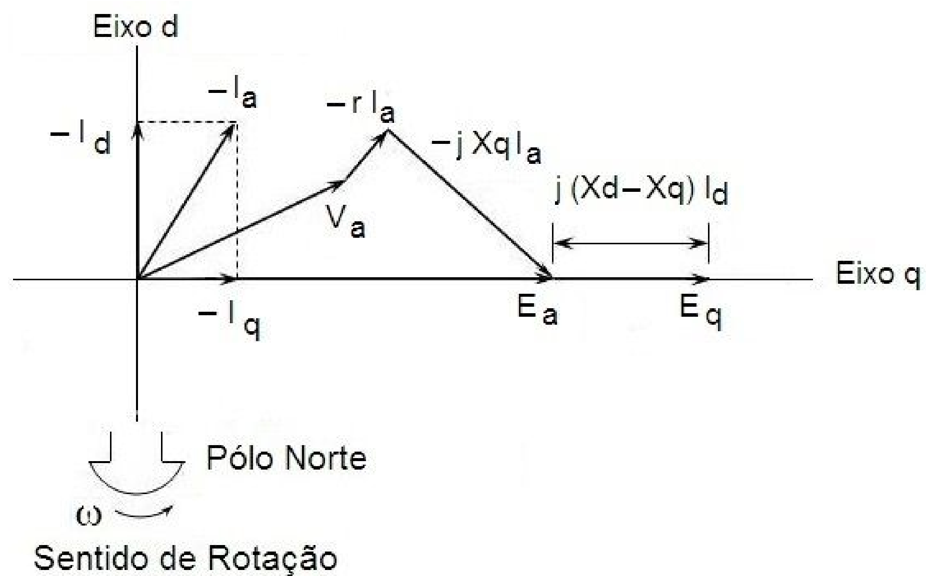



***Figura 4.22 – Diagrama Vetorial do Motor Síncrono para a Fase A***

Assim, obtém-se que:

$$V_a - r\,I_a - j\,X_q\,I_a - [-j\,E_q + j(X_d - X_q)\,I_d] = 0 \qquad (4.191)$$

A equação 4.191, finalmente, poderá ser representada no diagrama vetorial da figura 4.22 para a condição operativa motor síncrono de pólos salientes em regime permanente.

**Nota:** nas equações 4.189 e 4.191 referentes, respectivamente, aos diagramas vetoriais de tensões da máquina síncrona operando como gerador e como motor, cada uma das variáveis de estado teve sua designação apresentada em letra maiúscula o que será adotado a partir desse ponto, nesse capítulo, para indicar que a variável trata-se de uma entidade vetorial, em valores rms ou eficazes e de natureza harmônica.

Algumas situações especiais podem ser obtidas a partir da teoria que foi até aqui apresentada.

Primeiramente, considerando a máquina síncrona operando a vazio e em circuito aberto, tem-se que:

$$i_d = i_q = 0$$

Neste caso, a única corrente que fluirá é a corrente de campo conforme a equação já conhecida que relaciona o fluxo enlaçado e a indutância de campo da máquina síncrona onde $i_F = \frac{\lambda_F}{L_F}$ devido ao fluxo no enrolamento.

Deste modo, considerando-se a equação 4.190, vem que:

$$\sqrt{3}E_{qo} = \omega K M_F i_F = \omega K M_F \frac{\lambda_F}{L_F} \qquad (4.192)$$

Agora, para uma condição qualquer, tem-se para a expressão da corrente de campo $i_F = \frac{V_F}{r_F}$ que relaciona a tensão de campo aplicada pelo regulador de tensão com a própria corrente de campo circulante pelo circuito.

Assim, tem então que:

$$\sqrt{3}\,E_{fd} = \omega K M_F i_F = \omega K M_F \frac{V_F}{r_F} \qquad (4.193)$$

Para ambas as situações, a condição de estado permanente deverá ser observada.

**Nota:** observa-se que a expressão da equação 4.192 tem a ver com o fluxo de excitação do campo da máquina síncrona, envolvendo-se mais com o caminho magnético, e que a expressão da equação 4.193 tem mais a ver com a corrente de excitação do campo da máquina, envolvendo-se mais com o circuito elétrico e em regime permanente.

---

## EXEMPLO 4.7

Sejam as componentes de tensão de um sistema trifásico equilibrado, relativas a uma determinada máquina síncrona, conforme o conjunto de equações seguintes, dadas em seno. Trata-se das tensões trifásicas instantâneas de saída do estator da máquina síncrona que podem ser representadas pela equação 4.194.

$$V_{a,b,c} = V_{máx} \begin{bmatrix} sin\,(\omega_B t + \alpha) \\ sin\,(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ sin\,(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad (4.194)$$

onde

$V_{máx}$ : valor máximo de amplitude do vetor da tensão terminal

$V_{rms}$ : valor rms ou eficaz de amplitude do vetor da tensão terminal

$\alpha$ : ângulo elétrico de referência

$\omega$ : velocidade angular de rotação

$t$ : variável independente tempo

Encontrar a equação matricial das tensões estampadas no sistema de eixos no rotor da máquina considerando-se a transformação $d-q-0$ até aqui apresentada.

**Solução:**

Primeiramente, deve-se notar que se trata de um conjunto de tensões de seqüência positiva, ou seja, a seqüência de rotação do rotor da máquina síncrona respeita a seqüência de fases $a,b,c$ do estator.

A equação matricial das tensões estampadas no rotor da máquina síncrona, no sistema de eixos $d-q-0$, pode ser obtida da seguinte forma, já considerando a matriz $P$ de transformação apresentada na equação 4.185:

$$V_{dqo} = P\,V_{abc}$$

Assim, de forma descompactada, já aplicando as equações 4.185 e 4.194, obtém-se que:

$$V_{dqo} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \sqrt{2}\,V_{rms} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

onde $\theta = \omega t$

Realizando-se as devidas operações algébricas atinentes à equação matricial anterior vem que:

$$V_{dqo} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\sin\alpha \\ \frac{3}{2}\cos\alpha \end{bmatrix} = \sqrt{3}\,V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (4.195)$$

Resumindo:

$$V_{a,b,c} \leftrightarrow V_{d,q,0} \quad \therefore \quad \sqrt{2}\,V_{rms} \begin{bmatrix} \sin(\omega_B t + \alpha) \\ \sin(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \sqrt{3}\,V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (4.196)$$

---

## EXEMPLO 4.8

Sejam as componentes de tensão de um sistema trifásico equilibrado específico, relativas a um determinado esquema de tensões a ser aplicado em um ensaio especial sobre uma máquina síncrona, conforme o conjunto de equações seguintes, dadas em co-seno. Trata-se das tensões trifásicas instantâneas que podem ser representadas pela equação 4.197.

$$V_{a,b,c} = V_{máx} \begin{bmatrix} cos(\omega_B t + \alpha) \\ cos(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ cos(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

onde

$V_{máx}$ : valor máximo de amplitude do vetor da tensão terminal

$V_{rms}$ : valor rms ou eficaz de amplitude do vetor da tensão terminal

$\alpha$ : ângulo elétrico de referência

$\omega$ : velocidade angular de rotação

$t$ : variável independente tempo

Encontrar a equação matricial das tensões estampadas no sistema de eixos no rotor da máquina considerando-se a transformação $d-q-0$ até aqui apresentada.

**Solução:**

Nota-se que se trata de um conjunto de tensões de seqüência negativa, ou seja, a seqüência de rotação do rotor da máquina síncrona respeita uma seqüência de fases oposta ao sentido convencional $a,b,c$. O sentido aqui pode ser $a,c,b$.

A equação matricial das tensões estampadas no rotor da máquina síncrona, no sistema de eixos $d-q-0$, pode ser obtida da seguinte forma, já considerando a matriz $P$ de transformação apresentada na equação 4.185:

$$V_{dqo} = P\, V_{abc}$$

Assim, de forma descompactada, já aplicando as equações 4.185 e 4.197, obtém-se que:

$$V_{dqo} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ cos\,\theta & cos\,(\theta - \frac{2}{3}\pi) & cos\,(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ sin\,\theta & sin\,(\theta - \frac{2}{3}\pi) & sin\,(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \sqrt{2}\, V_{rms} \begin{bmatrix} cos\,(\theta + \alpha) \\ cos\,(\theta + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ cos\,(\theta + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

onde $\theta = \omega t$

Realizando-se as devidas operações algébricas atinentes à equação matricial anterior vem que:

$$V_{dqo} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}cos(2\theta+\alpha) \\ \frac{3}{2}sin(2\theta+\alpha) \end{bmatrix} = \sqrt{3}\,V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ cos(2\theta+\alpha) \\ sin(2\theta+\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

Resumindo:

$$V_{a,b,c} \leftrightarrow V_{d,q,0} \therefore \sqrt{2}\,V_{rms} \begin{bmatrix} cos(\theta+\alpha) \\ cos[(\theta+\alpha)+\frac{2\pi}{3}] \\ cos[(\theta+\alpha)-\frac{2\pi}{3}] \end{bmatrix} = \sqrt{3}\,V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ cos(2\theta+\alpha) \\ sin(2\theta+\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.199)$$

**Nota a respeito do exemplo 4.8:**

Nesse exemplo, o problema quis mostrar que a aplicação de tensões numa seqüência oposta àquela convencional, mesmo utilizando-se da transformação $d-q-0$, não permite a eliminação da dependência da rotação do rotor da máquina síncrona nas componentes transformadas.
Bastará uma simples inspeção sobre a equação 4.199 para identificar, após a transformação, a presença da velocidade dupla no argumento das componentes de tensão. Por isso, muitas vezes, a rotação dupla, por exemplo, de $120Hz$, é associada à seqüência negativa de giro da máquina síncrona.
Essa é uma questão que será de grande importância para o estudo de curto brusco da máquina síncrona.

---

## 4.4.13. Equação do Torque e da Potência Ativa Elétrica da Máquina Síncrona

Como já se sabe, para uma máquina síncrona operando sob condições equilibradas, a expressão da potência ativa elétrica instantânea de saída, tomando-se como referência as grandezas estampadas nos eixos $d-q-0$, será dada pela seguinte expressão:

$$p = v_d i_d + v_q i_q \quad (4.200)$$

Da equação matricial 4.108, obtêm-se as expressões para as tensões $v_d$ e $v_q$ dando origem a seguinte expressão para a potência ativa elétrica instantânea gerada:

$$p = (-ri_d - \dot{\lambda}_d - \omega\lambda_q)i_d + (-ri_q - \dot{\lambda}_q + \omega\lambda_d)i_q$$

A equação anterior conduz à seguinte equação:

$$p = (i_d \dot{\lambda} d + i_q \dot{\lambda} q) + \omega(i_d \lambda_q - i_q \lambda_d) - r(i_d^2 + i_q^2) \qquad (4.201)$$

onde

$$p_1 = -i_d \dot{\lambda} d + i_q \dot{\lambda} q$$
$$p_2 = -\omega(i_d \lambda_q - i_q \lambda_d)$$
$$p_3 = -r(i_d^2 + i_q^2)$$

A equação 4.201 mostra três parcelas de potência: a primeira devido à taxa de mudança da energia do campo magnético, a segunda devido à energia transferida pelo entreferro e a terceira devido às perdas Joule nos enrolamentos da máquina síncrona.

O torque elétrico transferido é obtido a partir da segunda parcela que representa a variação desta potência pela variação da velocidade de rotação.

Assim, o torque elétrico trifásico útil transmitido será dado por:

$$\tau_{e3\phi} = \frac{\partial p_2}{\partial \omega} = i_q \lambda_d - i_d \lambda_q \qquad (4.202)$$

Utilizando-se das equações que definem $\lambda_d$ e $\lambda_q$ como função das correntes, da equação 4.88, vem que:

$$\tau_{e3\phi} = i_q (L_d i_d + KM_F i_F + KM_D i_D) - i_d (L_q i_q + KM_Q i_Q) \qquad (4.203)$$

A equação 4.203 pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$Te_{3\phi} = \begin{bmatrix} L_d i_q & -L_q i_d & KM_F i_q & KM_D i_q & -KM_Q i_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \qquad (4.204)$$

**Nota:** a capacidade de transferir potência mecânica da turbina hidráulica à rede elétrica é função exclusiva de um gerador síncrono. Essa transferência se dá através da variável de estado torque, ou seja, a transferência se dá a partir do torque mecânico que é transformado em torque elétrico pela conversão eletromecânica. A forma de transferência se dá através do entreferro da máquina síncrona que é um valor relativamente pequeno se comparado ao porte do conjunto mecânico construído. Geradores síncronos com potências da

ordem de $350$ ou $400\,MVA$, cujos diâmetros da coroa polar, em geral, giram em torno de $8$ a $10\,m$ já admitem valores de entreferro na casa dos $20$ até $30\,mm$ de *gap*, valores que exigem um vetor indução da ordem de $1{,}5$ a $2\ Tesla$. São valores surpreendes!

### 4.4.14. Circuito Equivalente da Máquina Síncrona

Como condição a ser obedecida nos desenvolvimentos que se seguem, deve-se levar em conta que o sistema é equilibrado eletricamente com $i_0 = 0$. A base de valores escolhida é aquela descrita no item 4.4.11, deste capítulo, cuja escolha partiu de certas premissas a fim de se fazer com que as indutâncias mútuas fossem iguais em seus valores em pu.

Os fluxos enlaçados da máquina síncrona podem ser relacionados, em pu, com os fluxos mútuos e os fluxos de dispersão, respectivamente, de modo que se pode escrever de maneira genérica que:

$$\lambda_{Tu} = \lambda_{du} + \lambda_{mu} \qquad (4.205)$$

ou seja, o fluxo enlaçado total $\lambda_T$, de um determinado circuito magnético, é a soma dos fluxos de dispersão $\lambda_d$ e mútuo $\lambda_m$, desse mesmo circuito.

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\lambda_{Tdu} &= \lambda_{ddu} + \lambda_{mdu} = L_{ddu} i_{du} + L_{mdu} i_{du} + KM_{Fu} i_{Fu} + KM_{Du} i_{Du} \\
\lambda_{Tqu} &= \lambda_{dqu} + \lambda_{mqu} = L_{dqu} i_{qu} + L_{mqu} i_{qu} + KM_{Qu} i_{Qu} \\
\lambda_{TFu} &= \lambda_{dFu} + \lambda_{mFu} = L_{dFu} i_{Fu} + L_{mFu} i_{Fu} + KM_{Fu} i_{du} + M_{Ru} i_{Du} \\
\lambda_{TDu} &= \lambda_{dDu} + \lambda_{mD^u} = L_{dDu} i_{Du} + L_{mDu} i_{Du} + M_{Ru} i_{Fu} + KM_{Du} i_{du} \\
\lambda_{TQu} &= \lambda_{dQu} + \lambda_{mQu} = L_{dQu} i_{Qu} + L_{mQu} i_{Qu} + KM_{Qu} i_{qu}
\end{aligned} \qquad (4.206)$$

Das equações 4.119, sabe-se que:

$$L_{mdu} = L_{mFu} = L_{mDu} = KM_{FU} = KM_{DU} = M_{RU}$$

$$L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{QU}$$

As duas equações anteriores permitem que se escrevam as seguintes relações em pu:

$$L_{mdu} = KM_{Fu} = KM_{Du} = M_{Ru} = L_{id\,u} \qquad (4.207)$$

$$L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{Qu} = L_{iq\,u} \qquad (4.208)$$

E criando os fluxos enlaçados associados a cada uma das indutâncias gerais das equações 4.207 e 4.208 vem que:

$$\lambda_{i\,du} = L_{i\,du}(\,i_{du} + i_{Fu} + i_{Du}) \qquad (4.209)$$

$$\lambda_{i\,qu} = L_{i\,qu}(i_{qu} + i_{Qu}) \qquad (4.210)$$

O significado físico das equações 4.209 e 4.210 pode ser representado considerando-se cada um dos eixos $d$ e $q$ como está mostrado na figura 4.23.

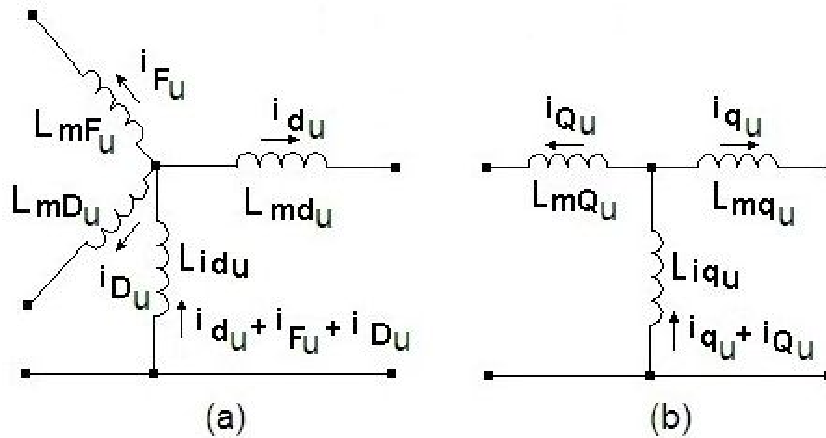



***Figura 4.23 – Circuito PU Equivalente de Correntes da Máquina Síncrona para (a) Eixo d, (b) Eixo q***

Para o circuito equivalente completo, devem-se levar em conta as equações em tensão 4.173, já considerada a condição de se estar trabalhando com um sistema equilibrado trifásico com as resistências das fases do estator tomadas com o mesmo valor, assim como se tem procedido até aqui neste livro.

Para o eixo $d$ pode-se escrever que:

$$v_{du} + r_u\,i_{du} + \frac{1}{\omega_B}\dot{\lambda}_{du} + \omega_u \lambda_{qu} = 0 \qquad (4.211)$$

Da primeira equação das equações 4.206 extrai-se a expressão para $\lambda_{du}$ total, o que leva a seguinte expressão:

$$\dot{\lambda}_{Tdu} = L_{ddu}\,\dot{i}_{du} + L_{mdu}\,\dot{i}_{du} + KM_{Fu}\,\dot{i}_{Fu} + KM_{Du}\,\dot{i}_{Du} \qquad (4.212)$$

Assim, a expressão da tensão 4.211 para o eixo $d$ tomará a seguinte forma:

$$v_{du} + r_u i_{du} + \frac{1}{\omega_B} L_{ddu} \dot{i}_{du} + \omega_u \lambda_{qu} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \quad (4.213)$$

De maneira similar, chega-se às equações de tensão para os demais enrolamentos.

Para o enrolamento de eixo $q$ tem-se que:

$$v_{qu} + r_u i_{qu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dqu} \dot{i}_{qu} - \omega_u \lambda_{du} + \frac{L_{iqu}}{\omega_B} (\dot{i}_{qu} + \dot{i}_{Qu}) = 0 \quad (4.214)$$

Para o enrolamento de campo tem-se que:

$$-v_{Fu} + r_{Fu} i_{Fu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dFu} \dot{i}_{Fu} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \quad (4.215)$$

Para os enrolamentos amortecedores $D$ e $Q$ tem-se:

$$v_{Du} = 0 \quad \therefore \quad r_{Du} i_{Du} + \frac{1}{\omega_B} L_{dDu} \dot{i}_{Du} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \quad (4.216)$$

$$v_{Qu} = 0 \quad \therefore \quad r_{Qu} i_{Qu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dQu} \dot{i}_{Qu} + \frac{L_{iqu}}{\omega_B} (\dot{i}_{qu} + \dot{i}_{Qu}) = 0 \quad (4.217)$$

As figuras 4.24 e 4.25 mostram os circuitos equivalentes de eixo $d$ e eixo $q$, completos em tensão, respectivamente.

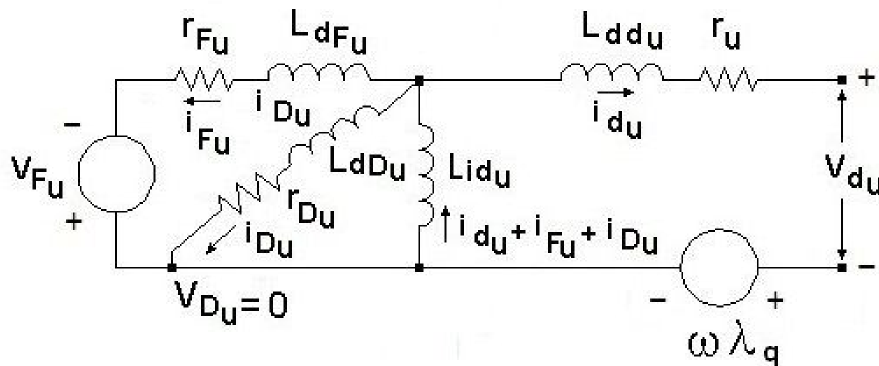



***Figura 4.24 – Circuito PU Equivalente de Tensão da Máquina Síncrona para o Eixo d***

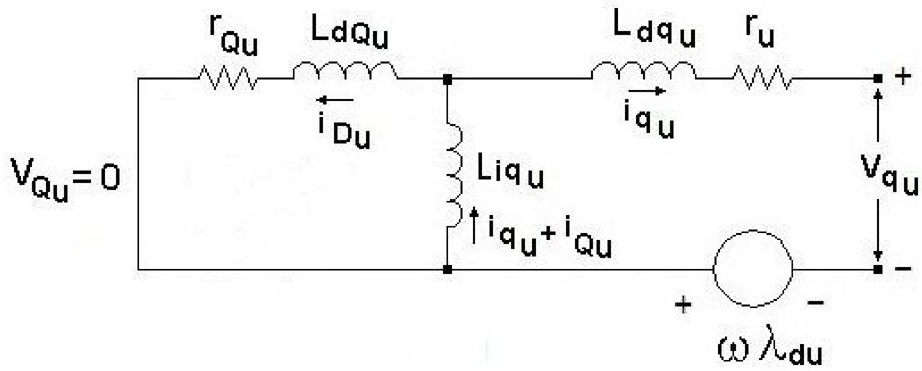



***Figura 4.25 – Circuito PU Equivalente de Tensão da Máquina Síncrona para o Eixo q***

## 4.4.15. Problema da Saturação em Máquinas Síncronas

Analisando as equações do fluxo enlaçado, pode-se notar, nas expressões matemáticas dos fluxos particulares $\lambda_{\Sigma d}$ e $\lambda_{\Sigma q}$, a dependência do meio físico em que estes se propagam. Assim, o tipo de máquina síncrona, em termos construtivos, terá grande influência na definição dessas variáveis de estado.
Para máquinas síncronas de pólos salientes, o fluxo enlaçado de magnetização $\lambda_{\Sigma d}$ sofrerá a influência do meio físico de maneira que tenderá a apresentar uma característica de resposta não linear em termos de sua permeância magnética, ao passo que o fluxo $\lambda_{\Sigma q}$ apresentará uma característica linear devido ao fato de ser o ar o meio físico onde este se manifesta.

Deste modo, para uma máquina síncrona de pólos salientes, considerando o eixo $d$, tem-se que:

$$L_{\Sigma du} = K_S \, L_{\Sigma du\,0} \tag{4.218}$$

onde $K_S = f(\lambda_{\Sigma d})$

e, considerando o eixo $q$, tem-se que:

$$L_{\Sigma qu} = L_{\Sigma qu\,0} \tag{4.219}$$

A curva de saturação de $\lambda_{\Sigma d}$ pode ser obtida através da curva de magnetização que tem a seguinte expressão:

$$E_{fd} = f(i_F) \qquad (4.220)$$

onde $E_{fd}$ é a tensão projetada no estator, referente ao eixo $d$, quando a máquina síncrona estiver a plena carga.

Mas também se sabe que:

$$E_{fd} = \omega \lambda_{\Sigma d} \quad \therefore \quad E_{fdu} = \lambda_{\Sigma du} \qquad (4.221)$$

Deste modo, pode-se obter a curva de magnetização $\lambda_{\Sigma du} = f(i_F)$, como mostra a figura 4.26.

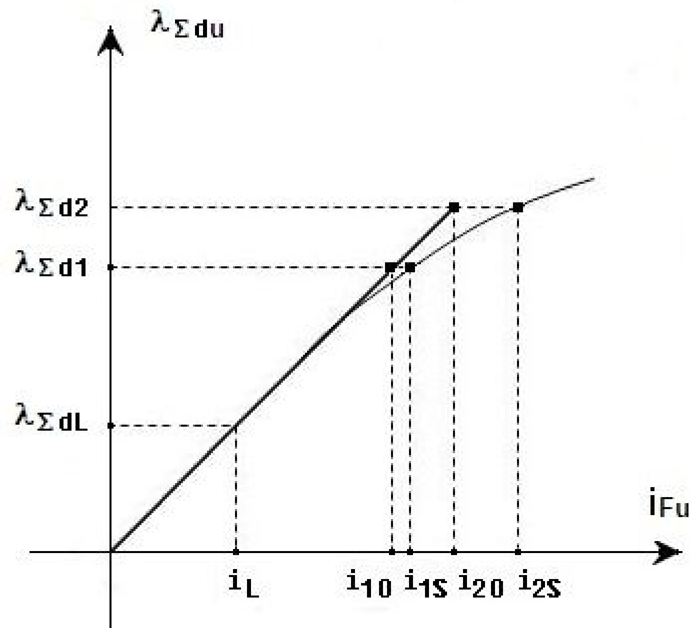



***Figura 4.26 – Curva de Magnetização de um Gerador Síncrono***

A fórmula recursiva para o tratamento do problema da saturação com a máquina síncrona visa à obtenção da seguinte relação:

$$\Delta i_{F\,u} \overset{\Delta}{=} A_S \, e^{B_S\,(\lambda_{\Sigma du} - \lambda_{\Sigma dLu})} \qquad (4.222)$$

onde se deve ter sempre $\lambda_{\Sigma du} > \lambda_{\Sigma dLu}$

Conhecendo-se a curva da figura 4.26, onde se tem as correntes de campo não saturadas e saturadas, as seguintes variações podem ser calculadas a partir das seguintes expressões:

$$\frac{\Delta i_1}{i_{10}} = \frac{i_{1S} - i_{10}}{i_{10}} = C_1 \quad \text{e} \quad \frac{\Delta i_2}{i_{20}} = \frac{i_{2S} - i_{20}}{i_{20}} = C_2$$

Logo

$$\Delta i_1 = C_1 i_{10} \quad \text{e} \quad \Delta i_2 = C_2 i_{20}$$

Mas

$$i_{20} = C_3 i_{10} \quad \text{com} \quad \Delta i_2 = C_2 C_3 i_{10}$$

Através da equação 4.222 obtém-se que:

$$\Delta i_{1u} = A_S e^{B_s (\lambda_{\Sigma d1u} - \lambda_{\Sigma dLu})} = C_1 i_{10} \tag{4.223}$$

e

$$\Delta i_{2u} = A_S e^{B_s (\lambda_{\Sigma d2u} - \lambda_{\Sigma dLu})} = C_2 C_3 i_{10} \tag{4.224}$$

Dividindo-se a equação 4.224 pela equação 4.223 vem:

$$\frac{C_2 C_3}{C_1} = e^{B_s (\lambda_{\Sigma d2u} - \lambda_{\Sigma d1u})}$$

Logo

$$B_s = \frac{1}{\lambda_{\Sigma d2u} - \lambda_{\Sigma d1u}} Ln\left(\frac{C_2 C_3}{C_1}\right) \tag{4.225}$$

Levando o valor de $B_S$, da equação 4.225, na equação 4.223, obtém-se o valor de $A_S$, senão veja:

$$A_S = \frac{C_1 i_{10}}{e^{\left[\frac{\lambda_{\Sigma d1u} - \lambda_{\Sigma dLu}}{\lambda_{\Sigma d2u} - \lambda_{\Sigma d1u}} Ln\left(\frac{C_2 C_3}{C_1}\right)\right]}} \tag{4.226}$$

Pode-se confirmar que, em sistemas de excitação dotados de uma ou mais excitatrizes do tipo que utiliza a máquina de CC como um dos elementos do

processo de excitação da máquina síncrona principal, a influência da saturação será grande.
Nesse caso, a tensão de saída $E_{fd}$ dependerá do grau de saturação envolvido com o sistema das excitatrizes.
A função de saturação será a mesma definida pela equação 4.222 apenas que agora será considerada a tensão $E_{fd}$ .

Assim, a função saturação de uma excitatriz, por exemplo, será dada pela seguinte expressão:

$$S_{E\,u} \overset{\Delta}{=} A_s \, e^{B_s \, E_{fd\,u}} \qquad (4.227)$$

Caso se queira estender a análise para o escopo do gerador síncrono principal, deve-se aplicar a seguinte expressão para representar a sua função de saturação:

$$S_{G\,u} \overset{\Delta}{=} A_s \, e^{B_s \, \Delta V_{tu}} \qquad (4.228)$$

onde $\Delta V_t$ é a variação da tensão terminal do gerador

---

## EXEMPLO 4.9

Considerar um gerador síncrono trifásico cuja tensão terminal, em seu valor eficaz, é $16{,}5\ kV$ . O ensaio de campo a vazio aplicado a esse gerador indicou como resultado os seguintes dados mostrados na tabela 4.1.
A partir dos dados apresentados, computar a característica de saturação para esse gerador levando-se em conta a equação 4.222 com base na teoria matemática desenvolvida no item 4.4.15.
Logo após, determinar o valor da corrente de campo associada a uma tensão terminal, na condição saturada, de $15\ kV$ . Adotar a tensão base de $16{,}5\ kV$ .

**Tabela 4.1**
**Ensaio em Vazio em Gerador Síncrono de 16,5 kV**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$V_t$** | 19.421 | 18.034 | 17.431 | 16.500 | 15.810 | 14.892 | 13.773 | 12.912 | 11.908 | 9.913 | 7.890 | 5.997 | 4.124 | 2.434 |
| **$i_F$** | 1.400 | 1.128 | 1.046 | 944 | 882 | 793 | 712 | 656 | 592 | 482 | 382 | 286 | 202 | 122 |

onde

$v_t$ : valor eficaz da tensão terminal do gerador síncrono em $VCA$

$i_F$ : valor da corrente de excitação aplicada ao campo do gerador síncrono em $A$

**Solução:**

A fórmula recursiva 4.222, para o tratamento do problema da saturação com a máquina síncrona, é a seguinte:

$$\Delta i_{F\,u} \overset{\Delta}{=} A_S\, e^{B_S\,(\lambda_{\Sigma du} - \lambda_{\Sigma dLu})}$$

Como se está trabalhando com a função tensão terminal *versus* corrente de excitação, a fórmula 4.222 poderá ser assim reescrita sem perda de propriedade:

$$\Delta i_{F\,u} \overset{\Delta}{=} A_S\, e^{B_S\,(v_{t\,u} - v_{L\,u})} \qquad (4.229)$$

onde se tem para cada um dos parâmetros que:

$$A_S = \frac{C_1 i_{10}}{e^{\left[\frac{v_{t1u} - v_{tLu}}{v_{t2u} - v_{t1u}} Ln\left(\frac{C_2 C_3}{C_1}\right)\right]}} \quad \text{e} \quad B_S = \frac{1}{v_{t2u} - v_{t1u}} Ln\left(\frac{C_2 C_3}{C_1}\right)$$

A figura 4.27 mostra melhor a disposição das novas grandezas relativas às equações anteriores.

Dados auxiliares a serem utilizados nos cálculos obtidos a partir da curva da figura 4.27:

$i_{10} = 802\ A$

$i_{1S} = 944\ A$

$i_{20} = 944\ A$

$i_{2S} = 1400\ A$

$v_{t1u} = 16.500\ VCA$

$v_{t2} = 19.421\ VCA$

$v_{tL} = 9.913\ VCA$

$V_B = 16.500\ VCA$

$$v_{t1u} = \frac{16.500}{V_B} = \frac{16.500}{16.500} = 1{,}0\ pu$$

$$v_{t2u} = \frac{19.421}{V_B} = \frac{19.421}{16.500} = 1{,}177\ pu$$

$$v_{tLu} = \frac{9.913}{V_B} = \frac{9.913}{16.500} = 0{,}6\ pu$$

$$i_L = 482\ A$$

$$\Delta i_1 = i_{1S} - i_{10} = 944 - 802 = 142$$

$$\Delta i_2 = i_{2S} - i_{20} = 1.400 - 944 = 456$$

A partir das fórmulas desenvolvidas na teoria, vem que:

$$C_1 = \frac{\Delta i_1}{i_{10}} = \frac{142}{802} = 0{,}177$$

$$C_2 = \frac{\Delta i_2}{i_{20}} = \frac{456}{944} = 0{,}483$$

$$C_3 = \frac{i_{20}}{i_{10}} = \frac{944}{802} = 1{,}177$$

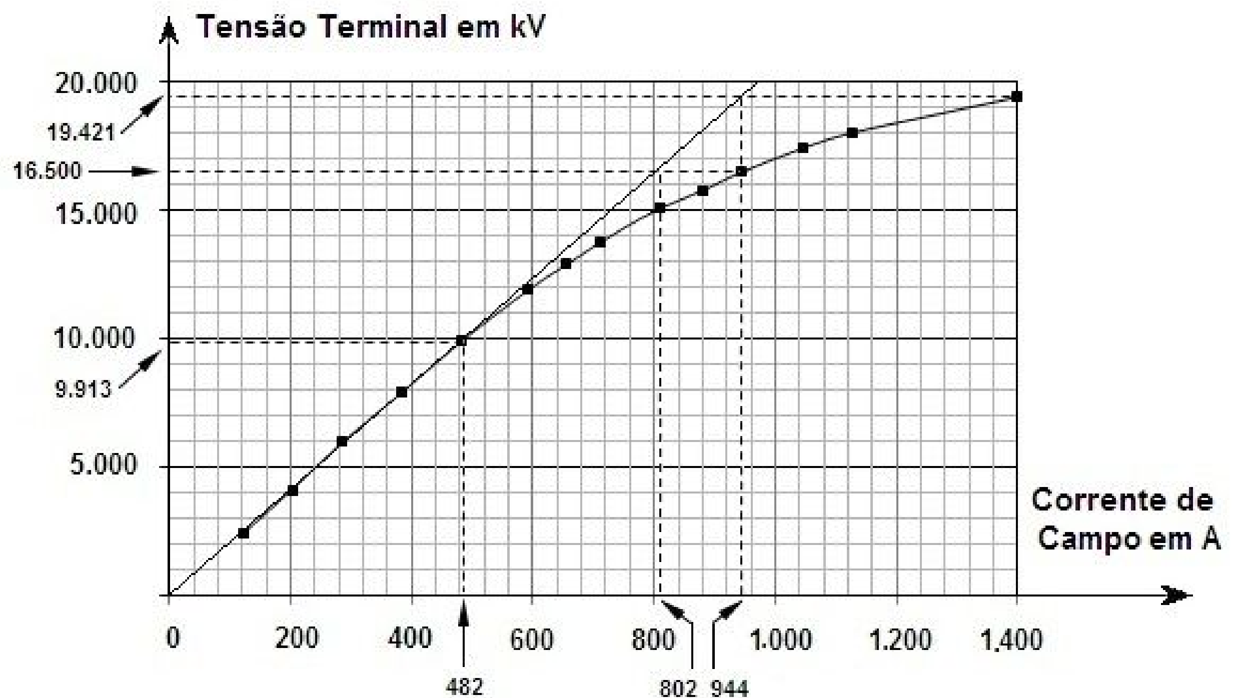


**Figura 4.27 – Curva do Ensaio a Vazio em Gerador Síncrono Baseada nos Dados da Tabela 4.1**

Com esses parâmetros calculados, podem-se calcular os parâmetros $A_S$ e $B_S$ da equação 4.229. Senão veja-se:

$$A_S = \frac{C_1 i_{10}}{e^{\left[\frac{v_{t1u} - v_{tLu}}{v_{t2u} - v_{t1u}} Ln\left(\frac{C_2 C_3}{C_1}\right)\right]}} = \frac{0{,}177 \, x \, 802}{e^{\left[\frac{1{,}0 - 0{,}6}{1{,}177 - 1{,}0} Ln\left(\frac{0{,}483 \, x 1{,}177}{0{,}177}\right)\right]}} \cong 10{,}16 \ A$$

$$B_S = \frac{1}{v_{t2u} - v_{t1u}} Ln\left(\frac{C_2 C_3}{C_1}\right) = \frac{1}{1{,}177 - 1{,}0} Ln\left(\frac{0{,}483 \, x 1{,}177}{0{,}177}\right) \cong 6{,}592$$

Notar que no cálculo de $A_S$, o valor da corrente $i_{10}$ é dado em ampères e não em pu.

Deste modo, a equação recursiva 4.229, para o presente problema, será:

$$\Delta i_F = = 10{,}16 \ e^{6{,}592 (v_{tu} - 0{,}6)} \text{ em } A$$

Para o ponto onde a tensão terminal é de $15 \ kV$, como é pedido no ploblema, o valor da corrente de excitação na condição saturada poderá ser obtida diretamente da equação anterior. Assim, tem-se que:

$$\Delta i_F = = 10{,}16 \ e^{6{,}592 \left(\frac{15.000}{16.500} - 0{,}6\right)} \cong 77{,}897 \ A$$

Logo, o valor da corrente saturada $i_S$ será a soma do valor da corrente não saturada $i_{\tilde{N}S}$ com o valor $\Delta i_F$ calculado anteriormente, ou melhor:

$$i_S = i_{\tilde{N}S} + \Delta i_F \qquad (4.230)$$

Para o cálculo da corrente $i_{\tilde{N}S}$ será utilizada a relação entre a tensão e a corrente, do gráfico da figura 4.27, na região de linearidade da curva.

Deste modo, pode-se escrever que:

$$\frac{v_t}{i_F} = \frac{9.913}{482} \quad \therefore \quad i_{\tilde{N}S} = \frac{482}{9.913} 15.000 = 729{,}345 \ A$$

Levando-se os valores obtidos na equação 4.230, finalmente obtém-se o valor da corrente desejada. Senão, veja-se:

$$i_S = 729,345 + 77,897 \cong 807,24\ A$$

---

## 4.5. Indutâncias Transformadas da Máquina Síncrona

Serão obtidas, na seqüência, as chamadas indutâncias transformadas para o sistema de eixos $d-q-0$ sempre a partir da condição de operação da máquina síncrona na situação equilibrada quando o desequilíbrio de fases não existe ou é desconsiderado.

O procedimento a ser adotado será o do método clássico de simulação com a aplicação de sinais de entrada e medição de sinais de saída conforme os passos seguintes. No caso, os resultados serão analisados a partir dos procedimentos desenvolvidos no tópico precedente relativos à aplicação de determinados sinais alternados ao estator da máquina síncrona com a inspeção dos sinais correspondestes estampados no rotor pelo emprego direto da transformação $d-q-0$, já estudada anteriormente.

Como se sabe, são três os regimes de resposta de uma máquina síncrona a determinados tipos de excitação que pode ser qualificada como ordens de origem externa ao propósito de ação do equipamento em si. Esses regimes se reportam à condição de trabalho da máquina síncrona sob freqüência industrial, ou seja, no regime da freqüência de $60\ Hz$, diferentemente do regime eletrodinâmico quando o estudo se concentra na faixa de freqüência que vai até $1,5\ Hz$, não mais que isso, caracterizando diferentes abordagens.

O estudo da estabilidade do SEP se centraliza na resposta da máquina síncrona a estímulos e ordens externas associadas a uma faixa de valores de freqüência onde os reguladores de velocidade e os reguladores de tensão conseguem atuar. Esses equipamentos de controle automático não respondem na faixa de freqüência associada à freqüência industrial.

Por isso que durante as ocorrências envolvendo um curto-circuito, por exemplo, a rotação da máquina síncrona é considerada um valor constante nos primeiros ciclos – $1 ciclo$ equivale a $1/60\ ms$ – o mesmo ocorrendo com o valor da fem, para esses regimes ligados à freqüência industrial.

Quando se conhecem a forma e o valor dessas ordens, e se tem pleno controle sobre elas, é possível o levantamento de características específicas tais como as que se seguem.

Sob uma determinada ação externa, um curto-circuito, por exemplo, as correntes circulantes pelos enrolamentos da uma máquina síncrona tomarão formas e valores específicos influenciados por características próprias do equipamento tais como as impedâncias dos enrolamentos envolvidas no processo.

As impedâncias envolvidas são os parâmetros sob os quais essas tais respostas serão influenciadas.

É nesse particular que se conseguem distinguir os regimes a que esses parâmetros pertencem para que se possam identificar e determinar, com rigor, os valores das grandezas, pontos importantes utilizados principalmente na etapa de projeto e em posteriores estudos de estabilidade.
Notadamente, na resposta de uma máquina síncrona a uma determinada ocorrência, são verificados os regimes subtransitório, o transitório e o regime permanente ou síncrono, em termos da freqüência industrial.
Cada um desses regimes foi estabelecido com base em sua correspondência com o número de ciclos envolvido no período de sua duração. O regime subtransitório tem a ver com os primeiros ciclos de oscilação verificados com uma grandeza específica, a corrente de estator, por exemplo, logo após uma ocorrência.
Como se sabe, as grandezas elétricas que caracterizam um SEP apresentam um comportamento de resposta intrínseca, no domínio do tempo, regida por funções do tipo harmônico ou senoidal – tipo seno ou co-seno – cujo período de oscilação está associado com a freqüência industrial. Os ciclos do regime subtransitório se dão em tempos muito pequenos, coisa da ordem de aproximadamente *1,5 ciclo*. Nesse período, entende-se que a interação dos fluxos enlaçados instantâneos se dá entre os enrolamentos amortecedores ou de amortecimento, de campo e de estator. Esse regime pode ser visto, por exemplo, na resposta da corrente instantânea de fase da máquina síncrona sob ensaio de curto-circuito trifásico simétrico brusco, estando a máquina excitada em vazio, um tipo de ensaio especial a ser estudado mais à frente nesse capítulo, de suma importância para a determinação de parâmetros durante a etapa de comissionamento de unidades geradoras. Na fase subtransitória, há uma súbita elevação seguida de um decaimento rápido da corrente instantânea em função da ação da resistência do enrolamento amortecedor e da indutância subtransitória que estão envolvidas. Esse decaimento toma a forma de uma função exponencial negativa que tende para zero. Convém lembrar que o decaimento do sinal de corrente – tomado aqui com um exemplo – no caso de um curto-circuito nos terminais da máquina elétrica, só ocorre por ação de resistências que são inerentes aos próprios enrolamentos componentes da máquina. São as resistências, por excelência, os elementos passivos responsáveis pelo efeito de dissipação. Na fase seguinte, conhecida como período transitório, já não é notada a ação do enrolamento amortecedor, por suas próprias características, de modo que se encontram interagindo apenas os enrolamentos de campo e o de estator. Nesta etapa, encontram-se atuantes a resistência de campo e a indutância que envolve esses dois enrolamentos. O número de ciclos aqui envolvidos, até que esse regime termine, com o decaimento total, segue por um período de aproximadamente *9,5 ciclos*. Ainda no regime transitório, os valores da corrente instantânea, por exemplo, ainda são elevados. Por fim, segue o regime permanente em que a interação se estabelece apenas no enrolamento de estator, regime normal de funcionamento da máquina síncrona em que o fluxo de campo varre de modo harmônico os enrolamentos de fase do estator. Trata-se de uma fase regular também conhecida como fase síncrona de operação. Nessa etapa, os valores das correntes de fase se normalizam.
A cada um desses regimes vem associado um valor de indutância e, por conseguinte, um valor específico de constante de tempo relacionado ao

processo de decaimento do sinal sob análise, no caso presente, o sinal da corrente alternada instantânea de fase.

### 4.5.1. Indutâncias Síncronas de Eixo Direto e de Eixo em Quadratura

Como a indutância síncrona é definida sempre a partir da condição de regime permanente, a simulação pode ser conseguida da forma seguinte:

a) aplicação de correntes instantâneas trifásicas de seqüência positiva aos enrolamentos do estator da máquina síncrona da seguinte forma, onde $I$, trata-se do valor rms:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{2}\, I \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \qquad (4.231)$$

b) enrolamento de campo da máquina síncrona mantido aberto;

c) eixo da fmm de giro da máquina síncrona alinhado com o eixo direto da máquina.

A expressão da indutância síncrona de eixo direto para a fase $a$, por exemplo, poderá ser considerada como uma soma dos efeitos dos fluxos enlaçados próprio e mútuos, entre as fases do estator da máquina síncrona, sob essa fase, em função das correntes que os produziram.

Assim, para a indutância de eixo $d$, tem-se que:

$$L_d = \frac{L_{aa}\, i_a + L_{ab}\, i_b + L_{ac}\, i_c}{i_a} \qquad (4.232)$$

Da equação matricial 4.88, sabe-se que:

$$L_d = \frac{\lambda_d}{i_d} = L_S + M_S + \frac{3}{2} L_M \qquad (4.233)$$

ou ainda, segundo o grupo de equações 4.111, de onde também se sabe que:

$$L_d = L_{dd} + L_{md} \qquad (4.234)$$

Para o eixo em quadratura, fazem-se as mesmas considerações anteriores, porém tomando o devido cuidado de manter o eixo da fmm de giro em um alinhamento atrasado de $\frac{\pi}{2}$ *rad* em relação ao eixo direto.

Considerando-se, ainda, a equação 4.111 vem que:

$$L_q = L_S + M_S - \frac{3}{2} L_M \qquad (4.235)$$

ou ainda, segundo o grupo de equações 4.111, de onde também se sabe que:

$$L_q = L_{dq} + L_{mq} \qquad (4.236)$$

onde:

$L_S$ : parcela síncrona da indutância própria do estator

$L_m$ : parcela máxima da indutância própria ou mútua do estator dependente da rotação

$M_S$ : parcela síncrona da indutância mútua do estator

$L_{dd}$ : parcela de dispersão da indutância de eixo direto

$L_{dq}$ : parcela de dispersão da indutância de eixo em quadratura

$L_{md}$ : parcela de reação do estator da indutância de eixo direto

$L_{mq}$ : parcela de reação do estator da indutância de eixo em quadratura

### 4.5.2. Indutâncias Transitórias de Eixo Direto e de Eixo em Quadratura

Para a condição transitória, espera-se que haja a influência dos enrolamentos do estator e do enrolamento de campo da máquina síncrona de modo que a interferência dos enrolamentos amortecedores seja nula. Isto é conseguindo após um período que se segue à aplicação das correntes de seqüência positiva ao estator ou então, como no procedimento seguinte:

a) aplicação de correntes de seqüência positiva, subitamente, ao estator de forma semelhante àquela verificada no procedimento anterior;

b) enrolamento de campo curto-circuitado e não energizado;

c) eixo da fmm de giro alinhado com o eixo direto.

Agora, como o fluxo enlaçado de campo, $\lambda_F$, não pode variar instantaneamente, pelo menos para esse regime transitório, na forma como foi considerado, por se tratar este de uma variável de estado, estando o

enrolamento de campo curto-circuitado, no exato instante de aplicação das correntes de seqüência positiva, tem-se que:

$$\lambda_F = 0 = KM_F\, i_d + L_F\, i_F + M_R\, i_D$$

Mas como a influência da corrente do enrolamento amortecedor é tomada como nula, ou seja, $i_D = 0$, tem-se que:

$$0 = KM_F\, i_d + L_F\, i_F \quad \therefore \quad i_F = -\frac{KM_F}{L_F} i_d \qquad (4.237)$$

A expressão do fluxo enlaçado do enrolamento de eixo $d$, nessas condições, também já se desprezando a corrente $i_D$, pode ser dada por:

$$\lambda_d = L_d i_d + KM_F i_F$$

Assim, substituindo-se na expressão de $\lambda_d$, anterior, a expressão de $i_F$ da equação 4.237, vem que:

$$\lambda_d = (L_d - \frac{K^2 M_F{}^2}{L_F}) i_d \quad \therefore \quad \frac{\lambda_d}{i_d} = L_d - \frac{K^2 M_F{}^2}{L_F}$$

$$L'_d = L_d - \frac{K^2 M_F{}^2}{L_F} \qquad (4.238)$$

**Nota:** é evidente que o valor obtido para a corrente de campo tem tudo a ver com a condição em que o ensaio foi realizado, qual seja, desconsideração dos enrolamentos amortecedores da máquina síncrona bem como a aplicação instantânea das correntes de seqüência num período de tempo tal que o fluxo no campo da máquina ainda não tenha se modificado. Nessas condições, trata-se da obtenção da indutância que vigora no regime transitório da resposta da máquina síncrona.

Para o eixo em quadratura, por não existir, fisicamente, um enrolamento de campo, será considerada a existência de um eixo fictício.

Notar que para efeito de obtenção da indutância transitória de eixo em quadratura, o alinhamento do eixo da fmm de giro deverá estar atrasado de $\pi/2$ radianosdo eixo direto.

Deste modo, como o fluxo enlaçado de campo não pode variar instantaneamente, pelo menos para esse regime transitório, na forma como foi considerado, tem-se que:

$$\lambda_{Fq} = 0 = KM_q i_q + L_{Fq} i_F$$

Seguindo a mesma situação anterior, ou seja, tomando-se como nula a influência da corrente do enrolamento amortecedor, $i_Q = 0$, vem que:

Logo

$$i_F = -\frac{KM_F}{L_{Fq}} i_q \tag{4.239}$$

Mas, a partir da expressão do fluxo enlaçado para o eixo $q$, vem que:

$$\lambda_q = L_q i_q + KM_q i_F$$

Assim, substituindo-se na expressão de $\lambda_q$, anterior, a expressão de $i_F$ da equação 4.239, vem que:

$$\lambda_q = (L_q - \frac{K^2 M_q{}^2}{L_{Fq}}) i_q \quad \therefore \quad \frac{\lambda_q}{i_q} = L_q - \frac{K^2 M_q{}^2}{L_{Fq}}$$

$$L'_q = L_q - \frac{(KM_q)^2}{L_{Fq}} \tag{4.240}$$

Na realidade, como não existe enrolamento de campo de eixo em quadratura em máquinas síncronas de pólos salientes vem que:

$$L'_q = L\ q \tag{4.241}$$

Já nas máquinas síncronas de pólos lisos, devido ao efeito do ferro do rotor, o fluxo enlaçado acaba se espalhando por toda a área disponível de modo que a relação da equação 4.240 fica inalterada. Considerar também que:

$$L'_q \cong L'_d \tag{4.242}$$

### 4.5.3. Indutâncias Subtransitórias de Eixo Direto e de Eixo em Quadratura

Para a condição subtransitória, devem ser considerados os efeitos dos enrolamentos amortecedores no processo. Segue-se o procedimento para obtenção da reatância de eixo direto:

a) aplicação de correntes de seqüência positiva, subitamente, ao estator da máquina síncrona de forma semelhante àquela verificada no procedimento anterior;

b) enrolamento de campo curto-circuitado e não energizado;

c) eixo da fmm de giro alinhado com o eixo direto.

Por analogia ao desenvolvimento realizado no tópico anterior também aqui será considerado que o fluxo de campo, $\lambda_F$, não poderá variar instantaneamente, por ser este uma variável de estado, estando o enrolamento de campo curto-circuitado.

Logo, considerando-se os circuitos, primeiro do enrolamento de campo e, posteriormente, o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se que:

$$\lambda_F = 0 = KM_F i_d + L_F i_F + M_R i_D$$

$$\lambda_D = 0 = KM_D i_d + M_R i_F + L_D i_D$$

Assim, das equações precedentes, extraem-se as seguintes expressões para as correntes $i_F$ e $i_D$:

$$i_F = -\frac{KM_F L_D - KM_D M_R}{L_F L_D - M_R^2} i_d \qquad (4.243)$$

e

$$i_D = -\frac{KM_D L_F - KM_F M_R}{L_F L_D - M_R^2} i_d \qquad (4.244)$$

Também se sabe que o fluxo enlaçado no estator pelo enrolamento de eixo direto é dado pela seguinte expressão:

$$\lambda_d = L_d i_d + KM_F i_F + KM_D i_D$$

Assim, substituindo-se na expressão de $\lambda_d$, anterior, as expressões de $i_F$ e $i_D$ das equações 4.243 e 4.244, vem que:

$$\lambda_d = (L_d - \frac{K^2 M_F{}^2 L_D - KM_F\, KM_D\, M_R}{L_F L_D - M_R{}^2} - \frac{K^2\, M_D{}^2\, L_F - KM_D\, KM_F\, M_R}{L_F L_D - M_R{}^2})\, i_d$$

E, seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, obtém-se que:

$$L''_d = L_d - \frac{(KM_F)^2 L_D + (KM_D)^2 L_F - 2KM_F\, KM_D\, M_R}{L_F L_D - M_R{}^2} \qquad (4.245)$$

Para o eixo em quadratura, pelos mesmos motivos já mencionados, obtêm-se resultados semelhantes. Senão, veja-se.

Considerando-se os circuitos, primeiro do enrolamento de campo e, posteriormente, o enrolamento amortecedor de eixo em quadratura, tem-se que:

$$\lambda_Q = 0 = KM_Q i_q + KM_q i_F + L_Q i_Q$$

$$\lambda_{Fq} = 0 = KM_q i_q + L_{Fq} i_F + M_{FQ} i_Q$$

Assim, das equações precedentes, extraem-se as seguintes expressões para as correntes $i_F$ e $i_Q$:

$$i_F = -\frac{KM_q\, L_Q - KM_Q\, M_{FQ}}{L_{Fq} L_Q - M_{FQ}{}^2}\, i_q \qquad (4.246)$$

e

$$i_Q = -\frac{KM_Q\, L_{Fq} - KM_q\, M_{FQ}}{L_{Fq} L_Q - M_{FQ}{}^2}\, i_q \qquad (4.247)$$

Também se sabe que o fluxo enlaçado no estator pelo enrolamento de eixo em quadratura é dado pela seguinte expressão:

$$\lambda_q = L_q i_q + KM_q i_F + KM_Q i_Q$$

Assim, substituindo-se na expressão de $\lambda_q$, anterior, as expressões de $i_F$ e $i_Q$ das equações 4.246 e 4.247, vem que:

$$\lambda_q = (L_q - \frac{K^2 M_q{}^2 L_Q - KM_q KM_Q M_{FQ}}{L_{Fq} L_Q - M_{FQ}{}^2} - \frac{K^2 M_Q{}^2 L_{Fq} - KM_Q KM_q M_{FQ}}{L_{Fq} L_Q - M_{FQ}{}^2})\, i_q$$

E, seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, obtém-se que:

$$L''_q = L_q - \frac{(KM_q)^2 L_Q + (KM_Q)^2 L_{Fq} - 2\, KM_Q\, KM_q\, M_{FQ}}{L_{Fq} L_Q - M_{FQ}{}^2} \qquad (4.248)$$

Para as máquinas de pólos salientes, onde não existe o enrolamento de campo de eixo em quadratura, vem que:

$$KM_q = M_{FQ} = 0$$

Podendo-se escrever que:

$$L''_q = L_q - \frac{(KM_Q)^2}{L_Q} \qquad (4.249)$$

Já para as máquinas de pólos lisos, pelas mesmas observações de tópicos anteriores, no cálculo da indutância subtransitória de eixo em quadratura, a expressão é fornecida pela equação 4.248.

**Nota:** comparando as equações obtidas para as indutâncias da máquina síncrona relativas ao eixo direto, equações 4.238 e 4.245, indutâncias $L'_d$ e $L''_d$, respectivamente, pode-se notar que a seguinte relação é verificada $L''_d < L'_d < L_d$. Do mesmo modo, pode-se também afirmar que para as indutâncias da máquina síncrona relativas ao eixo em quadratura, equações 4.240 e 4.248, indutâncias $L'_q$ e $L''_q$, respectivamente, que a seguinte relação é verificada $L''_q < L'_q < L_q$.

Considerando que as constantes de tempo envolvidas nos decaimentos assinalados anteriormente resultam em decaimentos exponenciais da resposta de um determinado sinal para uma máquina síncrona, e sabendo-se que essas constantes de tempo são diretamente proporcionais aos valores das indutâncias inerentes aos seus circuitos elétricos, praticamente pode-se afirmar, em função dos três regimes estudados, que:

$$T''_{d,q} < T'_{d,q} < T_{d,q} \qquad (4.250)$$

onde $T$ representa uma constante de tempo genérica que na equação 4.250 se associa com os regimes subtransitório, transitório e permanente e com os eixos ora $d$ ora $q$.

### 4.5.4. Indutâncias de Seqüência Negativa e Seqüência Zero

A indutância de seqüência negativa consiste na resposta da máquina síncrona à aplicação de um fluxo de seqüência negativa, ou seja:

a) aplicação de correntes instantâneas trifásicas de seqüência negativa aos enrolamentos do estator da máquina síncrona da seguinte forma, onde $I$**,** trata-se do valor rms:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{3}\, I \begin{bmatrix} cos(\omega_B t + \alpha) \\ cos(\omega_B t + \alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ cos(\omega_B t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{4.251}$$

b) enrolamento de campo curto-circuitado e não energizado.

O exemplo 4.8 resolve esse problema da seqüência negativa pela aplicação da transformação $d-q-0$ à equação 4.251, para $\theta = \omega t$.

Deste modo, por analogia, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{3}\, I \begin{bmatrix} 0 \\ cos\ (2\omega_B t + \alpha) \\ sin\ (2\omega_B t + \alpha) \end{bmatrix} \tag{4.252}$$

**Nota:** considerando-se uma simulação tal que, sob condições normais, pela aplicação de correntes de seqüencia positiva ao estator da máquina síncrona, por exemplo, o regime subtransitório seria percebido apenas nos primeiros ciclos, ou, como foi mencionado antes, coisa da ordem de aproximadamente $1{,}5\ ciclo$. Ante uma resposta que poderia ser a inspeção das correntes circulantes pelo circuito equivalente de eixo $d$ ou de eixo $q$ da máquina síncrona, também é percebido que, para se ter a certeza de um ensaio bem próximo da realidade do regime subtransitório, o enrolamento de campo deverá estar desenergizado e curto-circuitado de modo a garantir que haja a interação entre todos os enrolamentos da máquina em termos dos fluxos enlaçados.
Quando se aplicam correntes instantâneas trifásicas de seqüência negativa aos enrolamentos do estator da máquina síncrona, o efeito sentido é semelhante

àquele verificado quando se procede ao levantamento de características associadas ao regime subtransitório.
A razão da utilização da indutância subtransitória nos procedimentos ligados à determinação da indutância de seqüência negativa não tem nada a ver com o período subtransitório em si, mas sim com o fato de que, sob a ação de um desequilíbrio de seqüência negativa, todos os enrolamentos existentes na máquina síncrona se interagem o que coincidentemente tem tudo a ver com o próprio regime subtransitório.

Considerando-se as observações feitas anteriormente, pode-se escrever para as expressões dos fluxos enlaçados nos circuitos equivalentes de eixo $d$ e de eixo $q$, da máquina síncrona, que:

$$\lambda_d = L''_d \, i_d$$

e

$$\lambda_q = L''_q \, i_q$$

onde as indutâncias $L''_d$ e $L''_q$ são fornecidas pelas equações 4.245 e 4.248, respectivamente.

Da equação 4.252 se retiram as expressões para $i_d$ e $i_q$. Assim, as expressões para os fluxos enlaçados nos circuitos equivalentes de eixo $d$ e de eixo $q$ passam a ser as seguintes:

$$\lambda_d = \sqrt{3}\, I\, L''_d \cos(2\omega_B t + \alpha) \;\therefore\; \lambda_d = L''_d \sqrt{3}\, I \cos(2\omega_B t + \alpha) \quad (4.253)$$

e

$$\lambda_q = \sqrt{3}\, I\, L''_q \sin(2\omega_B t + \alpha) \;\therefore\; \lambda_q = L''_q \sqrt{3}\, I \sin(2\omega_B t + \alpha) \quad (4.254)$$

O fluxo enlaçado total para a fase $a$ da máquina síncrona pode ser expresso pela seguinte equação, em função do ângulo de rotação do campo:

$$\lambda_a = \lambda_d \cos\theta + \lambda_q \sin\theta + \lambda_0$$

Na equação anterior tem-se que $\lambda_0 = 0$, pois o sistema foi inicialmente tomado como sendo equilibrado.

Substituindo na equação anterior, do fluxo enlaçado total, as expressões das correntes $i_d$ e $i_q$, respectivamente das equações 4.253 e 4.254, obtém-se que:

$$\lambda_a = L''_d\sqrt{3}I\cos(2\omega_B t+\alpha)\cos\theta + L''_q\sqrt{3}I\sin(2\omega_B t+\alpha)\sin\theta =$$
$$= [L''_d\sqrt{3}I\cos(2\omega_B t+\alpha)\cos\theta + L''_q\sqrt{3}I\sin(2\omega_B t+\alpha)\sin\theta]\, i_a$$

e, por conseguinte, a expressão da indutância de seqüência negativa será:

$$L_2 = \frac{\lambda_a}{i_a} = L''_d\cos(2\omega_B t+\alpha)\cos\theta + L''_q\sin(2\omega_B t+\alpha)\sin\theta$$

onde $\theta = \omega_B t + \alpha$

Segundo cálculo que poderá ser acompanhado no exemplo 4.10, obtém-se então a expressão completa para a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona representada pela equação 4.255.

$$L_2 = \frac{L''_d + L''_q}{2}\cos\omega_B t + \frac{L''_d - L''_q}{2}\cos(3\omega_B t + 2\alpha) \qquad (4.255)$$

A indutância de seqüência negativa pode ser obtida a partir da parcela síncrona da equação 4.255.

Deste modo, simplificadamente, tem-se que:

$$L_2 = \frac{L''_d + L''_q}{2} \qquad (4.256)$$

**Nota:** analisando a equação 4.255, cuja expressão representa a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona, nota-se que esse valor é proporcional a duas parcelas sendo a primeira uma parcela síncrona com a freqüência fundamental e a outra proporcional ao terceiro harmônico da freqüência fundamental o que explica o motivo de a relação $\lambda_a/i_a$ não ser um valor constante.

Das equações 4.88 ficou comprovado que a indutância de seqüência zero da máquina síncrona é dada por:

$$L_o = L_s - 2M_s$$

O procedimento para o cálculo da indutância de seqüência zero da máquina síncrona deve seguir os passos seguintes.

a) aplicação de correntes instantâneas trifásicas de seqüência zero aos enrolamentos do estator da máquina síncrona da seguinte forma, onde $I$, trata-se do valor rms:

$$i_a = i_b = i_c = \sqrt{2} I \cos \omega_B t \qquad (4.257)$$

b) enrolamento de campo aberto.

Utilizando-se da equação 4.40, com $i_F = i_D = i_Q = 0$, obtém-se a seguinte expressão para o fluxo enlaçado da fase $a$:

$$\lambda_a = L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c$$

Das equações 4.51, 4.61, 4.63, respectivamente, retiram-se as expressões das indutâncias $L_{aa}$, $L_{ab}$ e $L_{ac}$.

Deste modo, a expressão anterior do fluxo enlaçado $\lambda_a$ tomará o seguinte aspecto:

$$\lambda_a = (L_s + L_m cos2\theta) + (-M_s - L_m cos2(\theta + \frac{\pi}{6}) + (-M_s - L_m cos2(\theta + \frac{5\pi}{6}) \sqrt{2} I \; cos\omega_B t$$

Rearranjando-se a expressão anterior vem que:

$$\lambda_a = (L_s - 2M_s)\sqrt{2}\, I \, cos\omega_B t + L_m \left[ cos2\theta - cos\,(2\theta + \frac{\pi}{3}) - cos\,(2\theta + \frac{5\pi}{3}) \right] \sqrt{2} I \, cos\omega_B t$$

Como se sabe, $cos2\theta - cos\,(2\theta + \frac{\pi}{3}) - cos\,(2\theta + \frac{5\pi}{3}) = 0$, logo, para a expressão anterior, tem-se que:

$$\lambda_a = (L_s - 2M_s) i_a \quad \therefore \quad \frac{\lambda_a}{i_a} = L_0 = L_s - 2M_s \qquad (4.258)$$

---

## EXEMPLO 4.10

Comprovar a equação 4.255 para a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona.

**Solução:**

Trata-se de uma questão de manipulação algébrica adequada.
A equação 4.255, cujos parâmetros e variáveis de estado já foram devidamente designados e explicados anteriormente, expressa a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona.

Reescrevendo a equação 4.255 aqui, para comodidade, vem que:

$$L_2 = \frac{L''d + L''q}{2} cos\,\omega_B t + \frac{L''d - L''q}{2} cos\,(3\omega_B t + 2\alpha\,)$$

Para a comprovação da expressão anterior, deve-se levar em conta a condição de operação subtransitória da máquina síncrona.
Como já foi citado anteriormente, durante as considerações prévias, o procedimento ligado à determinação da indutância de seqüência negativa tem tudo a ver com o regime subtransitório em que uma máquina síncrona opera.

A expressão obtida para designar a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona, pela aplicação da teoria, foi a seguinte:

$$L_2 = L''d\; cos(\,2\omega_B t + \alpha\,) cos\,\theta + L''q\; sin(2\omega_B t + \alpha\,) sin\,\theta \qquad (4.259)$$

onde $\theta = \omega_B t + \alpha$

Os membros da equação 4.259 podem ser desmembrados em duas parcelas $A$ e $B$ da seguinte forma:

$$A + B = [L''d\; cos(\,2\omega_B t + \alpha\,) cos\,\theta\,] + [L''q\; sin(2\omega_B t + \alpha\,) sin\,\theta\,] =$$

$$= [L''d\; cos(\,2\omega_B t + \alpha\,) cos(\,\omega_B t + \alpha\,)] + [L''q\; sin(2\omega_B t + \alpha\,) sin(\omega_B t + \alpha\,)]$$

Desenvolvendo, separadamente, cada uma das parcelas representadas por $A$ e $B$, da seguinte forma, tem-se que:

$$A = L''d\; [\,cos(\,2\omega_B t\,) cos\,\alpha - sin(2\omega_B t\,) sin\,\alpha\,]\,[\,cos\,\omega_B t\; cos\,\alpha - sin\,\omega_B t\; sin\,\alpha\,]$$

Promovendo as operações de multiplicação da segunda parcela da equação anterior obtém-se o seguinte:

$$A = L''d\; [\,cos(2\omega_B t\,) cos\,\omega_B t\; cos^2\alpha - cos(2\omega_B t\,) sin(\omega_B t\,) cos\,\alpha\; sin\,\alpha -$$

$$- sin(\,2\omega_B t) cos\,\omega_B t\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha + sin(\,2\omega_B t\,) sin\,\omega_B t\; sin^2\alpha\,] =$$

$$= L''d\; [\,cos(2\omega_B t\,) cos\,\omega_B t\; cos^2\alpha + sin(\,2\omega_B t\,) sin\,\omega_B t\; sin^2\alpha -$$

$$- \frac{1}{2} cos(2\omega_B t\,) sin(\omega_B t\,) sin\,2\alpha - \frac{1}{2} sin(\,2\omega_B t) cos\,\omega_B t\, sin\,2\alpha\,]$$

Reagrupando-se a expressão anterior vem que:

$$A = L''_d\,[\,\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t\,\cos^2\alpha + \sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t\,\sin^2\alpha - \\ -\frac{1}{2}\sin(3\omega_B t)\sin 2\alpha\,] \qquad (4.260)$$

Se o mesmo raciocínio for posto em prática para a expressão $B$ obtém-se que:

$$B = L''_q\,[\,\sin(2\omega_B t)\cos\alpha + \cos(2\omega_B t)\sin\alpha\,]\,[\,\sin\omega_B t\,\cos\alpha + \cos\omega_B t\,\sin\alpha\,]$$

Promovendo as operações de multiplicação da segunda parcela da equação anterior e reagrupando a expressão tem-se que:

$$B = L''_q\,[\,\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t\,\cos^2\alpha + \cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t\,\sin^2\alpha + \\ +\frac{1}{2}\sin(3\omega_B t)\sin 2\alpha\,] \qquad (4.261)$$

Somando-se as equações 4.260 e 4.261 vem que:

$$A + B = [L''_d\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t + L''_q\,[\,\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t\,]\cos^2\alpha + \\ + [L''_d\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t + L''_q\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t\,]\sin^2\alpha + \\ \frac{L''_q - L''_d}{2}\sin(3\omega_B t)\sin 2\alpha \qquad (4.262)$$

Chamando-se duas variáveis auxiliares de $C$ e $D$, para a equação anterior, vem que:

$$C = L''_d\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t + L''_q\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t \\ D = L''_d\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t + L''_q\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t \qquad (4.263)$$

A equação 4.262 tomará o seguinte aspecto, considerando-se as variáveis auxiliares de $C$ e $D$ das equações 4.263:

$$A + B = C\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha + \frac{L''_q - L''_d}{2}\sin(3\omega_B t)\sin 2\alpha \qquad (4.264)$$

Parte da segunda parcela da equação 4.264 pode ser assim escrita e decomposta:

$$E = C\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha = \frac{C}{2}\cos^2\alpha + \frac{C}{2}\cos^2\alpha + \frac{D}{2}\sin^2\alpha + \frac{D}{2}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{C}{2}(1-\sin^2\alpha) + \frac{C}{2}\cos^2\alpha + \frac{D}{2}(1-\cos^2\alpha) + \frac{D}{2}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{C}{2} - \frac{C}{2}\sin^2\alpha + \frac{C}{2}\cos^2\alpha + \frac{D}{2} - \frac{D}{2}\cos^2\alpha) + \frac{D}{2}\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{C+D}{2} + \frac{C-D}{2}\cos^2\alpha + \frac{D-C}{2}\sin^2\alpha = \frac{C+D}{2} + \frac{C-D}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Logo

$$C\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha = \frac{C+D}{2} + \frac{C-D}{2}\cos 2\alpha \qquad (4.265)$$

Trazendo na equação 4.265 as expressões das variáveis auxiliares $C$ e $D$, das equações 2.263, obtém-se:

$$C\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha = \frac{C+D}{2} + \frac{C-D}{2}\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{L''d\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t + L''q\ \sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t}{2} +$$

$$+ \frac{L''d\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t + L''q\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t}{2} +$$

$$+ \frac{L''d\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t + L''q\ \sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t}{2}\cos 2\alpha +$$

$$- \frac{L''d\sin(2\omega_B t)\sin\omega_B t + L''q\cos(2\omega_B t)\cos\omega_B t}{2}\cos 2\alpha$$

Reagrupando adequadamente e efetuando as devidas simplificações sobre a expressão anterior tem-se que:

$$C\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha = \frac{C+D}{2} + \frac{C-D}{2}\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{L''d + L''q}{2}\cos\omega_B t + \frac{L''d - L''q}{2}\cos 3\omega_B t\ \cos 2\alpha$$

Voltando na equação 4.264, a partir da expressão anterior, obtém-se que:

$$A + B = \frac{L''d + L''q}{2}\cos\omega_B t + \frac{L''d - L''q}{2}\cos 3\omega_B t\ \cos 2\alpha - \frac{L''d - L''q}{2}\sin(3\omega_B t)\sin 2\alpha$$

(4.266)

Finalmente, com o resultado da equação 4.266, a equação 4.259 se transforma na seguinte equação:

$$L_2 = \frac{L''_d + L''_q}{2} cos\,\omega_B t + \frac{L''_d - L''_q}{2} cos(3\omega_B t + 2\alpha)$$

---

## EXEMPLO 4.11

Comprovar a equação 4.232, referente à expressão da indutância síncrona de eixo direto da máquina síncrona, tomando-se a fase $a$ por referência.

**Solução:**

A expressão da indutância síncrona de eixo direto de uma máquina síncrona para a fase $a$, por exemplo, é dada pela equação 4.232 aqui reescrita por comodidade.

$$L_d = \frac{L_{aa}\, i_a + L_{ab}\, i_b + L_{ac}\, i_c}{i_a}$$

A idealização desse problema está associada à questão da simulação durante a elaboração da teoria mostrada anteriormente na qual se desejava obter uma expressão para indutância síncrona de eixo direto $L_d$, a partir de um processo de simulação teórico, com a aplicação de correntes de seqüência aos enrolamentos da armadura ou estator da máquina elétrica.

As condições respeitadas para a simulação foram as seguintes:

a) aplicação de correntes instantâneas trifásicas de seqüência positiva aos enrolamentos do estator da máquina síncrona da forma expressa na equação matricial 4.231, também aqui reescrita por comodidade, onde $I$, trata-se do valor rms e $\theta = \omega_B t + \alpha$:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{2}\, I \begin{bmatrix} cos\,\theta \\ cos\,(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ cos\,(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

b) enrolamento de campo da máquina síncrona mantido aberto;

c) eixo da fmm de giro da máquina síncrona alinhado com o eixo direto da máquina.

As expressões para as indutâncias própria e mútuas do estator, considerando-se a fase $a$, são dadas pelas equações 4.51, 4.61 e 4.63, seguintes:

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2\theta$$

$$L_{ab} = -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6})$$

$$L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6})$$

Substituindo as expressões das correntes de seqüência, dadas na equação 4.231, e as expressões das indutâncias própria e mútuas do estator, dadas nas equações 4.51, 4.61 e 4.63, no numerador do segundo membro da equação 2.232, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{\sqrt{2}I})(L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c) &= (L_s + L_m \cos 2\theta)\cos\theta + \\ &+ [-M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6})]\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \\ &+ [-M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6})]\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = A\end{aligned} \qquad (4.267)$$

A equação 2.267 pode ser desmembrada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}A &= L_s \cos\theta + L_m \cos 2\theta \cos\theta + \\ &- M_s \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6})\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \\ &- M_s \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) - L_m \cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6})\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})\end{aligned}$$

Desenvolvendo, na equação precedente, os termos em ângulos elétricos dobrados, tem-se que:

$$\begin{aligned}A &= L_s \cos\theta + L_m (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta + \\ &- M_s \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) - L_m [\cos^2(\theta + \frac{\pi}{6}) - \sin^2(\theta + \frac{\pi}{6})]\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \\ &- M_s \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) - L_m [\cos^2(\theta + \frac{5\pi}{6}) - \sin^2(\theta + \frac{5\pi}{6})]\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})\end{aligned}$$

Efetuando os produtos dos termos entre parêntesis e, posteriormente, ordenando o segundo membro resultante nos termos $L_S$, $M_S$, e $L_m$, tem-se, para a equação anterior, que:

$$A = L_S \cos\theta - M_S[\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})] + L_m[(\cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta -$$
$$- \cos^2(\theta + \frac{\pi}{6})\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(\theta + \frac{\pi}{6})\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) - \cos^2(\theta + \frac{5\pi}{6})\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) +$$
$$+ \sin^2(\theta + \frac{5\pi}{6})\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})] \qquad (4.268)$$

Os termos da equação 4.268 entre colchetes serão desenvolvidos à parte.

Deste modo, tem-se que:

$$\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = 2\cos\theta\cos\frac{2\pi}{3} = 2\cos\theta(-\frac{1}{2}) = -\cos\theta \qquad (4.269)$$

e também

$$B = \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta - \cos^2(\theta + \frac{\pi}{6})\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(\theta + \frac{\pi}{6})\cos(\theta - \frac{2\pi}{3})$$
$$- \cos^2(\theta + \frac{5\pi}{6})\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \sin^2(\theta + \frac{5\pi}{6})\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) =$$
$$= \cos\theta[\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos\theta] - \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})[\cos^2(\theta + \frac{\pi}{6}) - \sin^2(\theta + \frac{\pi}{6})] -$$
$$- \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})[\cos^2(\theta + \frac{5\pi}{6}) - \sin^2(\theta + \frac{5\pi}{6})] =$$
$$= \cos\theta\cos 2\theta - \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})\cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) - \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})\cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6})$$

Facilmente se compram as seguintes identidades trigonométricas:

$$-\cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) = -\cos(2\theta + \frac{\pi}{3}) = \cos(2\theta - \frac{2\pi}{3})$$

$$-\cos 2(\theta + \frac{5\pi}{6}) = -\cos(2\theta + \frac{5\pi}{3}) = \cos(2\theta + \frac{2\pi}{3})$$

Utilizando-se das identidades anteriores, a nova expressão para $B$ será a seguinte:

$$B = \cos\theta\cos 2\theta + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})\cos(2\theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})\cos(2\theta + \frac{2\pi}{3})$$

Desenvolvendo-se a expressão $B$, da equação anterior, vem que:

$$B = cos\,\theta\, cos\,2\theta + [cos\,\theta\, cos(\frac{2\pi}{3}) + sin\,\theta\, sin(\frac{2\pi}{3})]\,[cos\,2\theta\, cos(\frac{2\pi}{3}) + sin\,2\,\theta\, sin(\frac{2\pi}{3})] +$$
$$+ [cos\,\theta\, cos(\frac{2\pi}{3}) - sin\,\theta\, sin(\frac{2\pi}{3})]\,[cos\,2\theta\, cos(\frac{2\pi}{3}) - sin\,2\,\theta\, sin(\frac{2\pi}{3})]$$

Na equação anterior, atribuindo os devidos valores às funções com os seus argumentos numéricos, obtém-se que:

$$B = cos\,\theta\, cos\,2\theta + [(-\frac{1}{2})cos\,\theta + (\frac{\sqrt{3}}{2})sin\,\theta]\,[(-\frac{1}{2})cos\,2\theta + (\frac{\sqrt{3}}{2})sin\,2\,\theta] +$$
$$+ [(-\frac{1}{2})cos\,\theta - (\frac{\sqrt{3}}{2})sin\,\theta]\,[(-\frac{1}{2})cos\,2\theta - (\frac{\sqrt{3}}{2})sin\,2\,\theta] = \quad (4.270)$$
$$= \frac{3}{2}(cos\,\theta\, cos\,2\theta + sin\,\theta\, sin\,2\theta) = \frac{3}{2}cos\,(-\theta) = \frac{3}{2}cos\,\theta$$

Levando-se as expressões obtidas das equações 4.269 e 4.270 na equação principal 4.268, a expressão de $A$, da equação 4.267, tomará o seguinte aspecto:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}\,I})(L_{aa}\,i_a + L_{ab}\,i_b + L_{ac}\,i_c) = L_s\,cos\,\theta + M_s\,cos\,\theta + L_m\,\frac{3}{2}cos\,\theta$$

ou melhor

$$L_{aa}\,i_a + L_{ab}\,i_b + L_{ac}\,i_c = \sqrt{2}\,I\,cos\,\theta\,[L_s + M_s + \frac{3}{2}L_m] = i_a\,(L_s + M_s + \frac{3}{2}L_m)$$

Rearranjando a equação anterior, adequadamente, finalmente chega-se a:

$$L_d = \frac{L_{aa}\,i_a + L_{ab}\,i_b + L_{ac}\,i_c}{i_a} = \frac{\lambda_a}{i_a} = L_s + M_s + \frac{3}{2}L_m \quad (4.271)$$

Das equações 4.51 e 4.61, que associam os valores dos elementos das indutâncias da máquina síncrona com o número de espiras dos enrolamentos e com a permeância magnética do meio envolvido, sabe-se que:

$$L_s = N_a{}^2\,\frac{\Im_d + \Im_q}{2}\ ,\quad M_s = N_a{}^2\,\frac{\Im_d + \Im_q}{4}\quad \text{e}\quad L_m = N_a{}^2\,\frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Levando-se em conta esses valores, a equação 4.271 permite escrever que:

$$L_d = L_s + M_s + \frac{3}{2}L_m = N_a{}^2\,\frac{\Im_d + \Im_q}{2} + N_a{}^2\,\frac{\Im_d + \Im_q}{4} + \frac{3}{2}N_a{}^2\,\frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Assim, tem-se que:

$$L_d = \frac{3}{2} N_a^2 \Im_d \qquad (4.272)$$

**Nota a respeito do exemplo 4.11:**

Como era de se esperar, a indutância de eixo $d$ depende unicamente da permeância magnética do meio físico envolvido que, no caso, trata-se do circuito magnético envolvendo o núcleo de ferro, referente ao pólo, e o enrolamento da fase $a$ da máquina síncrona, passando pelo *gap* do entreferro. A questão de ser a fase $a$, da máquina síncrona, foi uma questão de escolha apenas.

---

## EXEMPLO 4.12

Comprovar a equação 4.235, referente à expressão da indutância síncrona de eixo em quadratura da máquina síncrona, tomando-se a fase $a$ por referência.

**Solução:**

A expressão da indutância síncrona de eixo em quadratura de uma máquina síncrona para a fase $a$, por exemplo, é dada pela equação 4.235 aqui reescrita por comodidade.

$$L_q = L_s + M_s - \frac{3}{2} L_M$$

A idealização desse problema, assim como no exemplo 4.11, está associada à questão da simulação durante a elaboração da teoria mostrada anteriormente na qual se desejava obter uma expressão para indutância síncrona de eixo em quadratura $L_q$, a partir de um processo de simulação teórico, com a aplicação de correntes de seqüência aos enrolamentos da armadura ou estator da máquina elétrica.

A fórmula a ser utilizada é a mesma que foi empregada quando da dedução da expressão para a indutância síncrona de eixo direto e é mostrada a seguir.

$$L_d = \frac{L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c}{i_a}$$

As condições respeitadas para a simulação foram as seguintes:

a) aplicação de correntes instantâneas trifásicas de seqüência positiva aos enrolamentos do estator da máquina síncrona da forma expressa na equação

matricial 4.231, também aqui reescrita por comodidade, onde $I$, trata-se do valor rms e $\theta = \omega_B t + \alpha$:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{2} I \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

b) enrolamento de campo da máquina síncrona mantido aberto;

c) eixo da fmm de giro da máquina síncrona alinhado com o eixo em quadratura da máquina, ou seja, atrasado de $\pi/2$ radianos elétricos em relação ao eixo polar.

As expressões para as indutâncias própria e mútuas do estator, considerando-se a fase $a$, são dadas pelas equações 4.51, 4.61 e 4.63, seguintes, e deverão ter seus ângulos de fase corrigidos para o caso em questão no qual a fmm de giro tem o sentido de sua flecha atrasada de $\pi/2$ radianos elétricos em relação à flecha do eixo polar.
Deste modo, o que se tem agora são as seguintes expressões para as indutâncias envolvidas nesse processo:

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$L_{ab} = -M_s - L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -M_s - L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}) = -M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{3})$$

Substituindo as expressões das correntes de seqüência, dadas na equação 4.231, e as expressões das indutâncias própria e mútuas do estator, dadas nas equações 4.51, 4.61 e 4.63, cujas fases foram corrigidas considerando o eixo em quadratura, no numerador do segundo membro da equação 2.232, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{\sqrt{2} I})(L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c) &= [L_s + L_m 2(\theta - \frac{\pi}{2})] \cos\theta + \\ &+ [-M_s - L_m \cos 2(\theta - \frac{\pi}{3})] \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \\ &+ [-M_s - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{3})] \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = A \end{aligned} \qquad (4.273)$$

Analisando o andamento do raciocínio que foi aplicado no exemplo 4.10, quando da obtenção da expressão para a indutância $L_d$ da máquina síncrona, dois ângulos elétricos distintos aparecem durante o desenvolvimento algébrico. Um ângulo tem a ver com a fase das correntes aplicadas ao estator, ângulo $\theta = \omega_B t$, enquanto o outro se refere às indutâncias das fases envolvidas, ou seja, $2\theta = 2\omega_B t$.

O desenvolvimento visando à obtenção da expressão para a indutância $L_q$ da máquina síncrona em nada difere do caso anterior. Apenas se deve ter o devido cuidado de introduzir um atraso de $\pi/2$ radianos aos ângulos $2\theta = 2\omega_B t$ das parcelas inerentes.

Todo o desenvolvimento anterior se deu respeitando tal condição, sendo que a última expressão, onde os dois ângulos aparecem distintos, ocorre na equação 4.270, quando da elaboração da expressão identificada como $B$.

Seguindo o mesmo procedimento verificado no exemplo 4.10, anterior, a equação 4.273 tomará a seguinte forma:

$$A = L_s \cos\theta + M_s \cos\theta + L_m B \tag{4.274}$$

Deste modo, aproveitando de todo raciocínio já desenvolvido, a nova expressão de $B$ será dada por:

$$\begin{aligned} B &= \cos\theta \cos 2\theta + [(-\frac{1}{2})\cos\theta + (\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\theta][(-\frac{1}{2})\cos 2\theta + (\frac{\sqrt{3}}{2})\sin 2\theta] + \\ &+ [(-\frac{1}{2})\cos\theta - (\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\theta][(-\frac{1}{2})\cos 2\theta - (\frac{\sqrt{3}}{2})\sin 2\theta] = \\ &= \frac{3}{2}(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta \sin 2\theta) = \frac{3}{2}\cos(\theta - 2\theta) \end{aligned} \tag{4.275}$$

Introduzindo então o devido atraso, sugerido para o ângulo elétrico $\theta$, no argumento que contém a variável $2\theta$, da equação 4.275, obtém-se a nova expressão $B$ para a condição eixo em quadratura. Se não, veja-se:

$$B = \frac{3}{2}\cos[(\theta - 2(\theta - \frac{\pi}{2})] = \frac{3}{2}\cos(-\theta + \pi) = -\frac{3}{2}\cos\theta \tag{4.276}$$

Levando-se a expressão de $B$, da equação 4.276 na equação principal 4.274, a expressão de $A$ tomará o seguinte aspecto:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}I})(L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c) = L_s \cos\theta + M_s \cos\theta - L_m \frac{3}{2}\cos\theta$$

ou melhor

$$L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c = \sqrt{2} I \cos\theta [L_s + M_s - \frac{3}{2}L_m] = i_a (L_s + M_s - \frac{3}{2}L_m)$$

Rearranjando a equação anterior, adequadamente, finalmente chega-se a:

$$L_d = \frac{L_{aa} i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c}{i_a} = \frac{\lambda_a}{i_a} = L_s + M_s - \frac{3}{2} L_m \qquad (4.277)$$

Das equações 4.51 e 4.61, que associam os valores dos elementos das indutâncias da máquina síncrona com o número de espiras dos enrolamentos e com a permeância magnética do meio envolvido, sabe-se que:

$$L_s = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{2} \;\; , \;\; M_s = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{4} \;\; \text{e} \;\; L_m = N_a^2 \; \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Levando-se em conta esses valores, a equação 4.277 permite escrever que:

$$L_d = L_s + M_s - \frac{3}{2} L_m = N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{2} + N_a^2 \; \frac{\Im_d + \Im_q}{4} - \frac{3}{2} N_a^2 \; \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Assim, tem-se que:

$$L_d = \frac{3}{2} N_a^2 \, \Im_q \qquad (4.278)$$

**Nota a respeito do exemplo 4.12:**

Assim como no caso do exemplo anterior 4.11, a indutância de eixo $q$ depende unicamente da permeância magnética do meio físico envolvido que, no caso, trata-se do circuito magnético envolvendo o ar e o enrolamento da fase $a$ da máquina síncrona. A questão de ser a fase $a$, como mencionado anteriormente, foi uma questão de escolha apenas.

---

## EXEMPLO 4.13

Considerar uma máquina síncrona, um gerador de energia elétrica de uma UHE de grande porte, cujos principais dados são fornecidos a seguir.
Encontrar os valores, em por unidade, das reatâncias síncrona, transitória e subtransitória dos enrolamentos da armadura levando-se em conta uma base de valores tomados a partir da potência aparente trifásica, em $MVA$, e da tensão de estator entre fases, em $kV$, da própria máquina.
Utilizar, na solução do problema, os critérios adotados até então nesse livro e considerar que a ligação dos enrolamentos de fase do estator da máquina síncrona seja da forma estrela aterrada.
Desprezar os valores das resistências dos enrolamentos da armadura.

Dados principais:

- potência trifásica nominal $= 300\ MVA$
- tensão terminal nominal entre fases de estator $= 16{,}5\ kV$
- corrente de estator nominal por fase $= 10.497\ A$
- tensão de campo nominal $= 350 V$
- corrente de campo nominal $= 1.380\ A$
- fator de potência nominal $= 0{,}95$
- freqüência elétrica nominal $= 60\ Hz$
- corrente de campo a vazio não saturada $= 802\ A$
- corrente de campo a vazio saturada $= 944\ A$
- indutância síncrona de eixo direto do estator $= 3\ mH$
- indutância síncrona de eixo em quadratura do estator $= 2{,}1\ mH$
- fator de dispersão do fluxo indutor total rotor - estator $= 8\%$
- resistência do estator por fase $= 4{,}4\ m\Omega (*)$
- indutância do enrolamento de campo $= 2\ H$
- resistência do enrolamento de campo $= 486\ m\Omega (*)$
- indutância do enrolamento de amortecedor de eixo direto $= 6\ mH$
- resistência do enrolamento de amortecedor de eixo direto $= 50\ m\Omega (*)$
- indutância do enrolamento de amortecedor de eixo em quadratura $= 1{,}5\ mH$
- resistência do enrolamento de amortecedor de eixo em quadratura $= 50\ m\Omega (*)$
- reatância síncrona de eixo direto não saturada $= 1{,}131\ \Omega$
- reatância transitória de eixo direto $= 0{,}330\ \Omega$
- reatância subtransitória de eixo direto $= 0{,}261\ \Omega$
- reatância síncrona de eixo em quadratura $= 0{,}801\ \Omega$
- reatância subtransitória de eixo em quadratura $= 0{,}257\ \Omega$

(*) Considerar que as resistências foram medidas a uma temperatura de $75°C$.

**Solução:**

O que se quer nesse problema é a obtenção dos valores em por unidade ou pu das reatâncias síncrona, transitória e subtransitória dos enrolamentos de armadura ou estator do gerador síncrono cujas características foram dadas no enunciado.
Como as reatâncias pedidas pertencem ao plano do estator da máquina síncrona, a base de valores adotada será a mesma para as três condições, quais sejam, síncrona, transitória e subtransitória.

A base de valores pedida para o estator será a seguinte:

- potência trifásica base $S_B = 300\ MVA$
- tensão terminal entre fases base $V_B = 16{,}5\ kV$
- corrente de estator por fase base $= 10.497\ A$
- freqüência elétrica base $\omega_B = 377\ rad/s$

a) cálculo da impedância base $Z_B$ em $\Omega$/ fase

Ao se considerar que a disposição física dos enrolamentos do estator da máquina síncrona é do tipo estrela aterrada, pode-se utilizar a expressão seguinte para a determinação da impedância base por fase, levando-se em conta a potência aparente trifásica de $S_B = 300\,MVA$ e da tensão de estator entre fases de $V_B = 16{,}5\,kV$.

Deste modo, pelos dados principais fornecidos da máquina síncrona em questão, tem-se que:

$$Z_B = \frac{(V_B)^2}{S_B} = \frac{(16.500\,)^2}{300.000.000} = 0{,}9075\ \Omega$$

b) cálculo da impedância síncrona de eixo direto $x_{du}$

$$x_{du} = \frac{x_d}{Z_B} = \frac{1{,}131}{0{,}9075} = 1{,}246\ pu$$

c) cálculo da impedância síncrona de eixo em quadratura $x_{qu}$

$$x_{qu} = \frac{x_q}{Z_B} = \frac{0{,}801}{0{,}9075} = 0{,}882\ pu$$

d) cálculo da impedância transitória de eixo direto $x'_{du}$

$$x'_{du} = \frac{x'_d}{Z_B} = \frac{0{,}330}{0{,}9075} = 0{,}363\ pu$$

e) cálculo da impedância subtransitória de eixo direto $x''_{du}$

$$x''_{du} = \frac{x''_d}{Z_B} = \frac{0{,}261}{0{,}9075} = 0{,}287\ pu$$

f) cálculo da impedância subtransitória de eixo em quadratura $x''_{qu}$

$$x''_{qu} = \frac{x''_q}{Z_B} = \frac{0,257}{0,9075} = 0,283\,pu$$

---

## EXEMPLO 4.14

Considerando a mesma máquina síncrona do exemplo 4.13, anterior, cujos principais dados já foram fornecidos, encontrar os valores das indutâncias síncrona, transitória e subtransitória, úteis, dos enrolamentos da armadura levando-se em conta uma base de valores tomados a partir da potência aparente trifásica, em $MVA$, e da tensão de estator entre fases, em $kV$, da própria máquina.
Utilizar, na solução do problema, os critérios adotados até então nesse livro e considerar que a ligação dos enrolamentos de fase do estator da máquina síncrona seja da forma estrela aterrada.
Desprezar os valores das resistências dos enrolamentos da armadura.

**Solução:**

Para a solução desse problema é necessário o conhecimento da taxa de dispersão do fluxo magnético indutor que, no caso, abrange a dispersão do fluxo entre rotor e estator.
Como se sabe, o fluxo de dispersão tem a ver com a parte do fluxo magnético produzido pelo circuito de excitação do campo da máquina síncrona que não consegue atravessar os enrolamentos do estator acabando por se fechar através do ar.
Existem vários fatores que podem influenciar na existência ou mesmo no valor do fluxo de dispersão, principalmente o que os autores chamam de ranhura de dispersão entre outros.
Normalmente, segundo a literatura técnica, principalmente a referência 3, o fluxo de dispersão encontra-se entre $10$ e $20\%$ do valor do fluxo útil que atravessa a armadura da máquina síncrona.
Pode-se dizer, de maneira bem prática, que a indutância de dispersão em uma máquina síncrona, entre dois circuitos magnéticos, deve ficar entre $8$ e $16\%$ do valor da indutância total associada ao fluxo magnético que os enlaça.

Considerando um fluxo de dispersão da ordem de $8\%$ para todos os enlaces de fluxos possíveis, levando-se em conta os dados principais fornecidos da máquina síncrona em questão, tem-se, pela utilização das equações 4.111, que:

a) cálculo da indutância síncrona de eixo direto útil $L_{md}$

Pelo que foi dito, pode-se escrever que:

$$L_{md} = L_d - L_{dd} \quad \therefore \quad L_{md} = L_d - 0,08\,L_d$$

Substituindo-se os valores vem que:

$$L_{md} = 0{,}003 - 0{,}08\,x0{,}003 = 0{,}00276 \quad \therefore \quad L_{md} = 2{,}76 \ mH$$

b) cálculo da indutância síncrona de eixo em quadratura útil $L_{mq}$

De modo semelhante, pode-se escrever que:

$$L_{mq} = L_q - L_{dq} \quad \therefore \quad L_{mq} = L_q - 0{,}08\,L_d$$

Substituindo-se os valores vem que:

$$L_{mq} = 0{,}0021 - 0{,}08\,x0{,}003 = 0{,}00186 \quad \therefore \quad L_{mq} = 1{,}86 \ mH$$

c) cálculo da indutância transitória de eixo direto útil $L'_{md}$

De modo semelhante, pode-se escrever que:

$$L'_{md} = L'_d - L'_{dd} \quad \therefore \quad L'_{md} = L'_d - 0{,}08\,L'_d$$

Como não se dispõe do valor da indutância transitória de eixo direto $L'_d$, será promovido o devido cálculo a partir da seguinte fórmula:

$$L'_d = \frac{x'_d}{\omega_B} = \frac{0{,}330}{377} = 0{,}0009\,H$$

Assim

$$L'_{md} = 0{,}0009 - 0{,}08\,x0{,}0009 = 0{,}00082 \quad \therefore \quad L'_{md} = 0{,}82 \ mH$$

d) cálculo da indutância subtransitória de eixo direto útil $L''_{md}$

De modo semelhante, pode-se escrever que:

$$L''_{md} = L''_d - L''_{dd} \quad \therefore \quad L''_{md} = L''_d - 0{,}08\,L''_d$$

Como não se dispõe do valor da indutância subtransitória de eixo direto $L''_d$, será promovido o devido cálculo a partir da seguinte fórmula:

$$L''_d = \frac{x''_d}{\omega_B} = \frac{0,261}{377} = 0,00069\,H$$

Assim

$$L''_{md} = 0,00069 - 0,08\,x0,00069 = 0,00063 \;\;\therefore\;\; L''_{md} = 0,63\ mH$$

e) cálculo da indutância subtransitória de eixo em quadratura útil $L''_{mq}$

De modo semelhante, pode-se escrever que:

$$L''_{mq} = L''_q - L''_{dq} \;\;\therefore\;\; L''_{mq} = L''_q - 0,08\,L''_q$$

Como não se dispõe do valor da indutância subtransitória de eixo direto $L''_q$, será promovido o devido cálculo a partir da seguinte fórmula:

$$L''_q = \frac{x''_q}{\omega_B} = \frac{0,257}{377} = 0,00068\,H$$

Assim

$$L''_{mq} = 0,00068 - 0,08\,x0,00068 = 0,00062 \;\;\therefore\;\; L''_{mq} = 0,62\ mH$$

---

## EXEMPLO 4.15

Considerando a mesma máquina síncrona do exemplo 4.13, anterior, cujos principais dados já foram fornecidos, encontrar os valores das indutâncias e resistências dos enrolamentos da armadura, de campo e de amortecimento levando-se em conta uma base de valores tomados a partir da potência aparente trifásica, em $MVA$, e da tensão de estator entre fases, em $kV$, da própria máquina.
Utilizar, na solução do problema, os critérios adotados até então nesse livro e considerar que a ligação dos enrolamentos de fase do estator da máquina síncrona seja da forma estrela aterrada.

**Solução:**

A base de valores a ser utilizada já foi definida no exemplo 4.13 e, para o estator, é a seguinte:

- potência trifásica base $S_B = 300\ MVA$
- tensão terminal entre fases base $V_B = 16,5\ kV$
- corrente de estator por fase base $I_B = 10.497\ A$
- freqüência elétrica base $\omega_B = 377\ rad/s$

a) cálculo do fluxo enlaçado base $\lambda_B$ por fase

Sabe-se, da teoria, que:

$$\lambda_B = \frac{V_B/\sqrt{3}}{\omega_B} = \frac{16500/\sqrt{3}}{377} = 25,268 \text{ espiras x Weber / fase}$$

Deste modo, a resistência base e a indutância base serão:

$$R_B = \frac{V_B/\sqrt{3}}{I_B} = \frac{16500/\sqrt{3}}{10.497} = 0,9075\ \Omega \text{ / fase}$$

e também

$$L_B = \frac{\lambda_B}{I_B} = \frac{25,268}{10.497} = 0,0024 \text{ H / fase}$$

Devem-se obter os valores de $L_{md}$ e $L_{mq}$, ou seja, os valores úteis das indutâncias de eixo $d$ e eixo $q$, em função do efeito de dispersão. Tais valores já foram calculados no exemplo 4.14 e valem:

$$L_{md} = 2,76\ mH$$

$$L_{mq} = 1,86\ mH$$

Da mesma forma que a base de valores foi aplicada ao estator da máquina síncrona, a partir daqui, ela também será estendida para o rotor envolvendo os enrolamentos de campo e amortecedor.

Sabe-se, a partir das equações 4.145, 4.146 e 4.149, que as seguintes relações são válidas:

$$\frac{I_{FB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{FB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mF}}} = \frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} = \frac{KM_D}{M_R} = K_F$$

$$\frac{I_{DB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{DB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mD}}} = \frac{L_{md}}{KM_D} = \frac{KM_D}{L_{mD}} = \frac{KM_F}{M_R} = K_D$$

$$\frac{I_{QB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{QB}} = \sqrt{\frac{L_{mq}}{L_{mQ}}} = \frac{L_{mq}}{KM_Q} = \frac{KM_Q}{L_{mQ}} = K_Q$$

Evidentemente que a solução só será possível a partir do conhecimento e determinação das indutâncias mútuas $KM_F$, $KM_D$ e $KM_Q$.

b) cálculo da indutância mútua $KM_F$

Considerando a condição de máquina operando a vazio, pela equação matricial 4.40, obtém-se que:

$$\lambda_a = L_{aF}\, i_F \quad \text{com} \quad i_a = i_b = i_c = i_D = i_Q = 0 \qquad (4.279)$$

A equação anterior representa o valor instantâneo do fluxo enlaçado útil, através da fase $a$ do estator, em função da corrente instantânea de campo $i_F$.

$L_{aF}$, trata-se da indutância mútua entre estator e rotor e, pela equação 4.74, tem o seguinte valor:

$$L_{aF} = M_F \cos\theta$$

Com a expressão de $L_{aF}$, da equação anterior, o fluxo enlaçado útil através da fase $a$ do estator, dado pela equação 4.279, ficará da seguinte forma:

$$\lambda_a = M_F \cos\theta\, i_F \qquad (4.280)$$

onde $\theta = \omega_B t$

A tensão instantânea na fase $a$ do estator da máquina síncrona será dada pela equação matricial 4.90, considerando-se, ainda, a condição de operação em vazio da máquina elétrica.

Assim, pode-se escrever que:

$$v_a + \dot{\lambda}_a = 0$$

Trazendo-se na equação anterior a expressão de $\dot{\lambda}_a$, da equação 4.280, e igualando-se ao valor instantâneo da tensão de fase, vem que:

$$v_a = \omega_B M_F\, i_F \sin\theta = \sqrt{2} V_{rms} \sin\theta$$

Logo

$$M_F = \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{\omega_B \; i_F}$$

Como, para o cálculo presente, o que interessa é a condição não saturada da máquina síncrona em sua curva de magnetização, a nova expressão para a indutância $M_F$ será:

$$M_F = \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{\omega_B \; i_{Fñs}} \qquad (4.281)$$

A partir dos valores principais fornecidos no enunciado, obtém-se que:

$$M_F = \frac{\sqrt{2}\,x16.500}{377\ x\ 802} = 0{,}07717\ H \quad \therefore \quad K\,M_F = (\sqrt{3/2})\,x\,0{,}07717 = 0{,}09451\ mH$$

c) cálculo das indutâncias mútuas $KM_D$ e $KM_Q$

Para os valores das indutâncias mútuas $KM_D$ e $KM_Q$ serão adotadas as seguintes aproximação:

$$\begin{aligned} L_{mD} &= L_{mQ} \\ KM_D &\cong L_{mD} \\ KM_Q &\cong L_{mQ} \end{aligned} \qquad (4.282)$$

Considerando que o fator de dispersão do fluxo magnético entre os enrolamentos do estator e amortecedor siga a mesma regra verificada entre os enrolamentos do estator e de campo, tem-se, tomando os dados principais apresentados no enunciado, que:

$$L_{dD} = L_{dQ} = 0{,}08\,L_D = 0{,}08\,x\,0{,}006 = 0{,}00048\ mH$$

Deste modo

$$KM_D = L_{mD} = L_D - 0{,}08\,L_D = 0{,}006 - 0{,}08\,x\,0{,}006 = 0{,}00552\ mH$$

e também

$$KM_Q = L_{mQ} = L_Q - 0{,}08\,L_D = 0{,}0015 - 0{,}08\,x\,0{,}006 = 0{,}00102\ mH$$

d) cálculo das indutâncias mútuas $KM_F$, $KM_D$ e $KM_Q$

A partir das equações 4.145, 4.146 e 4.149, considerando-se os valores obtidos através dos cálculos precedentes, vem que:

$$K_F = \frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{0,00276}{0,09451} = 0,02920$$

e

$$K_D = \frac{L_{md}}{KM_D} = \frac{0,00276}{0,00552} = 0,5$$

e também

$$K_Q = \frac{L_{mq}}{KM_Q} = \frac{0,00186}{0,00102} = 1,82352$$

Deste modo, podem-se obter as tensões e correntes, em seus valores base, tanto para o circuito de campo quanto para o circuito amortecedor.
Senão, veja-se:

$$\frac{I_{FB}}{I_B} = K_F = 0,02920 \quad \therefore \quad I_{FB} = 0,02920 \, x 10.497 = 306,51 \, A$$

$$\frac{V_B}{V_{FB}} = K_F = 0,02920 \quad \therefore \quad V_{FB} = \frac{16500/\sqrt{3}}{0,02920} = 326.242,44 \, V$$

$$\frac{I_{DB}}{I_B} = K_D = 0,5 \quad \therefore \quad I_{DB} = 0,5 \, x 10.497 = 5.248,5 \, A$$

$$\frac{V_B}{V_{DB}} = K_D = 0,5 \quad \therefore \quad V_{DB} = \frac{16500/\sqrt{3}}{0,5} = 19.052,55 \, V$$

$$\frac{I_{QB}}{I_B} = K_Q = 1,82352 \quad \therefore \quad I_{QB} = 1,82352 \, x 10.497 = 19.141,5 \, A$$

$$\frac{V_B}{V_{QB}} = K_Q = 1,82352 \quad \therefore \quad V_{QB} = \frac{16500/\sqrt{3}}{1,82352} = 5.224,11 \, V$$

e) cálculo dos valores base das resistências e das indutâncias do eixo $D$

Já se têm calculados $V_{DB} = 19.052{,}55\ V$ e $I_{DB} = 5.248{,}5\ A$. Logo, tem-se, respectivamente para a resistência e a indutância base de eixo $D$, que:

$$R_{DB} = \frac{V_{DB}}{I_{DB}} = \frac{19.052{,}55}{5.248{,}5} = 3{,}63\ \Omega$$

e

$$L_{DB} = \frac{V_{DB}}{\omega_B I_{DB}} = \frac{19.052{,}55}{377\ x\, 5.248{,}5} = 0{,}009628\ H$$

f) cálculo dos valores base das resistências e das indutâncias do eixo $Q$

Já se têm calculados $V_{QB} = 5.224{,}11\ V$ e $I_{QB} = 19.141{,}5\ A$. Logo, tem-se, respectivamente para a resistência e a indutância base de eixo $Q$, que:

$$R_{QB} = \frac{V_{QB}}{I_{QB}} = \frac{5.224{,}11}{19.141{,}5} = 0{,}273\ \Omega$$

e

$$L_{QB} = \frac{V_{QB}}{\omega_B I_{QB}} = \frac{5.224{,}11}{377\ x\, 19.141{,}5} = 0{,}000724\ H$$

g) cálculo dos valores base das resistências e das indutâncias do enrolamento de campo

Já se têm calculados $V_{FB} = 326.242{,}44\ V$ e $I_{FB} = 306{,}51\ A$. Logo, tem-se, respectivamente para a resistência e a indutância base do enrolamento de campo, que:

$$R_{FB} = \frac{V_{FB}}{I_{FB}} = \frac{326.242{,}44}{306{,}51} = 1.064{,}37\ \Omega$$

e

$$L_{FB} = \frac{V_{FB}}{\omega_B I_{FB}} = \frac{326.242{,}44}{377\ x\, 306{,}51} = 2{,}823\ H$$

h) cálculo dos valores base das resistências e das indutâncias gerais da máquina síncrona em pu na base que ficou estabelecida

$$L_{du} = \frac{L_d}{L_B} = \frac{0,003}{0,0024} = 1,25 \ pu$$

$$L_{qu} = \frac{L_q}{L_B} = \frac{0,0021}{0,0024} = 0,875 \ pu$$

$$r_u = \frac{r}{R_B} = \frac{0,0044}{0,9075} = 0,00485 \ pu$$

$$L_{Fu} = \frac{L_F}{L_{FB}} = \frac{2}{2,823} = 0,708 \ pu$$

$$r_{Fu} = \frac{r_F}{R_{FB}} = \frac{0,486}{1.064,37} = 0,00046 \ pu$$

$$L_{Du} = \frac{L_D}{L_{DB}} = \frac{0,006}{0,009628} = 0,623 \ pu$$

$$r_{Du} = \frac{r_D}{R_{DB}} = \frac{0,050}{3,63} = 0,0137 \ pu$$

$$L_{Qu} = \frac{L_Q}{L_{QB}} = \frac{0,0015}{0,000724} = 2,0718 \ pu$$

$$r_{Qu} = \frac{r_Q}{R_{QB}} = \frac{0,050}{0,273} = 0,183 \ pu$$

---

## 4.6. Constantes de Tempo dos Circuitos da Máquina Síncrona

Esse tópico versará sobre a obtenção das expressões matemáticas que representam as constantes de tempo de resposta que se encontram envolvidas com o estudo e a análise comportamental da máquina síncrona.

Haverá duas importantes situações a se considerar, uma, em que o estudo focará as constantes de tempo associadas à condição em que os enrolamentos do estator serão mantidos abertos, e outra, em que os enrolamentos do estator serão mantidos curto-circuitados em seus terminais de saída. Também será levada em conta, durante cada uma das condições a serem verificadas, a questão de se manter o circuito de campo ora aberto ora curto-circuitado.
Deve-se saber que uma máquina elétrica sempre apresentará um circuito, quer seja do rotor quer seja do estator, sempre se movendo um em relação ao outro, independente de qual possa estar parado e qual possa estar em rotação.
Considerando-se agora uma máquina síncrona tal como um gerador de uma UHE, a rotação de um circuito em relação ao outro, no entanto, permite que se tire a seguinte conclusão: que uma grandeza em corrente contínua no enrolamento de campo está associada a uma grandeza de mesma natureza em corrente alternada presente nos enrolamentos da armadura enquanto que uma grandeza em corrente contínua na armadura está associada à presença de uma grandeza de mesma natureza em corrente alternada no campo.
Analisando-se a questão das correntes em uma máquina síncrona, por exemplo, cada conjunto de correntes tem uma constante de tempo diferente.
O que rege a taxa de mudança da corrente contínua no campo e da amplitude da corrente alternada na armadura é a constante de tempo envolvida nesse processo, isto é, a chamada constante de tempo transitória de eixo direto enquanto o que rege a corrente contínua na armadura e a amplitude da corrente alternada no campo é a constante de tempo da armadura. Esses são exemplos que mostram como o processo eletromagnético se dá na sua forma mais simples.
Como se sabe, num circuito do tipo LR, ou seja, um circuito simples em que se encontram ligados em série uma fonte de tensão, representando o agente ativo do circuito, e uma carga, formada por uma resistência e uma indutância, representando o agente passivo, a constante de tempo associada será a relação entre a indutância e a resistência desse sistema. Do mesmo modo ocorre com os circuitos eletromagnéticos de rotor e de estator da máquina síncrona, isto é, circuitos de campo e de armadura, respectivamente, apenas que a relação que define a constante de tempo envolvida tem a ver com os valores equivalentes de indutância e de resistência vistos a partir desse sistema.
A constante de tempo de campo a circuito aberto trata-se de um valor particular da constante de tempo de campo que está associada a uma condição onde a armadura apresenta os seus enrolamentos de fase abertos.
Por outro lado, tem-se também a constante de tempo de campo a circuito fechado ou em curto-circuito que é aplicada quando a armadura apresenta os seus enrolamentos de fase curto-circuitados.
Na máquina elétrica rotativa, onde um dos enrolamentos carrega corrente contínua e o outro carrega corrente alternada, a resistência do enrolamento em corrente contínua é muito mais eficaz do que a do enrolamento em corrente alternada. Na verdade, quando o enrolamento em corrente alternada é curto-circuito, sua resistência pouco efeito tem, mas para o enrolamento em corrente alternada, as reatâncias próprias e mútuas são muito mais significantes em comparação com as resistências afetando diretamente os valores das constantes de tempo envolvidas nesse caso.

Deste modo, pode dizer que, no enrolamento em corrente contínua a corrente muda muito mais lentamente do que no enrolamento em corrente alternada, com o resultado de que a queda indutiva seja comparável com a queda resistiva. Devido à razão da indutância de curto-circuito do enrolamento de campo para a sua indutância de circuito aberto ser $x'd/xd$, enquanto a sua resistência é inalterada, a relação entre a constante de tempo de curto-circuito e a constante de tempo de circuito aberto é Igual à proporção das indutâncias correspondentes.
Quanto mais longa é a constante de tempo transitória, mais curta é a constante de tempo subtransitória. Ambas as constantes de tempo são afetadas pela impedância do circuito de armadura.

### 4.6.1. Constantes de Tempo a Circuito Aberto de Eixo Direto

Considerando uma máquina síncrona operando com os circuitos do estator abertos e aplicando um sinal de tensão na forma de um degrau $v_F(t)$ no circuito de campo o que se obtém é o seguinte:

$$v_F(t) = V u_{-1}(t) \quad \text{e} \quad i_d(t) = 0$$

onde *V* é a amplitude do degrau de tensão aplicado

As equações diferenciais básicas, em por unidade, para os circuitos dos enrolamentos de campo e amortecedor de eixo direto, considerando-se uma base de valores escolhida previamente, serão as seguintes, respectivamente:

$$r_{Fu} i_{Fu} + \frac{\dot{\lambda}_{Fu}}{\omega_B} = V u_{-1}(t) \qquad (4.283)$$

e também

$$r_{Du} i_{Du} + \frac{\dot{\lambda}_{Du}}{\omega_B} = 0 \qquad (4.284)$$

Mas, das equações 4.40, relativas às expressões dos fluxos enlaçados nos diferentes circuitos da máquina síncrona, considerando que os circuitos do estator estejam abertos, pode-se escrever em pu que:

$$\lambda_{Du} = L_{Du} i_{Du} + M_{Ru} i_{Fu} \qquad (4.285)$$

$$\lambda_{Fu} = L_{Fu} i_{Fu} + M_{Ru} i_{Du} \qquad (4.286)$$

Derivando-se ambas as equações anteriores vem que:

$$\dot{\lambda}_{Du} = L_{Du}\,\dot{i}_{Du} + M_{Ru}\,\dot{i}_{Fu} \quad (4.287)$$

e

$$\dot{\lambda}_{Fu} = L_{Fu}\,\dot{i}_{Fu} + M_{Ru}\,\dot{i}_{Du} \quad (4.288)$$

Substituindo-se o valor de $\dot{\lambda}_{Fu}$, da equação 4.288, na equação 4.283 vem:

$$r_{Fu}\,i_{Fu} + L_{Fu}\frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + M_{Ru}\frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} = Vu_{-1}(t) \quad (4.289)$$

Fazendo-se o mesmo para o valor $\dot{\lambda}_{Du}$, de equação 4.287, na equação 4.284, vem:

$$r_{Du}\,i_{Du} + L_{Du}\frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} + M_{Ru}\frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} = 0 \quad (4.290)$$

As equações 4.289 e 4.290 formam um sistema de equações nas variáveis $i_{Du}$ e $i_{Fu}$.

A relação direta entre $i_{Fu}$ e $i_{Du}$ deve ser obtida a partir das condições de contorno do problema, considerando-se que o fluxo $\lambda_{Du}$ é nulo em regime permanente, ou seja, $\lambda_{Du} = 0$.

Logo, a partir da equação 4.285, tem-se que:

$$i_{Fu} = -\frac{L_{Du}}{M_{Ru}}\,i_{Du} \quad (4.291)$$

Da equação 4.290 tem-se que:

$$\frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} = -\frac{r_{Du}}{M_{Ru}}\,i_{Du} - \frac{L_{Du}}{M_{Ru}}\frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} \quad (4.292)$$

Substituindo-se na equação 4.289 os valores de $i_{Fu}$ e $\dot{i}_{Fu}$, das equações 4.291 e 4.292, vem que:

$$Vu_{-1}(t) = -r_{Fu}\frac{L_{Du}}{M_{Ru}}\,i_{Du} - L_{Fu}\frac{r_{Du}}{M_{Ru}}\,i_{Du} + (M_{Ru} - \frac{L_{Fu}L_{Du}}{M_{Ru}})\frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B}$$

Rearranjando-se a equação anterior, a seguinte expressão é obtida:

$$\frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} + \frac{L_{Du} r_{Fu} + L_{Fu} r_{Du}}{L_{Du} L_{Fu} - M_{Ru}^2} i_{Du} = -V \frac{M_{Ru}}{L_{Du} L_{Fu} - M_{Ru}^2}$$

Assim, a constante de tempo subtransitória de eixo direto a circuito aberto, em segundos, será dada por:

$$T''_{do} = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Du} L_{Fu} - M_{Ru}^2}{L_{Du} r_{Fu} + L_{Fu} r_{Du}} = \frac{L_{Du} - \dfrac{M_{Ru}^2}{L_{Fu}}}{r_{Du} + \dfrac{L_{Du} r_{Fu}}{L_{Fu}}} \quad \text{em s} \qquad (4.293)$$

**Nota a respeito da questão do tempo normalizado:**

Observa-se, na equação 4.293, referente à constante de tempo $T''_{do}$, que há uma multiplicação do valor normalmente conhecido como um valor atual pela parcela $1/\omega_B$. A explicação é a seguinte. Por ação das derivadas que aparecem nas diversas equações da dinâmica da máquina síncrona, o tempo a ser empregado agora deverá estar na mesma base de valores das demais variáveis que compõem a equação. A normalização do tempo envolvido se dá através da utilização do parâmetro $t_B = 1/\omega_B$ com $\omega_B = 2\pi f$, onde $f$ é a freqüência elétrica.

Deste modo, ao se equacionar uma derivada qualquer, como a que se segue, tem-se, por exemplo, que:

$$\frac{1}{\omega_B}\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \quad \therefore \quad \frac{d}{d\,t/t_B} = \frac{d}{dt_u}$$

Nota-se, nas equações anteriores, que a variável tempo $t$ encontra-se em seu valor atual em segundos e que, após normalização, a partir do tempo base $t_B = 1/\omega_B$, ela se tornou o tempo normalizado $t_u$ em pu.

Portanto, para que se possa trabalhar com os parâmetros referentes a constantes de tempo, em segundos, dentro de equações diferenciais normalizadas ou em por unidade, o que faz é multiplicar tais parâmetros pelo valor base de tempo ou pelo tempo padrão na base de valores adotada.

Na prática $L_F >> L_D$ o que permite fazer a seguinte opção:

$$\lim_{L_F \to \infty} \left( \frac{L_{Du}}{L_{Fu}} r_{Fu} + r_{Du} \right) = r_{Du}$$

Resumindo, obtém-se então para a constante de tempo subtransitória de eixo direto a circuito aberto a seguinte expressão:

$$T''_{do} = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Du} - \frac{M_{Ru}^2}{L_{Fu}}}{r_{Du}} \quad \text{em s} \qquad (4.294)$$

Caso não haja enrolamentos amortecedores envolvidos no processo, a equação 4.294 torna-se, resumidamente, uma relação simples que é descrita pela equação 4.295 e que será definida como sendo a constante de tempo transitória de eixo direto a circuito aberto.

$$T'_{do} = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Fu}}{r_{Fu}} \quad \text{em s} \qquad (4.295)$$

**Nota:** observa-se que as equações 4.293 e 4.294, além de relacionarem com aspectos físicos da máquina síncrona em si, também resumem os estágios operativos em relação às condições subtransitória e transitória das possíveis respostas no domínio do tempo às quais o processo todo fica sujeito. Fica claramente justificada a associação entre o regime subtransitório com a presença dos enrolamentos amortecedores, e entre o regime transitório com a presença do enrolamento de campo.

## 4.6.2. Constantes de Tempo a Circuito Fechado de Eixo Direto

Considerando uma máquina síncrona operando com os circuitos do estator curto-circuitados e aplicando um sinal de tensão na forma de um degrau $v_F(t)$ no circuito de campo o que se obtém é o seguinte:

$$v_F(t) = V\, u_{-1}(t)$$

onde $V$ é a amplitude do degrau de tensão aplicado

As equações diferenciais básicas, em por unidade, para os circuitos dos enrolamentos de campo e estator de eixo direto, considerando-se uma base de valores escolhida previamente, desconsiderando-se por enquanto o efeito do enrolamento amortecedor, serão as seguintes, respectivamente:

$$v_{Fu} = V\, u(t) = r_{Fu}\, i_{Fu} + \frac{\dot{\lambda}_{Fu}}{\omega_B} \qquad (4.296)$$

e

$$v_{du} = 0 = r_u\, i_{du} + \frac{\dot{\lambda}_{du}}{\omega_B} \qquad (4.297)$$

Mas, da equação matricial 4.88, obtêm-se que:

$$\lambda_{du} = L_{du}\, i_{du} + KM_{Fu}\, i_{Fu} \tag{4.298}$$

$$\lambda_{Fu} = L_{Fu}\, i_{Fu} + KM_{Fu}\, i_{du} \tag{4.299}$$

Derivando-se as equações precedentes vem que:

$$\dot{\lambda}_{du} = L_{du}\, \dot{i}_{du} + KM_{Fu}\, \dot{i}_{Fu} \tag{4.300}$$

e também

$$\dot{\lambda}_{Fu} = L_{Fu}\, \dot{i}_{Fu} + KM_{F}\, \dot{i}_{du} \tag{4.301}$$

Substituindo-se a expressão de $\dot{\lambda}_{Fu}$, da equação 4.301, na equação 4.296 vem:

$$r_{Fu}\, i_{Fu} + L_{Fu} \frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + KM_{Fu} \frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} = V u_{-1}(t) \tag{4.302}$$

Repetindo-se o mesmo procedimento anterior para a expressão de $\dot{\lambda}_{du}$, da equação 4.300, na equação 4.297, vem que:

$$r\, i_d + \frac{L_d\, \dot{i}_d}{\omega_B} + KM_F \frac{\dot{i}_F}{\omega_B} = 0 \tag{4.303}$$

A relação direta entre $i_{du}$ e $i_{Fu}$ deve ser obtida a partir das condições de contorno do problema, considerando-se que o fluxo $\lambda_{du}$ em regime permanente é nulo, ou seja, $\lambda_{du} = 0$.

Logo, a partir da equação 4.298, tem-se que:

$$i_{Fu} = -\frac{L_{du}}{KM_{Fu}} i_{du} \tag{4.304}$$

Da equação 4.303 tem-se:

$$\frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} = \frac{-r_u}{KM_{Fu}} i_{du} - \frac{L_{du}}{KM_{Fu}} \frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} \qquad (4.305)$$

Substituindo-se na equação 4.302 os valores de $i_{Fu}$ e $\dot{i}_{Fu}$, das equações 4.304 e 4.305, vem que:

$$\frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} + \frac{L_{du} r_{Fu} + L_{Fu} r_u}{L_{du} L_{Fu} - K^2 M^2{}_{Fu}} i_d = -V \frac{KM_F}{L_d L_F - K^2 M^2{}_{Fu}} \qquad (4.306)$$

Desprezando-se, na equação anterior, a parcela $L_{Fu} r_u$ em relação à parcela $L_{du} r_{Fu}$, já que na prática esta parcela apresenta um valor insignificante em relação a outra, vem que:

$$T'_d = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{du} L_{Fu} - (KM_{Fu})^2}{L_{du} r_{Fu}} \quad \text{em s} \qquad (4.307)$$

Da equação 4.238, onde é apresentada a expressão da indutância transitória de uma máquina síncrona, pode-se obter que:

$$L'_{du} = L_{du} - \frac{K^2 M_{Fu}{}^2}{L_{Fu}} \quad \therefore \quad L_{Fu} L'_{du} = L_{Fu} L_{du} - K^2 M^2{}_{Fu} \qquad (4.308)$$

Levando a expressão do segundo membro da equação 3.212 na equação 4.307 obtém-se que:

$$T'_d = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Fu} L'_{du}}{L_{du} r_{Fu}} \quad \text{em s} \qquad (4.309)$$

A constante de tempo $T'_d$ é chamada de constante de tempo transitória de eixo direto a circuito fechado.
Ela pode ser relacionada com a constante de tempo transitória de eixo direto a circuito aberto, da seguinte forma, numa condição em que o enrolamento amortecedor seja desconsiderado.

Deste modo, considerando a expressão para a constante de tempo $T'_{do}$, da equação 4.295, obtém-se que:

$$T'_d = \frac{L'_{du}}{L_{du}} T'_{do} \quad \text{em s} \tag{4.310}$$

E se for considerado em termos de reatância, para uma rotação nominal de $\omega_B$, vem que:

$$\frac{T'_d}{T'_{do}} = \frac{x'_{du}}{x_{du}} \tag{4.311}$$

Tendo em vista agora a condição transitória, levando-se em conta a equação 4.283 anteriormente apresentada, com a aplicação do mesmo sinal de tensão na forma de um degrau $v_F(t)$, vem que:

$$v_F(t) = V\,u_{-1}(t)$$

onde *V* é a amplitude do degrau de tensão aplicado

As equações diferenciais básicas, em por unidade, para os circuitos dos enrolamentos de campo, de estator de eixo direto e amortecedor de eixo direto, considerando-se uma base de valores escolhida previamente, serão as seguintes, respectivamente:

$$V_{Fu} = V\,u(t) = r_{Fu}\,i_{Fu} + \frac{\dot{\lambda}_{Fu}}{\omega_B} \tag{4.312}$$

$$V_d = 0 = r_u\,i_{du} + \frac{\dot{\lambda}_{du}}{\omega_B} \tag{4.313}$$

$$V_{Du} = 0 = r_{Du}\,i_{Du} + \frac{\dot{\lambda}_{Du}}{\omega_B} \tag{4.314}$$

Mas, a partir da equação matricial 4.88, são válidas as seguintes relações:

$$\lambda_{du} = L_{du}\,i_{du} + KM_{Fu}\,i_{Fu} + KM_{Du}\,i_{Du} \tag{4.315}$$

$$\lambda_{Fu} = KM_{Fu}\,i_{du} + L_{Fu}\,i_{Fu} + M_{Ru}\,i_{Du} \tag{4.316}$$

$$\lambda_{Du} = KM_{Du}\,i_{du} + M_{Ru}\,i_{Fu} + L_{Du}\,i_{Du} \tag{4.317}$$

Derivando-se as equações 4.315, 4.316 e 4.317, vem que:

$$\dot{\lambda}_{du} = L_{du}\,\dot{i}_{du} + KM_{Fu}\,\dot{i}_{F} + KM_{Du}\,\dot{i}_{Du} \quad (4.318)$$

$$\dot{\lambda}_{Fu} = KM_{Fu}\,\dot{i}_{du} + L_{Fu}\,\dot{i}_{Fu} + M_{Ru}\,\dot{i}_{Du} \quad (4.319)$$

$$\dot{\lambda}_{Du} = KM_{Du}\,\dot{i}_{du} + M_{Ru}\,\dot{i}_{Fu} + L_{Du}\,\dot{i}_{Du} \quad (4.320)$$

Levando-se a expressão de $\dot{\lambda}_{Fu}$, da equação 4.319, na equação 4.312 vem que:

$$Vu(t) = r_{Fu}i_{Fu} + L_{Fu}\frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + M_{Ru}\frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} + KM_{Fu}\frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} \quad (4.321)$$

Pelas mesmas razões já expostas anteriormente, tem-se, para os fluxos enlaçados de eixo $d$ e $D$, que:

$$\lambda_{du} = \lambda_{Du} = 0$$

Deste modo, as equações 4.315 e 4.317 fornecem as seguintes expressões, sempre a partir das relações dos fluxos enlaçados:

$$\lambda_{du} = 0 = L_{du}\,i_{du} + KM_{Fu}\,i_{Fu} + KM_{Du}\,i_{Du} \quad (4.322)$$

$$\lambda_{Du} = 0 = KM_{Du}\,i_{du} + M_{Ru}\,i_{Fu} + L_{Du}\,i_{Du} \quad (4.323)$$

As equações anteriores podem ser colocadas, de forma adequada, em função de $i_{Du}$ da seguinte forma:

$$KM_{Fu}\,i_{Fu} + L_{du}\,i_{du} = -KM_{Du}\,i_{Du} \quad (4.324)$$

$$M_{Ru}\,i_{Fu} + KM_{Du}\,i_{du} = -L_{Du}\,i_{Du} \quad (4.325)$$

A solução do sistema de equações formado pelas equações 4.324 e 4.325 fornece o seguinte resultado:

$$i_{Fu} = \frac{K^2M^2{}_{Du} - L_{du}L_{Du}}{M_{Ru}L_{du} - KM_{Du}KM_{Fu}}\,i_{Du} \quad (4.326)$$

Levando na equação 4.313 a expressão se $\dot{\lambda}_{du}$, da equação 4.318, e desprezando-se a parcela $r_u \, i_{du}$, em relação às demais, vem que:

$$0 = L_{du} \frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} + KM_{Fu} \frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + KM_{Du} \frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} \tag{4.327}$$

Direcionando o mesmo raciocínio anterior, agora aplicado à equação 4.314, em relação a $\dot{\lambda}_{Du}$, da equação 4.320, tem-se que:

$$0 = r_{Du} \, i_{Du} + L_{Du} \frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} + M_{Ru} \frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + KM_{Du} \frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} \tag{4.328}$$

Colocando-se as equações 4.327 e 4.328 em função de $i_{Du}$ e $\dot{i}_{Du}$, vem que:

$$KM_{Fu} \frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + L_{du} \frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} = -KM_{Du} \frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} \tag{4.329}$$

$$M_{Ru} \frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} + KM_{Du} \frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} = -L_{Du} \frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} - r_{Du} \, i_{Du} \tag{4.330}$$

A solução do sistema de equações formado pelas equações 4.329 e 4.330 fornece o seguinte resultado:

$$\frac{\dot{i}_{Fu}}{\omega_B} = \frac{(L_{du} L_{Du} - K^2 M^2{}_{Du}) \, \dot{i}_{Du} + L_{du} r_{Du} \, i_{Du}}{KM_{Fu} \, KM_{Du} - L_{du} \, M_{Ru}} \tag{4.331}$$

$$\frac{\dot{i}_{du}}{\omega_B} = \frac{(KM_{Du} M_{Ru} - L_{Du} KM_{Fu}) \, \dot{i}_{Du} - KM_{Fu} \, r_{Du} i_{Du}}{KM_{Fu} KM_{Du} - L_{du} M_{Ru}} \tag{4.332}$$

Levando os valores de $i_{Fu}$, $\dot{i}_{Fu}$ e $\dot{i}_{Du}$, das equações 4.326, 4.331 4.332, na equação 4.321, e agrupando-os segundo $\dot{i}_{Du}$ e $i_{Du}$, obtém-se que:

$$V u(t) = \frac{L_{Fu}(L_{du}L_{Du} - K^2M^2{}_{Du}) + M_{Ru}(KM_{Fu}KM_{Du} - L_{du}M_{Ru}) + KM_{Fu}(KM_{Du}M_{Ru} - L_{Du}KM_{Fu})}{KM_F KM_D - L_d M_R} \frac{\dot{i}_{Du}}{\omega_B} +$$

$$+ \frac{(L_{du}L_{Du} - K^2M^2{}_{Du})\, r_{Fu} - r_{Du}K^2M^2{}_{Fu} + r_{Du}L_{Fu}L_{Du}}{KM_{Fu}KM_{Du} - L_{du}M_{Ru}} i_{Du}$$

A constante de tempo procurada será a seguinte:

$$T''_d = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Fu}(L_{du}L_{Du} - K^2M^2{}_{Du}) + M_{Ru}(KM_{Fu}KM_{Du} - L_{du}M_{Ru}) + KM_{Fu}(KM_{Du}M_{Ru} - L_{Du}KM_{Fu})}{(L_{du}L_{Du} - K^2M^2{}_{Du})\, r_{Fu} - r_{Du}K^2M^2{}_{Fu} + r_{Du}L_{Fu}L_{Du}}$$

(4.333)

Na equação anterior, da prática, sabe-se que a parcela $(L_{du}L_{Du} - K^2M^2{}_{Du})r_{Fu}$ é da ordem de $10\%$ do valor da menor das parcelas do denominador o que permite desprezá-la em relação a estas parcelas. Assim, tem-se então que:

$$T''_d = \frac{1}{\omega_B} \frac{(L_{Fu}L_{Du} - M_{Ru}{}^2)\, L_{du} - K^2M^2{}_{Du}\, L_{Fu} - L_{Du}\, K^2\, M^2{}_{Fu} + 2KM_{Fu}\, KM_{Du}\, M_{Ru}}{r_{Du}L_{Fu}(L_{du} - \frac{K^2M^2{}_{Fu}}{L_{Fu}})}$$

Por intermédio de uma manipulação algébrica chega-se a seguinte expressão:

$$T''_d = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{du} - \frac{L_{Fu}(KM_{Du})^2 + L_{Du}(KM_{Fu})^2 - 2KM_{Fu}KM_{Du}M_{Ru}}{L_{Fu}L_{Du} - M^2{}_{Ru}}}{L_{du} - \frac{(KM_{Fu})^2}{L_{Fu}}} \frac{(L_{Fu}L_{Du} - M^2{}_{Ru})}{L_{Fu}r_{Du}}$$

em s (4.334)

Comparando as parcelas da equação 4.334 com as das equações 4.238, 4.245 e 4.294 obtém-se a constante de tempo subtransitória em circuito fechado de eixo direto em função dos parâmetros $L''_d$, $L'_d$ e $T''_{do}$.

Assim, tem-se que:

$$T''_d = \frac{L''_{du}}{L'_{du}} T''_{do} \qquad (4.335)$$

Caso a questão fosse resolvida considerando o circuito de $i_d$, por exemplo, ou mesmo dentro do circuito de $i_F$, o resultado apresentaria uma equação diferencial com a mesma constante de tempo.

### 4.6.3. Constante de Tempo a Circuito Aberto de Eixo em Quadratura

Considerando uma máquina síncrona operando com os circuitos do estator abertos e aplicando um sinal de tensão na forma de um degrau $v_Q(t)$ no circuito amortecedor de eixo $Q$ o que se obtém é o seguinte:

$$V_{Qu} = V u_{-1}(t)$$

onde $V$ é a amplitude do degrau de tensão aplicado

Como nos circuitos de eixo em quadratura das máquinas síncronas de pólos salientes, aqui consideradas por questões didáticas, não existe a condição transitória, pois não há enrolamento de campo nesse eixo, as constantes de tempo se referenciarão ao regime subtransitório.

A equação diferencial básica, em por unidade, para o circuito do enrolamento amortecedor de eixo em quadratura, considerando-se uma base de valores escolhida previamente, será a seguinte:

$$V_{Qu} = V u_{-1}(t) = r_{Qu}\, i_{Qu} + \frac{\dot{\lambda}_{Qu}}{\omega_B} \qquad (4.336)$$

Mas, das equações 4.40, relativas às expressões dos fluxos enlaçados nos diferentes circuitos da máquina síncrona, considerando que os circuitos do estator estejam abertos, pode-se escrever em pu que:

$$\lambda_{Qu} = L_{Qu}\, i_{Qu} \quad \therefore \quad \dot{\lambda}_{Qu} = L_{Qu}\, \dot{i}_{Qu} \qquad (4.337)$$

Levando-se o valor $\dot{\lambda}_{Qu}$, da equação 4.337, na equação 4.336, vem que:

$$V u(t) = r_{Qu} i_{Qu} + L_{Qu} \frac{\dot{i}_{Qu}}{\omega_B} \qquad (4.338)$$

Assim, a constante de tempo subtransitória em circuito aberto de eixo em quadratura será dada por:

$$T''_{qo} = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Qu}}{r_{Qu}} \quad \text{em s} \qquad (4.339)$$

## 4.6.4. Constante de Tempo a Circuito Fechado de Eixo em Quadratura

Considerando uma máquina síncrona operando com os enrolamentos do estator curto-circuitados e aplicando um sinal de tensão na forma de um degrau $v_Q(t)$ no circuito amortecedor de eixo $Q$ o que se obtém é o seguinte:

$$V_{Qu} = V u_{-1}(t)$$

onde $V$ é a amplitude do degrau de tensão aplicado

Nessa circunstância, a condição subtransitória é a que ainda vigora, uma vez que o circuito do eixo em quadratura, por se apresentar fechado, passa a ter influência.

Deste modo, repetindo aqui a equação anterior 4.338, tem-se que:

$$V_{Qu} = V u(t) = r_{Qu} i_{Qu} + \frac{\dot{\lambda}_{Qu}}{\omega_B}$$

Mas, semelhantemente aos casos anteriores, a partir das equações 4.40, relativas às expressões dos fluxos enlaçados nos diferentes circuitos da máquina síncrona, considerando que os circuitos de fase do estator estejam curto-circuitados, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$\lambda_{qu} = L_{qu} i_{qu} + KM_{Qu} i_{Qu} \tag{4.340}$$

$$\lambda_{Qu} = L_{Qu} i_{Qu} + KM_{Qu} i_q \tag{4.341}$$

Derivando-se as equações anteriores vem:

$$\dot{\lambda}_{qu} = L_{qu} \dot{i}_{qu} + KM_{Qu} \dot{i}_{Qu} \tag{4.342}$$

$$\dot{\lambda}_{Qu} = L_{Qu} \dot{i}_{Qu} + KM_{Qu} \dot{i}_{qu} \tag{4.343}$$

Levando-se a expressão de $\dot{\lambda}_Q$, da equação 4.343, na equação 4.338 tem-se que:

$$V u(t) = r_{Qu} i_{Qu} + L_{Qu} \frac{\dot{i}_{Qu}}{\omega_B} + KM_{Qu} \frac{\dot{i}_{qu}}{\omega_B} \tag{4.344}$$

Pelas mesmas observações apresentadas anteriormente, $\lambda_{qu} = 0$.

Assim, tem-se o seguinte, considerando a equação 4.340:

$$0 = L_{qu} i_{qu} + KM_{Qu} i_{Qu}$$

e também

$$0 = L_{qu} \dot{i}_{qu} + KM_{Qu} \dot{i}_{Qu} \quad \therefore \quad \dot{i}_{qu} = \frac{-KM_{Qu}}{L_{qu}} \dot{i}_{Qu} \qquad (4.345)$$

Levando-se o valor $\dot{i}_{qu}$, da equação 4.345, na equação 4.344, vem que:

$$Vu(t) = r_{Qu} i_{Qu} + L_{Qu} \frac{\dot{i}_{Qu}}{\omega_B} - \frac{K^2 M^2{}_{Qu}}{L_{qu}} \frac{\dot{i}_{Qu}}{\omega_B}$$

Manipulando, adequadamente, a equação diferencial anterior obtém-se:

$$Vu(t) = r_{Qu} i_{Qu} + \frac{L_{Qu} L_{qu} - K^2 M^2{}_{Qu}}{L_{qu}} \frac{\dot{i}_{Qu}}{\omega_B}$$

Assim, a constante de tempo subtransitória em circuito fechado de eixo em quadratura procurada será dada pela seguinte expressão:

$$T''_q = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Qu} L_{qu} - K^2 M^2{}_{Qu}}{r_{Qu} L_{qu}} = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{Qu}}{r_{Qu} L_{qu}} \frac{L_{Qu} L_{qu} - (KM_{Qu})^2}{L_{Qu}} \qquad (4.346)$$

Comparando os membros da equação anterior com os das equações 4.249 e 4.339, obtém-se a constante de tempo subtransitória em circuito fechado de eixo em quadratura em função dos parâmetros $L''_q$ e $T''_{qo}$.

Assim, tem-se que:

$$T''_q = \frac{L''_{qu}}{L_{qu}} T''_{qo} \qquad (4.347)$$

Caso a questão fosse resolvida considerando o circuito de $i_q$, por exemplo, o resultado apresentaria uma equação diferencial com a mesma constante de tempo.

## 4.6.5. Constante de Tempo do Estator

Já foi dito antes que uma grandeza em corrente contínua na armadura está associada à presença de uma grandeza de mesma natureza em corrente alternada no campo da máquina síncrona e este processo tem seu desenvolvimento regido por uma constante de tempo.
Esta constante de tempo encontra-se associada com as correntes de componente continua do estator quando, por exemplo, da ocorrência de distúrbios tais como uma falta trifásica nos terminais de máquina, ou de uma resposta específica a um determinado tipo de ensaio especial, etc.
Na realidade, num desequilíbrio do tipo apontado, a influência dos enrolamentos de campo e de amortecimento só aparece quando surgirem componentes de corrente alternada circulando por estes mesmos enrolamentos. Portanto, em termos físicos, o decréscimo das componentes de corrente continua, que possam existir no estator de uma máquina síncrona, por um motivo qualquer, se associa às componentes de freqüência dupla, razão da superposição da rotação nominal positiva com a rotação nominal negativa semelhante ao efeito verificado quando da dedução da expressão para a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona, sendo essa a única razão da associação entre a constante de tempo do estator e as componentes de seqüência negativa verificadas na máquina síncrona.

A equação diferencial básica, em por unidade, para o circuito do enrolamento de estator referente à fase *a* da máquina síncrona, considerando-se uma base de valores escolhida previamente, será a seguinte:

$$V_{au} = Vu_{-1}(t) = r_u i_{au} + \frac{\dot{\lambda}_{au}}{\omega_B} \qquad (4.348)$$

onde *V* é a amplitude do degrau de tensão aplicado

Associando-se à medição da constante de tempo do estator a aplicação de correntes de seqüência negativa sobre os enrolamentos do estator, conforme procedimento descrito do item 4.5.4, obtém-se a expressão do fluxo enlaçado pela fase *a* da máquina síncrona, neste particular, em função da corrente circulante.

A expressão é a mesma da equação 4,255 para a indutância de seqüência negativa da máquina síncrona, onde se considerou apenas a componente síncrona. Senão, veja-se:

$$\lambda_{au} = \frac{L''_{du} + L''_{qu}}{2} i_{au} \qquad (4.349)$$

Derivando-se a equação anterior, obtém-se a seguinte equação onde fica evidenciada a constante de tempo procurada.

Assim, tem-se que:

$$\frac{\dot{\lambda}_{au}}{\omega_B} = L_{2u} \dot{i}_{au} \qquad (4.350)$$

Deste modo, fica determinada a constante de tempo do estator com a substituição da equação 4.350 na equação 4.338.

Assim, a constante de tempo do estator será dada pela seguinte expressão:

$$T_a = \frac{1}{\omega_B} \frac{L_{2u}}{ru} \quad \text{em s} \qquad (3.241)$$

## 4.7. Exercícios Propostos

**1.** Explicar, sucintamente, a razão da utilização do sistema de transformação $d-q-0$, adotado no estudo teórico da máquina síncrona, cuja matriz de transformação é dada pela matriz seguinte:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

Considerar que a máquina síncrona, objeto de estudo, seja uma máquina trifásica.

**2.** Como foi visto no desenvolvimento da teoria, as constantes de tempo $T''_d$ e $T''_q$, da máquina síncrona, foram obtidas a partir de um sistema de equações cuja solução culminou com a obtenção, para cada caso, de uma equação diferencial de primeira ordem na variável $i_D$ ou $i_{Du}$ de onde se pode extrair, diretamente, a expressão matemática para tais parâmetros. Pede-se, agora,

que sejam obtidas essas mesmas constantes de tempo, porém através de uma substituição tal que resulte num sistema de equações cuja solução esteja associada a uma equação diferencial de primeira ordem, porém, na variável $i_F$, ou $i_{Fu}$. Comparar e comentar os resultados com aqueles obtidos na dedução da teoria apresentada.

**3.** Fazer um estudo completo sobre as equações que representam as indutâncias próprias do estator da máquina síncrona a partir das equações seguintes:

- fase a: $L_{aa} = L_s + L_m \cos 2\theta$
- fase b: $L_{bb} = L_s + L_m \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3})$
- fase c: $L_{cc} = L_s + L_m \cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3})$

**4.** Considerando a teoria desenvolvida nos itens 4.4.9 e 4.4.14, a respeito do estudo do circuito equivalente da máquina síncrona dotada de enrolamentos amortecedores, em por unidade, comprovar a seguinte expressão:

$$\left(\frac{L_{idu}}{L_{Fu}}\right)^2 - L_{Du} = -\frac{(L'_{du} - L_{ddu})^2}{L'_{du} - L''_{du}}$$

**5.** Numa instalação elétrica, uma UHE, por exemplo, o operador observou que, em sua estação de trabalho, o sistema supervisório local indicava a presença de um alarme de subexcitação na máquina de número 3. Ao buscar a tela que mostra a carta de capacidade ou de capabilidade, da máquina em questão, ele percebeu que neste gráfico nada de anormal estava indicado, ou seja, que nenhum limite térmico ou de estabilidade havia sido violado.
Explicar o motivo desta ocorrência exemplificando, se for o caso, com argumentos técnicos plausíveis, considerando-se que o alarme sinalizado era verdadeiro.

**6.** Uma máquina síncrona, dotada de enrolamentos amortecedores, apresenta a seguinte equação para o valor instantâneo do fluxo subtransitório de eixo $d$:

$$\lambda''_{du} = \left[1 - \frac{L''_{du}}{L_{ddu}}\left(1 - \frac{L_{MD}}{L_{ddu}}\right)\right]\lambda_{du} + \frac{L_{MD}L''_{du}}{L_{ddu}L_{dFu}}\lambda_{Fu} + \frac{L_{MD}L''_{du}}{L_{ddu}L_{dDu}}\lambda_{Du}$$

O parâmetro $L_{MD}$ que aparece na expressão é dado pela seguinte relação em pu, numa base de valores previamente escolhida:

$$\frac{1}{L_{MD}} = \frac{1}{L_{idu}} + \frac{1}{L_{ddu}} + \frac{1}{L_{dFu}} + \frac{1}{L_{dDu}}$$

De posse dessas informações, encontrar uma relação para o fluxo enlaçado de regime permanente $\lambda_{du}$ nessa relação.

**7.** Levantar a carta de capacidade da máquina síncrona do exemplo 4.13, operando como gerador, levando-se em conta toda teoria apresentada no item 4.3.3.
Considerar que a geração máxima da turbina hidráulica seja de *0,95 pu* na base de valores nominais da própria máquina.

**8.** Para uma máquina síncrona, dotada de enrolamentos amortecedores, as expressões para os fluxos enlaçados da armadura de regime subtransitório $\lambda''_d$ e $\lambda''_q$ se relacionam, respetivamente, com os correspondentes fluxos de regime permanente ou síncrono $\lambda_d$ e $\lambda_q$. Como seria possível explicar essa relação considerando-se que, no regime subtransitório, as indutâncias relacionadas com aquelas em regime síncrono são diferentes, ou seja:

$$L''_d < L_d \quad \text{e} \quad L''_q < L_q$$

**9.** A equação matricial 4.109, desenvolvida a partir da teoria de máquina síncrona e repetida a seguir por comodidade, permitiu que fossem estabelecidas as relações entre as correntes que circulam pelos diversos circuitos da máquina elétrica. Deste modo, escreve-se que:

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \\ \hline -v_F \\ v_D = 0 \\ v_Q = 0 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_a + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r_c & -\omega M_F & -\omega KM_D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ \hline i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} +$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_o + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ \hline 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{i}_o \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \hline \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} = 0$$

Considerando-se a forma canônica de variáveis de estado, onde se tem $\dot{x} = Ax + Bu$, apresentada e estudada no capítulo 2, pode-se escrever a equação matricial anterior na seguinte forma matricial mais compactada. Assim, na equação obtida, cada variável representa uma determinada matriz tomando a forma geral seguinte:

$$V + (R + \omega M)i - L\dot{i} = 0$$

Sendo assim, e considerando-se os dados fornecidos no exemplo 4.13, calcular todas as matrizes da forma canônica de variáveis de estado determinando, posteriormente, os autovalores envolvidos na matriz principal da planta. Explicar os resultados obtidos.

# CAPÍTULO 5

# CONTROLE E REGULAÇÃO DE TENSÃO DA MÁQUINA SÍNCRONA

## 5.1. Geral

Um sistema de regulação de tensão para uma máquina síncrona tem como principal função manter a tensão alternada de entrada ou de saída da máquina elétrica num valor pré-determinado chamado valor nominal ou valor de referência.
O controle da tensão alternada de entrada ou de saída da máquina síncrona se dará pelo controle da corrente de excitação ou corrente de campo através da aplicação de uma tensão contínua diretamente ao campo da máquina.
A tensão alternada será denominada de tensão de entrada se a máquina estiver operando na condição de motor síncrono e será denominada de tensão de saída se a máquina estiver operando na condição de gerador síncrono. Essas duas condições são possíveis e são contempladas pelos projetos atuais de instalações de hidreletricidade.
Com esse método, consegue-se efetuar o devido controle a partir daquilo que se acostumou chamar de excitação da máquina síncrona. A idéia é promover o devido controle sobre o fluxo magnético de excitação da máquina elétrica. O controle se dá diretamente sobre a corrente de excitação que circula através do campo da máquina e, ao mesmo tempo, sobre a tensão de excitação de modo a se obter o controle não apenas da tensão alternada da máquina, mas também da potência reativa deliberada.
No SIN, dependendo das condições impostas pelo sistema, a máquina síncrona pode ser operada ora como motor síncrono ora como gerador síncrono. O que determinará tal escolha será o perfil de carga do SEP e a existência dessa opção operativa disponível na máquina.
Esse processo de regulação da tensão alternada e da potência reativa é análogo ao processo de regulação da velocidade e da potência ativa visto no capítulo 3.
Antigamente eram utilizados, como regulador de tensão, sistemas manuais do tipo reostático onde um operador fazia o controle da corrente de campo diretamente, ora pela inserção ora pela retirada de resistores que eram montados em série com o circuito de campo da máquina síncrona, num arranjo que permitia tal manobra.

Como se sabe, nesta época, as máquinas eram pequenas e praticamente não havia sistema de controle mais complexo e nem operação interligada.
Com o avanço tecnológico, o porte das máquinas foi aumentando em face à necessidade da demanda exigida pelo crescimento dos sistemas de potência, fato que culminou com a conseguinte evolução e melhoria do controle de tensão assim como veio a ocorrer com o controle de velocidade.
Com o desenvolvimento e o avanço da tecnologia dos semicondutores, puderam-se desenvolver dispositivos retificadores de alta potência do tipo SCR ou *silicon controlled rectifiers*. Esses dispositivos são capazes de deliberar correntes de excitação da ordem de até $2.000\,A$ ou mais.

O regulador de tensão é apenas um elemento de controle e faz parte de um sistema mais complexo que envolve com outras funções tais como o controle e regulação de potência reativa, como as operações de limitação de corrente de excitação ou de campo, de limitação de corrente de estator da máquina síncrona, de limitação da relação tensão por freqüência que também é conhecida no jargão técnico por limitação volts/hertz, de limitação da tensão alternada da máquina síncrona ou tensão terminal, do próprio sistema de comando do disjuntor de campo, além de dar canal para sinais estabilizantes como o conhecido estabilizador de potência ou PSS, de extrema importância nos processos de estabilização, além do controle efetivo do fluxo de potência reativa junto ao SEP.
Não seria, porém, impróprio se referir ao dispositivo como regulador de tensão, mas por questões técnicas, neste trabalho, a designação adotada foi a de sistema de excitação, deixando para se referir como regulador de tensão ao regulador PI que faz a comparação entre os sinais da tensão alternada de saída da máquina síncrona com aquele valor de referência.
Com relação à classificação, notadamente em relação à geração de equipamentos, pode-se denominar por regulador de tensão reostático àqueles reguladores mais antigos, muitos ainda de comando puramente manual, que foram utilizados em máquinas menores, da ordem de $1.000\,kVA$ para baixo. São máquinas cuja tensão de saída do gerador girava na casa dos $5\,kV$. Seguem-se depois os sistemas automatizados baseados em dispositivos eletro-mecânicos de regulação e até em amplificadores magnéticos caracterizados por apresentarem fortes traços de não linearidades. Nas máquinas mais recentes, o que se verificam são sistemas de excitação mais complexos, automatizados, passando por sistemas de tecnologia eletrônico-analógica chegando até os sistemas atuais com base na eletrônica digital.
Assim como já fora dito no capítulo 3 deste livro, tendo em vista as dificuldades que o tema detém, bem como as dificuldades envolvidas no trato de assuntos ligados a ensaios e ajustes de campo, esse capítulo terá como principal objetivo reunir os aspectos da regulação de tensão de máquinas síncronas numa abordagem teórica. A idéia é partir de demonstrações e deduções no nível teórico, assim como foi realizado no capítulo 3, focando a análise através da modelagem, tanto do plano temporal quanto no plano complexo, relativa às funções envolvidas no processo.
Ao mesmo tempo, exemplos práticos com modelagens validadas através de ensaios de campo farão parte do corpo de exercícios e problemas tanto resolvidos quanto a resolver.

## 5.2. Modelo Típico para Representação de uma Máquina Síncrona Acoplada a um Barramento Infinito

A partir daqui será apresentado o desenvolvimento teórico do modelo simplificado para representação da máquina síncrona, também conhecido por modelagem de máquina síncrona contra a barra infinita, uma forma específica de representação matemática largamente utilizada; ver referências 1 e 14, entre outras.
A argumentação em defesa desta forma de representação pôde ser testada e verificada em vários estudos, principalmente aqueles cujo foco era a análise de estabilidade do SEP sendo que, para tal finalidade, as respostas obtidas foram consideradas mais que satisfatórias.
Apesar do foi dito, deve-se lembrar de que cada caso é um caso e que, dependendo daquilo que se queira focalizar, determinado tipo de modelagem pode não ser suficiente em termos de representação.
Para o estudo que será aqui desenvolvido, o modelo máquina síncrona contra a barra infinita será suficiente, salvo quando o foco for outro e, nesses casos, haverá menção indicando a necessidade.

A modelagem matemática aqui adotada respeitará as seguintes características:

a) desconsideração dos efeitos transformadores, isto é, $\dot{\lambda}_d = 0$ e $\dot{\lambda}_q = 0$;

b) desconsideração dos enrolamentos amortecedores;

c) desconsideração da resistência do enrolamento do estator;

d) consideração da condição equilibrada na transformação $d - q - 0$;

e) consideração dos efeitos da saturação magnética;

f) consideração da impedância shunt na barra terminal de saída da máquina após o transformador.

A figura 5.1 representa o esquema simplificado de um gerador síncrono, acoplado a um barramento infinito, considerando-se a presença de uma impedância shunt que está ligada em paralelo com a barra de saída do transformador elevador da referida máquina elétrica.

**Nota:** na figura 5.1, a representação matemática de grandezas e parâmetros se dará ora na forma polar ora na forma retangular ou cartesiana de coordenadas conforme a necessidade o requerer.

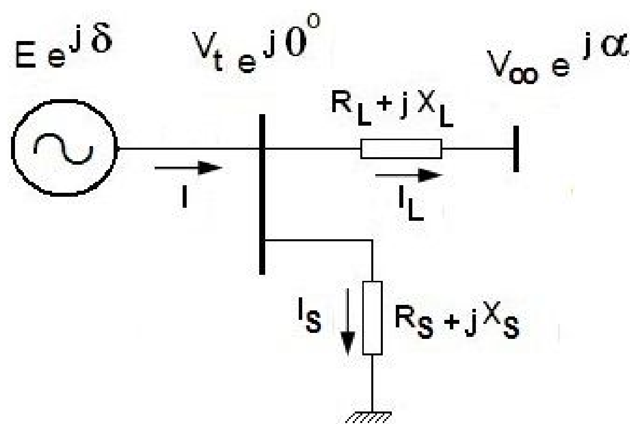



***Figura 5.1 – Máquina Síncrona Contra o Barramento Infinito***

Na figura 5.1 considerar a seguinte legenda:

$E$: valor eficaz do vetor fem da máquina síncrona

$V_t$ : valor eficaz do vetor tensão terminal da máquina

$V_\infty$: valor eficaz do vetor tensão na barra infinita

$I$: valor eficaz do vetor corrente total de saída do estator

$I_L$ : valor eficaz do vetor corrente na LT

$I_S$: valor eficaz do vetor corrente na impedância shunt

$R_L$: resistência equivalente do sistema de transmissão

$X_L$ : reatância equivalente do sistema de transmissão

$R_S$: resistência equivalente shunt

$X_S$: reatância equivalente shunt

$\delta$: ângulo elétrico entre os vetores $\vec{E}$ e $\vec{V_t}$ nesse sentido

$\alpha$: ângulo elétrico entre os vetores $\vec{V_t}$ e $\vec{V_{inf}}$ no sentido inverso

$j$ : operador complexo ( $j = \sqrt{-1}$ )

**Nota:** o vetor $\vec{V_t}$ , por ter sido tomado como referência, apresenta o ângulo elétrico de zero graus ou zero radianos, dependendo da unidade adotada.

Geralmente, o que estas impedâncias equivalentes representam são as associações de impedâncias específicas vistas do terminal de saída do estator da máquina síncrona em questão.

Em termos práticos, algumas vezes, pode-se simplificar o modelo matemático com a consideração apenas das reatâncias uma vez que os valores ôhmicos

das resistências envolvidas no processo se apresentam desprezíveis em face destas.

Assim, em termos gerais, um sistema do tipo uma máquina contra o barramento infinito poderá ser representado do seguinte modo:

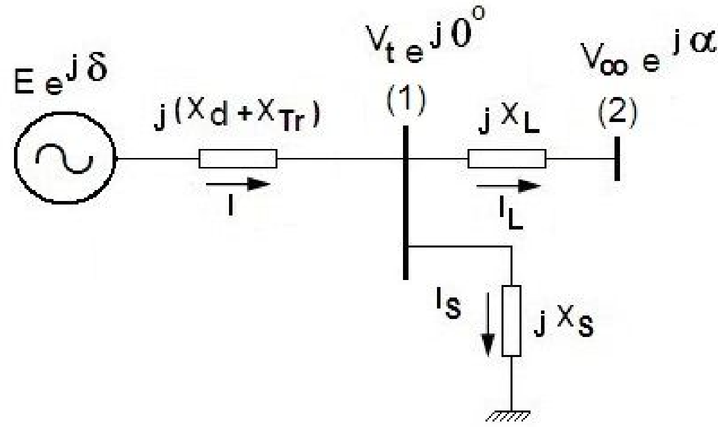



***Figura 5.2 – Máquina Síncrona Contra o Barramento Infinito em pu***

Na figura 5.2, considerar a mesma legenda da figura anterior, apenas sabendo que:

$x_{Tr}$ : resistênci a do transforma dor eleva dor

Considerando-se o sistema mostrado na figura 5.2, a computação da equação básica das tensões instantâneas do sistema de transmissão, vistas a partir da tensão de saída $v_t$ , pela aplicação da equação matricial 4.89, será a seguinte:

$$V_{(a,b,c)} - V_{\infty(a,b,c)} = R_L\, i_{L(a,b,c)} + \dot{\lambda}_{L\,(a,b,c)} \tag{5.1}$$

Aplicando a transformação $d - q - 0$ à equação 5.1 vem que:

$$PV_{(a,b,c)} - PV_{\infty(a,b,c)} = R_L\, P\, i_{L(a,b,c)} + P\ \dot{\lambda}_{L\,(a,b,c)}$$

O que resulta na seguinte equação matricial seguinte:

$$V_{(o,d,q)} - P\ V_{\infty(a,b,c)} = R_L\, i_{L(o,d,q)} + P L_L\ \dot{i}_{L\,(a,b,c)} \tag{5.2}$$

A matriz das tensões instantâneas na barra infinita, em função dos ângulos elétricos das tensões envolvidas no processo, trata-se das tensões trifásicas de seqüência positiva, de modo que se tem a seguinte matriz, para as fases $a,b,c$ :

$$V_{\infty(a,b,c)} = V_{\infty_{máx}} \begin{bmatrix} sin(\theta + \alpha - \delta) \\ sin[(\theta + \alpha - \delta) - \frac{2\pi}{3}] \\ sin[(\theta + \alpha - \delta) + \frac{2\pi}{3}] \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

onde

$V_{\infty_{máx}}$ : valor máximo de amplitude do vetor da tensão na barra infinita

$V_{\infty_{rms}}$ : valor rms ou eficaz de amplitude do vetor da tensão na barra infinita

$\omega$ : velocidade angular de rotação

$t$ : variável independente tempo

A equação matricial das tensões estampadas no rotor da máquina síncrona, no sistema de eixos $d-q-0$, pode ser obtida da seguinte forma, já considerando a matriz $P$ de transformação apresentada na equação 4.185:

$$V_{dqo} = P\, V_{abc}$$

Assim, realizando-se as devidas operações algébricas aplicadas à equação matricial anterior, vem que:

$$V_{a,b,c} \leftrightarrow V_{d,q,0} \therefore \sqrt{2}\, V_{rms} \begin{bmatrix} sin(\theta + \alpha - \delta) \\ sin[(\theta + \alpha - \delta) - \frac{2\pi}{3}] \\ sin[(\theta + \alpha - \delta) + \frac{2\pi}{3}] \end{bmatrix} = \sqrt{3}\, V_{rms} \begin{bmatrix} 0 \\ sin(\alpha - \delta) \\ cos(\alpha - \delta) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

onde $\theta = \omega t$

Logo, para as tensões da barra infinita, dadas na equação 5.4, vem que:

$$V_{\infty(a,b,c)} = \sqrt{3}\, V_{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ sin(\alpha - \delta) \\ cos(\alpha - \delta) \end{bmatrix} = \sqrt{3}\, V_{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ -sin(\delta - \alpha) \\ cos(\delta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

**Nota:** a questão de o ângulo de defasamento elétrico, para a tensão na barra infinita, ser $(\delta - \alpha)$ tem a ver com a questão da escolha da tensão terminal de estator ou armadura da máquina síncrona como a referência no diagrama vetorial das tensões do sistema que foi mostrado na figura 5.2. Logicamente, independente do sistema de coordenadas escolhido, seja no plano das fases

$a,b,c$, que por ora é dependente da rotação, ou no plano $d-q-0$, que por ora é independente da rotação, a referência continuará sendo definida nesse ponto de tensão.
Lembrar que esta escolha foi uma opção adotada neste desenvolvimento específico.

Para que se complete a transformação da equação 5.2, será necessário que se obtenha a expressão matemática para a parcela $P L_L \dot{i}_{L(a,b,c)}$.

Da equação anterior 4.97, tem-se que:

$$P \dot{\lambda}_{a,b,c} = \dot{\lambda}_{o,d,q} - \dot{P}P^{-1}P\lambda_{a,b,c} \quad \therefore \quad P \dot{\lambda}_{a,b,c} = \dot{\lambda}_{o,d,q} - [\dot{P}P^{-1}]\,\lambda_{o,d,q}$$

A partir das equações 4.28 e 4.33, obtém-se a expressão para o produto matricial $\dot{P}P^{-1}$.

Assim, tendo-se que $\dot{\lambda}_{o,d,q} = 0$, por consideração inicial, vem que:

$$\dot{P}P^{-1}\lambda_{o,d,q} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_o \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix}$$

Deste modo, tem-se que:

$$P \dot{\lambda}_{a,b,c} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\lambda_q \\ \omega\lambda_d \end{bmatrix} \lambda_{o,d,q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\lambda_q \\ -\omega\lambda_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega L_L \\ -\omega L_L \end{bmatrix} i_{o,d,q}$$

A parcela $P L_L \dot{i}_{L(a,b,c)}$ tomará então a seguinte forma, agora simplificada:

$$P L_L \dot{i}_{L(a,b,c)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega L_L \\ -\omega L_L \end{bmatrix} i_{o,d,q} \qquad (5.6)$$

Em termos da equação 5.2, considerando como referência a tensão terminal da máquina síncrona, as tensões, segundo a transformação $d-q-0$, para os

eixos $d$ e $q$, em seus valores eficazes e em por unidade, levando-se em conta uma base de valores previamente escolhida, serão:

$$V_{tdu} + V_{\infty u} sin\,(\delta - \alpha) = R_{Lu}\, I_{Ldu} + X_{Lu}\, I_{Lqu} \tag{5.7}$$

$$V_{tqu} - V_{\infty u}\, cos\,(\delta - \alpha) = R_{Lu}\, I_{Lqu} - X_{Lu}\, I_{Ldu} \tag{5.8}$$

Notar que para o sistema de transmissão $X_{Ld} = X_{Lq} = X_{L}$ uma vez que estes parâmetros independem da posição dos eixos na transformação $d-q-0$.

Ou melhor:

$$V_{tdu} = -V_{\infty u} sin\,(\delta - \alpha) + R_{Lu}\, I_{Ldu} + X_{Lu}\, I_{Lqu} \tag{5.9}$$

$$V_{tqu} = V_{\infty u}\, cos\,(\delta - \alpha) + R_{Lu}\, I_{Lqu} - X_{Lu}\, I_{Ldu} \tag{5.10}$$

Como observação, lembrar que a linha de transmissão encontra-se acoplada na saída da máquina síncrona, tornando-se para ela uma carga, conforme o modelo aqui adotado; ver figura 5.2. Portanto, as tensões $V_d$ e $V_q$, que são as tensões de alimentação da linha, a enxergam como uma carga de modo que o fluxo de corrente será no sentido máquina para o barramento infinito.
Notar também que os sinais das tensões de rotação entre os eixos $d$ e $q$ terão de se apresentar simétricos entre si, ou seja, no eixo $d$ o sinal aparecerá positivo enquanto que no eixo $q$ o sinal aparecerá negativo. Isso se deve àquela operação matricial com a transformação $d-q-0$; ver dedução da equação matricial 5.6.

A impedância shunt no barramento de saída do transformador elevador, por ser considerada, poderá ser equacionada da seguinte forma, em termos de valores eficazes ou rms das variáveis de estado envolvidas:

$$V_{tu} = V_{tqu} + jV_{tdu} = Z_{su} I_{su} \tag{5.11}$$

ou então

$$V_{tqu} + jV_{tdu} = (I_u - I_{Lu})\, R_{su} + j\,(I_u - I_{Lu})\, X_{su}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} &V_{tqu} + jV_{tdu} = \\ &= (I_{qu} - I_{Lqu})\, R_{su} + j(I_{du} - I_{Ldu}) R_{su} + j(I_{qu} - I_{Lqu}) X_{su} - (I_{du} - I_{Ldu}) X_{su} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Separando-se as partes real e imaginária da equação 5.12 vem que:

$$V_{tqu} = (I_{qu} - I_{Lqu})R_{su} - (I_{du} - I_{Ldu})X_{su}$$

$$V_{tdu} = (I_{du} - I_{Ldu})R_{su} + (I_{qu} - I_{Lqu})X_{su}$$

Separando, convenientemente, as equações anteriores, obtém-se o sistema de equações nas variáveis $I_{Ldu}$ e $I_{Lqu}$ da seguinte forma:

$$X_{su}\, I_{Ldu} - R_{su}\, I_{Lqu} = V_{tqu} - R_{su}\, I_{qu} + X_{su}\, I_{du}$$

$$R_{su}\, I_{Ldu} + X_{su}\, I_{Lqu} = -V_{tdu} + R_{su}\, I_{du} + X_{su}\, I_{qu}$$

Resolvendo-se o sistema de equações precedentes vem que:

$$I_{Ldu} = I_{du} + \frac{X_{su} V_{tqu} - R_{su} V_{tdu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2} \qquad (5.13)$$

e

$$I_{Lqu} = I_{qu} - \frac{R_{su} V_{tqu} + X_{su} V_{tdu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2} \qquad (5.14)$$

Levando-se os valores de $I_{Ldu}$ e $I_{Lqu}$, das equações (5.13) e (5.14), respectivamente, nas equações (5.9) e (5.10), vem que:

$$V_{tdu} = -V_{\infty u} \sin(\delta - \alpha) + R_{Lu}\left(I_{du} + \frac{X_{su} V_{tqu} - R_{su} V_{tdu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}\right) +$$

$$+ X_{Lu}\left(I_{qu} - \frac{R_{su} V_{tqu} + X_{su} V_{tdu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}\right)$$

e

$$V_{tqu} = V_{\infty u} \cos(\delta - \alpha) + R_{Lu}(I_{qu} - \frac{R_{su} V_{tqu} + X_{su} V_{tdu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}) -$$

$$- X_{Lu}(I_{du} + \frac{X_{su} V_{tqu} - R_{su} V_{tdu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2})$$

Separando-se as duas equações anteriores, de modo conveniente, vêm que:

$$V_{tdu}(1 + \frac{R_{Lu}R_{su} + X_{Lu}X_{su}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}) + V_{tqu}(\frac{R_{su}X_{Lu} - R_{Lu}X_{su}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}) =$$

$$= -V_{\infty u} \sin(\delta - \alpha) + R_{Lu}I_{du} + X_{Lu}I_{qu}$$

$$V_{tdu}(\frac{R_{Lu}X_{su} - R_{su}X_{Lu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}) + V_{tqu}(1 + \frac{R_{Lu}R_{su} - X_{Lu}X_{su}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}) =$$

$$= V_{\infty u} \cos(\delta - \alpha) + R_{Lu}I_{qu} - X_{Lu}I_{du}$$

Ou de maneira mais compactada:

$$\Lambda_1 V_{tdu} - \Lambda_2 V_{tqu} = -V_{\infty u} \sin(\delta - \alpha) + R_{Lu} I_{du} + X_{Lu} I_{qu} \qquad (5.15)$$

$$\Lambda_2 V_{tdu} + \Lambda_1 V_{tqu} = V_{\infty u} \cos(\delta - \alpha) + R_{Lu} I_{qu} - X_{Lu} I_{du} \qquad (5.16)$$

onde

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{R_{Lu}R_{su} + X_{Lu}X_{su}}{R_{su}^2 + X_{su}^2} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = \frac{R_{Lu}X_{su} - R_{su}X_{Lu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}$$

Considerando as equações que enxergam a situação para dentro da máquina síncrona, desconsiderando-se a presença dos enrolamentos amortecedores e a resistência do estator, vem que:

$$V_{tdu} = -X_{qu} I_{qu} \qquad (5.17)$$

$$V_{tqu} = X_{du} I_{du} + L_{idu} I_{Fu} \qquad (5.18)$$

Substituindo os valores de $V_d$ e $V_q$, das equações 5.17 e 5.18, nas equações 5.15 e 5.16, e agrupando as parcelas convenientemente, obtém-se:

$$\Lambda_2 E_{qu} = V_{\infty u} \sin(\delta - \alpha) - (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{du}) I_{du} - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu}) I_{qu} \qquad (5.19)$$

$$\Lambda_1 E_{qu} = V_{\infty u} \cos(\delta - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{du}) I_{du} + (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu}) I_{qu} \qquad (5.20)$$

onde

$$E_{qu} \overset{\Delta}{=} L_{idu} I_{Fu}$$

Considerando-se, nas equações anteriores, os termos diferença das variáveis principais seguintes, vem:

$$E_{qu} = \Delta E_{qu} + E_{qou} \qquad (5.21)$$

$$I_{du} = \Delta I_{du} + I_{dou} \qquad (5.22)$$

$$I_{qu} = \Delta I_{qu} + I_{qou} \qquad (5.23)$$

$$\delta = \Delta\delta + \delta_o \quad em\ rad \qquad (5.24)$$

**Nota:** não confundir o termo *diferença* aqui empregado com o termo *derivativo*; o primeiro representa um desvio sobre um valor fixo, o segundo está associado à função derivada de uma função.

Substituindo-se as equações 5,21, 5.22, 5.23 e 5.24 nas equações 5.19 e 5.20 vem:

$$\Lambda_2 (\Delta E_{qu} + E_{qou}) = V_{\infty u} \sin(\Delta\delta + \delta_o - \alpha) - (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{du})(\Delta I_{du} + I_{duo}) - \\ - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu})(\Delta I_{qu} + I_{quo}) \qquad (5.25)$$

$$\Lambda_1(\Delta E_{qu} + E_{qou}) = V_{\infty u}\cos(\Delta\delta + \delta_o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{du})(\Delta I_{du} + I_{duo}) +$$
$$+ (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu})(\Delta I_{qu} + I_{quo})$$
(5.26)

Utilizando-se das identidades seguintes, válidas para pequenas variações do ângulo $\delta$, vem que:

$$\sin[(\delta_o - \alpha) + \Delta\delta] = \sin(\delta_o - \alpha)\cos\Delta\delta + \cos(\delta_o - \alpha)\sin\Delta\delta$$

$$\sin[(\delta_o - \alpha) + \Delta\delta] \cong \sin(\delta_o - \alpha) + \cos(\delta_o - \alpha)\Delta\delta$$

$$\cos[(\delta_o - \alpha) + \Delta\delta] = \cos(\delta_o - \alpha)\cos\Delta\delta - \sin(\delta_o - \alpha)\sin\Delta\delta$$

$$\cos[(\delta_o - \alpha) + \Delta\delta] \cong \cos(\delta_o - \alpha) - \sin(\delta_o - \alpha)\Delta\delta$$

As equações 5.25 e 5.26, a partir das relações trigonométricas anteriores, se transformam em:

$$\Lambda_2\,\Delta E_{qu} = V_{\infty u}\cos(\delta o - \alpha)\Delta\delta - (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{du})\Delta I_{du} - -(X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu})\Delta I_{qu} \qquad (5.27)$$

$$\Lambda_1\,\Delta E_{qu} = -V_{\infty u}\sin(\delta o - \alpha)\Delta\delta - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{du})\Delta I_{du} + +(R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu})\Delta I_{qu} \qquad (5.28)$$

onde

$$\Lambda_1 E_{qou} = V_{\infty u}\cos(\delta_o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{du})I_{duo} + (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu})I_{quo}$$

e

$$\Lambda_2 E_{qou} = V_{\infty u}\sin(\delta_o - \alpha) - (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{du})I_{duo} - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu})I_{quo}$$

Utilizando-se da identidade seguinte, que considera a condição transitória da máquina síncrona a partir da tensão $E_{au} = E_{qu} - j(X_{du} - X_{qu})\,I_{du}$, dada pela equação vetorial 4.189, vem que:

$$\Delta E'_{qu} = \Delta E_{qu} - (X_{du} - X'_{du})\Delta I_{du} \qquad (5.29)$$

Nas equações 5.27 e 5.28, $X_{du}$ se transforma em $X'_{du}$, enquanto que $X_{qu}$ permanece assim. Deste modo, tem-se que:

$$(R_{Lu} + \Lambda_2 X'_{du})\Delta I_{du} + (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu})\Delta I_{qu} = \\ = V_{\infty u} \cos(\delta o - \alpha)\ \Delta\delta - \Lambda_2\ \Delta E_{qu} \tag{5.30}$$

$$(X_{Lu} + \Lambda_1 X'_{du})\Delta I_{du} - (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu})\Delta I_{qu} = \\ = -V_{\infty u} \sin(\delta o - \alpha)\Delta\delta - \Lambda_1\ \Delta E_{qu} \tag{5.31}$$

A solução do sistema formado pelas equações 5.30 e 5.31 será:

$$\Delta I_{du} = \frac{\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X_{qu}}{\Delta}\ \Delta E_{qu} - \\ - \frac{(R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu}) \cos(\delta o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu}) \sin(\delta o - \alpha)}{\Delta} V_{\infty u}\, \Delta\delta \tag{5.32}$$

e

$$\Delta I_{qu} = \frac{(\Lambda_2 X_{Lu} - \Lambda_1 R_{Lu})}{\Delta}\ \Delta E_{qu} - \\ - \frac{(R_{Lu} + \Lambda_2 X'_{du}) \sin(\delta o - \alpha) + (X_{Lu} + \Lambda_1 X'_{du}) \cos(\delta o - \alpha)}{\Delta} V_{\infty u}\ \Delta\delta \tag{5.33}$$

onde

$$\Delta = -\left[ (R_{Lu}^2 + X_{Lu}^2) + (X'_{du} + X_{qu})(\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu}) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X'_{du} X_{qu} \right]$$

Das equações 4.88 e 4.109, respectivamente, obtêm-se as seguintes expressões para o fluxo enlaçado de campo e a tensão de campo da máquina síncrona, em seus valores instantâneos, desconsiderando a presença do enrolamento amortecedor:

$$v_F = r_F\, i_F + \dot{\lambda}_F$$

$$\lambda_F = L_F\, i_F + K M_F\, i_d$$

Eliminando-se a variável $i_F$, entre as equações anteriores, obtém-se a seguinte expressão:

$$\lambda_F = \frac{L_F}{r_F} v_F - \frac{L_F}{r_F} \dot{\lambda}_F + KM_F \, i_d$$

Da equação 4.295 tem-se que $T'_{do} = \frac{L_F}{r_F}$, em segundos, o que faz com que a expressão anterior tome a seguinte forma, já se considerando o plano da variável $S$ de Laplace:

$$(1 + T'_{do} \, S) \, \lambda_F(S) = \frac{L_F}{r_F} v_F(S) + KM_F \, i_d(s)$$

Da equação 4.192, sabe-se que $e_q = \sqrt{3} \, E_q = \frac{\omega_B KM_F}{L_F} \lambda_F$ o que faz com que a expressão anterior fique do modo seguinte:

$$(1 + T'_{do} S) \frac{L_F}{\omega_B KM_F} e_q(S) = \frac{L_F}{r_F} v_F(S) + KM_F \, i_d(S)$$

Da equação 4.193, sabe-se que $e_{FD} = \sqrt{3} E_{FD} = \frac{\omega_R KM_F v_F}{r_F}$ o que faz com que a expressão assuma o modo seguinte:

$$(1 + T'_{do} \, S) \frac{L_F}{\omega_B KM_F} e_q(S) = -\frac{L_F}{\omega_B KM_F} e_{FD}(S) + KM_F \, i_d(S)$$

Considerando-se agora os valores rms ou eficazes das variáveis de estado envolvidas na equação precedente, com $i_d = \sqrt{3} I_d$, obtém-se a seguinte expressão mais compactada:

$$(1 + T'_{do} S) E_q = E_{FD} + \frac{\omega_B (KM_F)^2}{L_F} I_d \qquad (5.34)$$

Da equação 4.308, em seus valores atuais, tem-se que:

$$L'_d = L_d - \frac{(KM_F)^2}{L_F} \quad \therefore \quad X'_d = X_d - \omega_B \frac{(KM_F)^2}{L_F}$$

ou ainda

$$X'_d = X_d - \frac{\omega_B (KM_F)^2}{L_F} \quad \therefore \quad X_d - X'_d = \frac{\omega_B (KM_F)^2}{L_F} \qquad (5.35)$$

Esta última relação de $(X_d - X'_d)$ permite que se escreva a equação 5.34 do modo seguinte:

$$(1+T'_{do}\,S)E_q(S) = E_{FD}(S) + (X_d - X'_d)\,I_d(S)$$

Tomando-se, para a equação anterior, os incrementos das variáveis de estado seguintes:

$E_q(S) = \Delta E_q(S) + E_{qo}$

$E_{FD}(S) = \Delta E_{FD}(S) + E_{FDo}$

$I_d(S) = \Delta I_d(S) + I_{do}$

Finalmente, vem que:

$$(1+T'_{do}\,S)\Delta E_q(S) = \Delta E_{FD}(S) - (X_d - X'_d)\,\Delta I_d(S) \qquad (5.36)$$

onde $E_{qo} = E_{FDo} + (X_d - X'_d)\,I_{do}$

Passando a equação 5.36 para valores em por unidade, numa base de valores já definida e escolhida previamente, vem que:

$$(1+\frac{T'_{do}}{\omega_B}S)\,V_{FB}\,\Delta E_{qu}(S) = V_{FB}\,\Delta E_{FDu}(S) + V_{FB}\,(X_{du} - X'_{du})\,\Delta I_{du}(S)$$

Ou melhor:

$$(1+\frac{T'_{do}}{\omega_B}S)\Delta E_{qu}(S) = \Delta E_{FDu}(S) - (X_{du} - X'_{du})\,\Delta I_{du}(S)$$

Substituindo-se na equação anterior o valor de $\Delta I_d$, da equação 5.32, vem que:

$$(1+\frac{T'_{do}}{\omega_B}S)\;\Delta E_{qu}(S) =$$

$$= \Delta E_{FDu}(S) + (X_{du} - X'_{du})[\;\frac{\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)X_{qu}}{\Delta}\;\Delta E_{qu}(S) -$$

$$- \frac{(R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu})\cos(\delta o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu})\sin(\delta o - \alpha)}{\Delta}\;V_{\infty u}\;\Delta\delta(S)]$$

Ou, resumidamente, após uma manipulação algébrica:

$$\frac{T'_{do}}{\omega_B} S\ \Delta E_{qu}(S) = \Delta E_{FDu}(S) - \frac{1}{K_3}\ \Delta E_{qu}(S) - K_4\ \Delta\delta(S) \qquad (5.37)$$

onde

$$\frac{1}{K_3} = 1 + \frac{(X_{du} - X'_{du})[\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X_{qu}]}{(R_{Lu}^2 + X_{Lu}^2) + (X'_{du} + X_{qu})(\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu}) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X'_{du} X_{qu}}$$

e

$$K_4 = -\frac{(X_{du} - X'_{du})[(R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu}) \cos(\delta o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu}) \sin(\delta o - \alpha)]}{(R_{Lu}^2 + X_{Lu}^2) + (X'_{du} + X_{qu})(\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu}) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X'_{du} X_{qu}} V_{\infty u}$$

sendo

$$\Delta = -\left[(R_{Lu}^2 + X_{Lu}^2) + (X'_{du} + X_{qu})(\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu}) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X'_{du} X_{qu}\right]$$

A partir da equação 5.37 é possível escrever a função de transferência da fem da máquina síncrona, no plano complexo, em função da tensão de excitação e do ângulo elétrico de potência que nesse caso é dado em radianos elétricos.

$$\Delta E_{qu}(S) = \frac{K_3}{1 + K_3 \frac{T'_{do}}{\omega_B} S}\ \Delta E_{FDu}(S) - \frac{K_3 K_4}{1 + K_3 \frac{T'_{do}}{\omega_B} S}\ \Delta\delta(S) \qquad (5.38)$$

Notar que os parâmetros $K_3$ e $K_4$ dependem das condições de carregamento do sistema e possuem caracterização física bem definida podendo ser assim explicados:

onde

$K_3$ : representa o fator de impedância de carga

$K_4$ : representa o efeito desmagnetizante devido à carga

Matematicamente, pode-se dizer que os parâmetros $K_3$ e $K_4$ representam o processo de linearização das condições do sistema em questão no ponto de trabalho pré-definido.
Eles poderiam ser assim representados com a utilização das derivadas parciais de cada combinação de função no ponto de trabalho. Senão, veja-se:

$$K_3 = \left. \frac{\partial E_{qu}(t)}{\partial E_{FDu}(t)} \right|_{\delta = \delta o} \quad \text{em pu/pu} \tag{5.39}$$

e

$$K_4 = -\frac{1}{K_3} \left. \frac{\partial\, E_{qu}(t)}{\partial\, \delta(t)} \right|_{E_{FDu} = E_{FD0u}} \quad \text{em pu/rad} \tag{5.40}$$

**Nota:** nesse livro, o valor $E_{FDO}$ está associado à fem de regime permanente considerando-se a linha de entreferro da máquina síncrona.

Deve-se agora procurar o equacionamento do torque elétrico da máquina síncrona de modo que se definam novos parâmetros do modelo linearizado aqui adotado.
Em tempo: nota-se que este modelo adotado contempla a condição operativa transitória da máquina síncrona, o que já é mais que o suficiente para a presente abordagem.

Inicialmente, deverá ser encontrada a expressão para o torque elétrico trifásico da máquina síncrona, levando-se em conta a transformação $d - q - 0$.

Partindo das seguintes expressões para os fluxos enlaçados nos eixos $d$ e $q$, considerando-se agora a condição transitória onde as seguintes relações são válidas, vem que:

$$\lambda_d \overset{\Delta}{=} \lambda'_d + L'_d\, i_d \quad \therefore \quad \lambda'_d = \lambda_d - L'_d\, i_d \tag{5.41}$$

$$\lambda_q \overset{\Delta}{=} \lambda'_q + L'_q\, i_q \quad \therefore \quad \lambda'_q = \lambda_q - L'_q\, i_q \tag{5.42}$$

A explicação para as expressões anteriores remontam ao entendimento operacional da máquina síncrona.
Em regime permanente, o fluxo enlaçado no eixo $d$ tem a seguinte expressão, quando se considera a equação 4.88:

$$\lambda_d = L_d i_d + K M_F i_F$$

A impedância síncrona de eixo direto $X_d = \omega L_d$ parte do pressuposto que, sob condições normais de funcionamento da máquina síncrona, em sua rotação síncrona, o equilíbrio encontra-se estabelecido.
Sob a ação de um evento qualquer, um fenômeno transitório, por exemplo, uma nova impedância $\omega_B L_d'$ é posta dentro do circuito magnético, fato que pode ser assim representado em termos matemáticos:

$$\lambda_d = L_d i_d + KM_F i_F - L'_d i_d \tag{5.43}$$

Sabe-se da teoria desenvolvida no item 4.5.2 que as expressões para as indutâncias de eixo direto e de eixo em quadratura, em regime transitório, podem ser dadas por:

$$L'_d = L_d - \frac{(KM_F)^2}{L_F}$$

$$L'_q = L_q$$

Portanto, pelo menos para a condição transitória, considerando-se uma máquina síncrona de polos salientes, em dado instante haverá uma superposição sobre o eixo $d$ do efeito do enrolamento de campo, caracterizando a presença de uma indutância transitória que, a rigor, é de valor menor que aquela que tinha existência nas condições normais de operação síncrona. Nesse caso, tem-se $L'_d < L_d$.
Como, no exemplo, levou-se em conta uma máquina síncrona de pólos salientes, pela inexistência de enrolamento de campo de eixo $q$, não se considera o efeito transitório para essa condição. Se assim o fosse haveria necessidade da consideração da indutância $L'_q$, situação normalmente verificada nas máquinas síncronas de pólos lisos.

Da equação 4.202 se obtém a equação geral do torque trifásico total elétrico de transferência de potência da máquina síncrona. Senão, veja-se:

$$\tau_{e3\phi} = i_q \lambda_d - i_d \lambda_q$$

Considerando-se, agora, a condição operativa transitória da máquina, com a utilização das equações 5.41 e 5.42, vem que:

$$\tau_{e3\phi} = i_q(\lambda'_d + L'_d i_d) - i_d(\lambda'_q + L'_q i_q) \tag{5.44}$$

Mas, ainda da condição transitória, tem-se, para as tensões, que:

$$e'_d = -\omega \lambda'_q \quad \text{e} \quad e'_q = \omega \lambda'_d$$

Logo, a equação 5.44 tomará o seguinte aspecto:

$$\tau_{e3\phi} = \frac{e'_q i_q}{\omega} + \frac{e'_d i_d}{\omega} - (L'_q - L'_d)\, i_d i_q \tag{5.45}$$

Na base de valores, previamente e adequadamente escolhida, o valor do torque base será dado pela relação seguinte:

$$T_{eB} = \frac{V_B I_B}{\omega_B} \tag{5.46}$$

A equação 5.45, em por unidade, ficará do seguinte modo:

$$\frac{\tau_{e3\phi}}{T_{eB}} = \frac{e'_q i_q}{\omega} \frac{\omega_B}{V_B I_B} + \frac{e'_d i_d}{\omega} \frac{\omega_B}{V_B I_B} - (L'_q - L'_d)\, i_d i_q \frac{\omega_B}{V_B I_B}$$

Assim, tem-se que:

$$\tau_{e3\phi u} = e'_{qu} i_{qu} + e'_{du} i_{du} - (X'_q - X'_d) i_{du} i_{qu} \tag{5.47}$$

**Nota:** na condição de sistema síncrono, quando pequenas variações da freqüência podem ser desprezadas, sempre se poderá adotar a aproximação $\omega = \omega_B$. Também será possível escrever que $V_B = \omega_B L_B I_B = X_B I_B$. Em referência aos desenvolvimentos relativos aos valores base escolhidos para a representação em por unidade.

Mas, considerando-se os valores eficazes aplicáveis, vem que:

$$e'_d = \sqrt{3} E'_d \quad , \quad e'_q = \sqrt{3} E'_q \, , \; i_d = \sqrt{3} I_d \;\; \text{e} \;\; i_q = \sqrt{3} I_q$$

$$\tau_{e3\phi u} = \sqrt{3} E'_d \sqrt{3} I_d + \sqrt{3} E'_q \sqrt{3} I_q - (X'_q - X'_d) \sqrt{3} I_d \sqrt{3} I_q$$

$$\tau_{e1\phi u} = E'_{du} I_{du} + E'_{qu} I_{qu} - (X_{qu} - X'_{du}) I_{du} I_{qu} \tag{5.48}$$

**Nota:** como era de se esperar, a operação matemática anterior resultou na equação de uma expressão monofásica para a representação do torque

elétrico da máquina síncrona, em por unidade, e também já foi considerada a condição máquina síncrona de pólos salientes onde $X'_q = X_q$ .

Tomando-se, para a equação anterior, os incrementos das variáveis de estado seguintes:

$$\tau_{eu}(S) = \Delta\tau_{eu}(S) + \tau_{eou}$$
$$E'_{do}(S) = \Delta E'_d(S) + E'_{do}$$
$$E'_{qo}(S) = \Delta E'_q(S) + E'_{qo}$$
$$I'_{do}(S) = \Delta I'_d(S) + I'_{do}$$
$$I'_{qo}(S) = \Delta I'_q(S) + I'_{qo}$$

Deste modo, a equação precedente toma a seguinte forma:

$$\Delta\tau_{eu} + \tau_{eou} = (\Delta E'_{du} + E'_{dou})(\Delta I_{du} + I_{dou}) + (\Delta E'_{qu} + E'_{qou})(\Delta I_{qu} + I_{qou}) - \\ -(X_{qu} - X'_{du})(\Delta I_{du} + I_{dou})(\Delta I_{qu} + I_{qou})$$

sendo

$$\tau_{eou} = E'_{dou} I_{dou} + E'_{qou} I_{qou} - (X_{qu} - X'_{du}) I_{dou} I_{qou}$$

Em termos de diferenças, tem-se, para a expressão anterior, que:

$$\Delta\tau_{eu} = I_{dou}\,\Delta E'_{du} + E'_{dou}\,\Delta I_{du} + I_{qou}\,\Delta E'_{qu} + E'_{qou}\,\Delta I_{qu} - \\ -(X_{qu} - X'_{du})(I_{qou}\,\Delta I_{du} + I_{dou}\,\Delta I_{qu}) \qquad (5.49)$$

Desprezando-se, na equação 5.49, os termos $I_{dou}\,\Delta E'_{du}$ e $E'_{dou}\,\Delta I_{du}$, uma vez que na prática são parcelas bem pequenas se comparadas com as demais, vem que:

$$\Delta\tau_{eu} = I_{qou}\,\Delta E'_{qu} + E'_{qou}\,\Delta I_{qu} - (X_{qu} - X'_{du}) I_{dou}\,\Delta I_{qu} - \\ -(X_{qu} - X'_{du}) I_{qou}\Delta I_{du} \qquad (5.50)$$

Ou melhor

$$\Delta\tau_{eu} = I_{qou}\,\Delta E'_{qu} - (X_{qu} - X'_{du}) I_{qou}\Delta I_{du} + E_{aou}\,\Delta I_{qu} \qquad (5.51)$$

onde $E_{aou} = E'_{qou} - (X_{qu} - X'_{du}) I_{dou}$

**Nota:** deve-se considerar que, por se tratar de um modelo linearizado, algumas aproximações tiveram de ser feitas como algumas eliminações. O modelo linearizado aqui adotado neste livro é um modelo muito forte no que tange ao estudo em que se prioriza o eixo $q$ de operação da máquina síncrona, porém é um pouco pobre quando se foca o eixo $d$. Quando se quiser uma maior representatividade em relação ao eixo $d$ deve-se procurar outro modelo mais adequado àquilo que se pretende.
Em relação com o que se deu na equação 5.51, mais propriamente com o parâmetro $E_{aou}$, deve-se notar que esse foi o resultado de um cálculo baseado em diagrama fasorial que considerou a operação da máquina síncrona como um gerador alimentando uma carga indutiva, de modo que a parcela $(X_{qu} - X'_{du})I_{dou}$ leva em conta o sinal de $I_{dou}$ .

A equação 5.51 pode ser obtida diretamente a partir de uma inspeção à figura 5.3 que representa o plano fasorial das tensões da máquina síncrona, segundo o modelo matemático aqui adotado para análise.

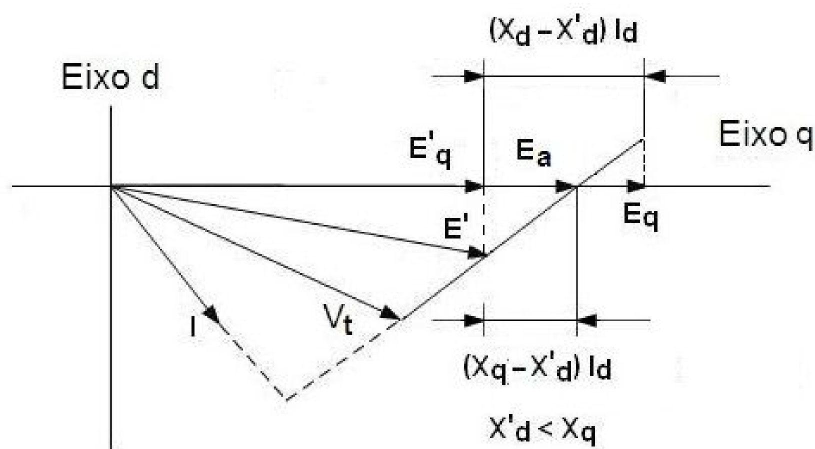



***Figura 5.3 – Diagrama Fasorial das Tensões para um Gerador Síncrono de Pólos Salientes***

Substituindo, respectivamente, na equação 5.51 as expressões de $\Delta I_d$ e $\Delta I_q$, das equações 5.32 e 5.33, e adotando a aproximação $\Delta E'q \cong \Delta Eq$, obtém-se a seguinte equação para a variação do torque elétrico em por unidade:

$$\Delta\tau_{eu} = \{\ Iqou - \frac{[(Xqu - X'du)(\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu}) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)Xqu]}{\Delta} Iqou +$$

$$+ \frac{(\Lambda_2 X_{Lu} - \Lambda_1 R_{Lu})}{\Delta} Eaou\ \}\Delta Equ +$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\{[-(Xqu - X'du)(\Lambda_1 Xqu + X_{Lu})\ Iqou - (\Lambda_2 X'du + R_{Lu})\ Eaou\ ]\sin(\delta o - \alpha) +$$

$$+ [(Xqu - X'du)(\Lambda_2 Xqu + R_{Lu})\ Iqou + (\Lambda_1 X'du + X_{Lu})\ Eaou\ ]\cos(\delta o - \alpha)\}\ V_{\infty u}\ \Delta\delta$$

ou de maneira resumida, já considerando-se o plano complexo de Laplace:

$$\Delta\tau_{eu}(S) = K_1\,\Delta\delta(S) + K_2\,\Delta Equ(S) \tag{5.52}$$

onde

$$K_1 = \frac{1}{\Delta}\{-[(Xqu - X'du)(\Lambda_1 Xqu + X_{Lu})\ Iqou + (\Lambda_2 X'du + R_{Lu})\ Eaou]\sin(\delta o - \alpha) +$$

$$+ [(Xqu - X'du)(\Lambda_2 Xqu + R_{Lu})\ Iqou - (\Lambda_1 X'du + X_{Lu})Eaou]\ \cos(\delta o - \alpha)\}V_{\infty u}$$

e

$$K_2 = Iqou + \frac{1}{\Delta}\{-[(\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu}) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)\ Xqu]\,(Xqu - X'du)\ Iqou +$$

$$+ (\Lambda_2 X_{Lu} - \Lambda_1 R_{Lu})\ Eaou\}$$

Do mesmo modo anterior, pode-se dizer que os parâmetros $K_1$ e $K_2$ representam o processo de linearização das condições do sistema em questão no ponto de trabalho pré-definido.
Eles poderiam ser assim representados com a utilização das derivadas parciais de cada combinação de função no ponto de trabalho. Senão, veja-se:

$$K_1 = \left.\frac{\partial\tau_{eu}(t)}{\partial\delta(t)}\right|_{E_{qu} = E_{qou}} \quad \text{em pu/rad} \tag{5.53}$$

e

$$K_2 = \left.\frac{\partial \tau_{eu}(t)}{\partial Equ(t)}\right|_{\delta = \delta o} \quad \text{em pu/pu} \tag{5.54}$$

Fisicamente $K_1$ representa a variação do torque elétrico da máquina síncrona para pequenas variações do ângulo $\delta$, da fem da máquina, quando o fluxo do entreferro, $Eq$, permanecer constante.
Nas mesmas condições, $K_2$ representa a variação do torque elétrico para pequenas variações do fluxo do entreferro, $Eq$, quando o ângulo $\delta$, for mantido constante.
O parâmetro $K_1$, já analisado, também é conhecido na literatura de controle e estabilidade dos SEPs como coeficiente de torque sincronizante, cujo tema já foi abordado no capítulo 3.

Para a atual tensão de saída na barra, ou tensão terminal do gerador síncrono, segue-se o desenvolvimento.

Das equações 5.17 e 5.18, desprezando-se a resistência do estator e já se trabalhando com as variáveis em seus valores rms ou eficazes e em por unidade, numa base de valores previamente definida, vem que:

$$V_{du} = -X_{qu}\, I_{qu} \tag{5.55}$$

e

$$V_{qu} = X_{du}\, I_{du} + E_{qu} \tag{5.56}$$

Sabe-se, também da equação 5.20, que $E_{qu} \overset{\Delta}{=} L_{idu}\, I_{Fu}$. Deste modo, podem-se aplicar as equações das tensões dos eixos $d$ e $q$ da máquina síncrona de modo a se obter a tensão de saída em função de certas variáveis de estado específicas. Senão, veja-se.

Da figura 5.3 se extrai a equação seguinte:

$$E_{qu} = E'_{qu} + (X_{du} - X'_{du})I_{du} \tag{5.57}$$

Substituindo-se, na equação 5.56, a expressão da tensão $E_q$ da equação 5.57 vem:

$$V_{qu} = X_{du}\, I_{du} + [E'_{qu} + (X_{du} - X'_{du})\, I_{du}] \tag{5.58}$$

Tomando-se, para a equação anterior, os incrementos das variáveis de estado seguintes, as equações 5.55 e 5.56 se transformam nas equações 5.59 e 5.60.

$E_{qu} = \Delta E_{qu} + E_{qou}$

$V_{du} = \Delta V_{du} + V_{dou}$

$V_{qu} = \Delta V_{qu} + V_{qou}$

$I_{du} = \Delta I_{du} + I_{dou}$

$I_{du} = \Delta I_{du} + I_{dou}$

$$\Delta V_{du} = -X_{qu}\ \Delta I_{qu} \tag{5.59}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta V_{qu} &= X_{du}\ \Delta I_{du} + [\ \Delta E'_{qu} - (\ X_{du} - X'_{du}\ )\ \Delta I_{du}\ ] = \\ &= \Delta E'_{qu} + X'_{du} \Delta I_{du} \end{aligned} \tag{5.60}$$

onde

$V_{dou} = -X_{qu}\ I_{qou}$

e

$V_{qou} = X_{du}\ I_{dou} + [\ E'_{qou} + (\ X_{du} - X'_{du}\ )\ I_{dou}\ ]$

Deste modo, a tensão terminal $V_t$ será dada pela relação seguinte:

$$(\Delta V_{tu} + V_{tou}\ )^2 = (\Delta V_{tdu} + V_{tdou}\ )^2 + (\Delta V_{tqu} + V_{tqou}\ )^2$$

Procedendo às devidas simplificações e desconsiderando os termos de segunda ordem nas variáveis diferença, tem-se que:

$$V_{tou}\ \Delta V_{tu} = V_{tdou}\ \Delta V_{tdu} + V_{tqou}\ \Delta V_{tqu} \quad \therefore \quad \Delta V_{tu} = \frac{V_{tdou}}{V_{tou}} \Delta V_{tdu} + \frac{V_{tqou}}{V_{tou}} \Delta V_{tqu}$$

Trazendo-se na equação anterior as expressões de $\Delta V_{tdu}$ e $\Delta V_{tqu}$, das equações 5.59 e 5.60, vem que:

$$\Delta V_{tu} = \frac{V_{tdou}}{V_{tou}}(-X_{qu}\ \Delta I_{qu}) + \frac{V_{tqou}}{V_{tou}}(\Delta E'_{qu} + X'_{du}\ \Delta I_{du}) \qquad (5.61)$$

Trazendo-se na equação 5.61 os valores $\Delta I_{du}$ e $\Delta I_{qu}$, das equações 5.32 e 5.33, vem que:

$$\Delta V_{tu} = [\frac{V_{tqou}}{V_{tou}}\{1 - \frac{X'_{du}}{\Delta}[\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X_{qu}]\} - \frac{V_{tdou}}{V_{tou}} \frac{X_{qu}}{\Delta}(\Lambda_2 X_{Lu} - \Lambda_1 R_{Lu})]\ \Delta E_{qu} +$$

$$+ \frac{V_{\infty u}}{\Delta}\{\frac{V_{tdou}}{V_{tou}} X_{qu}\ [(R_L + \Lambda_2 X'_{du}) sin(\delta o - \alpha) + (X_{Lu} + \Lambda_1 X'_{du}) cos(\delta o - \alpha)] -$$

$$- \frac{V_{tqou}}{V_{tou}} X'_{du}\ [\ (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu}) cos(\delta o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu}) sin(\delta o - \alpha)]\ \}\ \Delta\delta$$

ou de maneira resumida, já considerando-se o plano complexo de Laplace:

$$\Delta V_{tu}(S) = K_5\ \Delta\delta(S) + K_6\ \Delta E_{qu}(S) \qquad (5.62)$$

onde

$$K_5 = \frac{V_{\infty u}}{\Delta}\{\frac{V_{tdou}}{V_{tou}} X_{qu}\ [(R_L + \Lambda_2 X'_{du}) sin(\delta o - \alpha) + (X_{Lu} + \Lambda_1 X'_{du}) cos(\delta o - \alpha)] -$$

$$- \frac{V_{tqou}}{V_{tou}} X'_{du}\ [\ (R_{Lu} + \Lambda_2 X_{qu}) cos(\delta o - \alpha) - (X_{Lu} + \Lambda_1 X_{qu}) sin(\delta o - \alpha)]\ \}$$

e

$$K_6 = [\frac{V_{tqou}}{V_{tou}}\{1 + \frac{X'_{du}}{\Delta}[\Lambda_1 X_{Lu} + \Lambda_2 R_{Lu} + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X_{qu}]\} -$$

$$- \frac{V_{tdou}}{V_{tou}} \frac{X_{qu}}{\Delta}(\Lambda_2 X_{Lu} - \Lambda_1 R_{Lu})]$$

Do mesmo modo anterior, pode-se dizer que os parâmetros $K_5$ e $K_6$ representam o processo de linearização das condições do sistema em questão no ponto de trabalho pré-definido.

Eles poderiam ser assim representados com a utilização das derivadas parciais de cada combinação de função no ponto de trabalho. Senão, veja-se:

$$K_5 = \left.\frac{\partial V_{tu}(t)}{\partial \delta(t)}\right|_{Equ = Eqou} \quad \text{em pu/rad} \qquad (5.63)$$

e também:

$$K_6 = \left.\frac{\partial V_{tu}(t)}{\partial E_{qu}(t)}\right|_{\delta = \delta o} \quad \text{em pu/pu} \qquad (5.64)$$

O parâmetro $K_5$ representa a variação da tensão terminal da máquina com relação a pequenas variações do ângulo $\delta$, da fem da máquina, quando o fluxo enlaçado através do entreferro, $Eq$, for mantido constante.
O parâmetro $K_6$ representa a variação da tensão terminal com relação a pequenas variações do fluxo $Eq$, de entreferro, quando o ângulo $\delta$, da fem, for mantido constante.

As equações 5.38, 5.52 e 5.62 representam as equações básicas para a modelagem da parte elétrica da máquina síncrona e permitem traçar o diagrama geral de controle da máquina operando contra o barramento infinito, onde o coeficiente de amortecimento da carga $D$ é representado.
Trata-se de um modelo linearizado num ponto de trabalho da máquina e que responde em regime transitório servindo aos propósitos aqui desejados.
A figura 5.4 mostra o diagrama em blocos completo, no plano complexo de Laplace, desse modelo particular, com todas as grandezas em por unidade numa base de valores escolhida previamente.

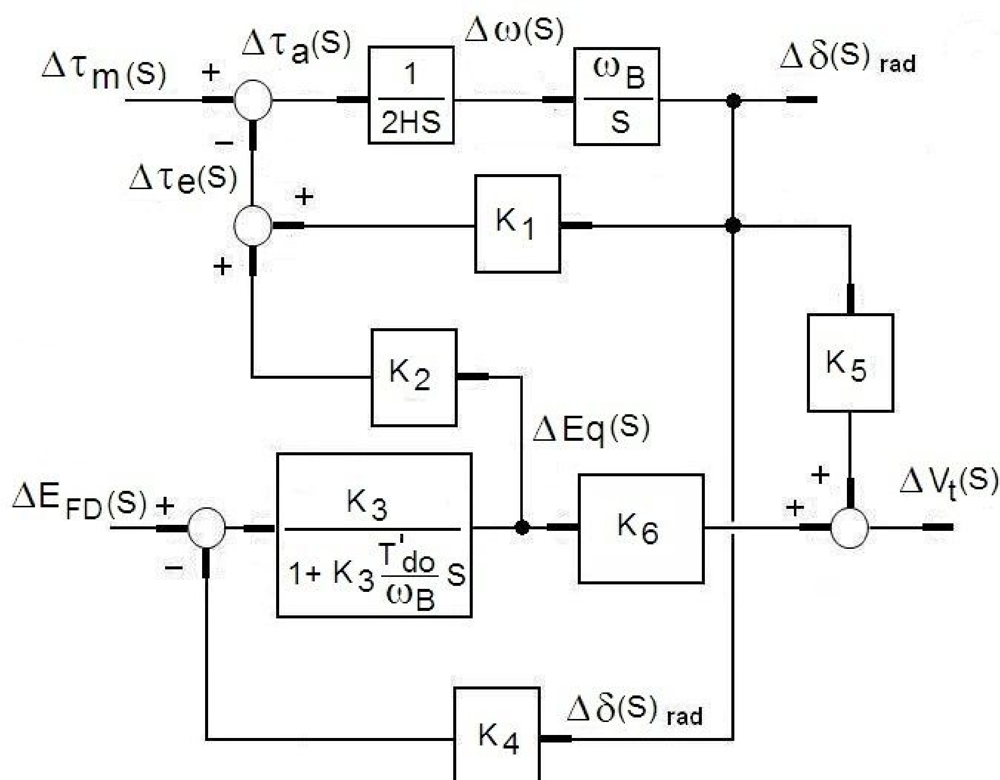



***Figura 5.4 – Diagrama em Blocos em PU do Modelo Máquina Síncrona contra o Barramento Infinito no Plano Complexo***

**Nota:** o diagrama em blocos da figura 5.4 tem importante papel no estudo do comportamento da máquina síncrona em diversas situações e já foi utilizado em inúmeros estudos, principalmente aqueles ligados à estabilidade dos SEPs.
Como pode ser visto aqui, trata-se de um modelo linearizado de representação da máquina síncrona em determinado ponto de atuação. Ele se reporta à condição de operação em regime transitório, como já foi dito antes.
Para que haja mais confiabilidade, haverá sempre a necessidade de se rodar um programa de curto-circuito, esse sim completo, da malha geral do sistema elétrico para que se possa obter o valor da impedância equivalente, ou seja, a reatância equivalente, quando for o caso, vista do ponto onde a máquina síncrona estiver conectada para que a expressão das impedâncias, contra a barra infinita, fique bem estabelecida.
A determinação dos parâmetros $K_i$ para $i = 1,2,3,4,5,6$ poderá ser obtida através de algum programa específico a partir das equações que foram desenvolvidas nesse livro.
Deve-se lembrar de que cada caso é um caso e que a desconsideração ou não de certos valores de resistência dependerá de um julgamento de Engenharia em função de sua aplicação. No modelo da figura 5.4, não foi representado o parâmetro coeficiente de amortecimento da carga elétrica.

A partir de agora será possível desenvolver uma teoria de regulação de tensão e controle de potência reativa da máquina síncrona tendo o modelo linearizado como pano de fundo para as deduções que por ora se farão necessárias.

## EXEMPLO 5.1

Calcular os parâmetros $K_i$, com $i = 1,2,3,4,5,6$, de um sistema, a partir das expressões desenvolvidas nesse capítulo, no qual se tem que: $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 0$, $R_L = R_e$ e $X_L = X_e$; sendo $K_I = \dfrac{1}{[R_e^2 + (X_q + X_e)(X'_d + X_e)]}$.

Considerar que todos os parâmetros aqui envolvidos se encontram devidamente normalizados, dentro de uma base de valores também já devidamente escolhida, e que os ângulos elétricos também envolvidos se encontram em radianos elétricos.

**Solução:**

Serão empregadas as mesmas expressões já desenvolvidas nesse capítulo, porém com algumas disposições mais adequadas a esse exemplo. Além disso, todas as variáveis de estado e todos os parâmetros envolvidos deverão ser considerados tal e qual como até aqui foram expressos.

Utilizando da equação 5.37, obtém-se a expressão para o parâmetro $K_3$, já considerando as simplificações e adequações relativas ao enunciado da questão. Senão, veja-se:

$$\frac{1}{K_3} = 1 + \frac{(X_d - X'_d)[\Lambda_1 X_e + \Lambda_2 R_e + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X_q]}{(R_e^2 + X_e^2) + (X'_d + X_q)(\Lambda_1 X_e + \Lambda_2 R_e) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X'_d X_q} =$$

$$= 1 + \frac{(X_d - X'_d)(X_e + X_q)}{(R_e^2 + X_e^2) + (X'_d + X_q) X_e + X'_d X_q}$$

Porém, é fácil comprovar a seguinte identidade:

$$R_e^2 + X_e^2 + (X'_d + X_q) X_e + X'_d X_q \equiv R_e^2 + (X_q + X_e)(X'_d + X_e) \equiv \frac{1}{K_I}$$

Deste modo, tem-se que:

$$\frac{1}{K_3} = 1 + K_I (X_d - X'_d)(X_e + X_q) \quad \therefore \quad K_3 = \frac{1}{1 + K_I (X_d - X'_d)(X_e + X_q)}$$

Ainda utilizando da equação 5.37, obtém-se a expressão para o parâmetro $K_4$, senão, veja-se:

$$K_4 = -\frac{(X_d - X'_d)[(R_e + \Lambda_2 X_q)\cos(\delta o - \alpha) - (X_e + \Lambda_1 X_q)\sin(\delta o - \alpha)]}{(R_e^2 + X_e^2) + (X'_d + X_q)(\Lambda_1 X_e + \Lambda_2 R_e) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X'_d X_q} V_\infty =$$

$$= -\frac{(X_d - X'_d)[(R_e \cos(\delta o - \alpha) - (X_e + X_q)\sin(\delta o - \alpha)]}{(R_e^2 + X_e^2) + (X'_d + X_q) X_e + X'_d X_q} V_\infty$$

Considerando-se a identidade anterior relativa à expressão do parâmetro $K_I$, vem que:

$$K_4 = V_\infty K_I (X_d - X'_d)[(X_e + X_q)\sin(\delta o - \alpha) - R_e \cos(\delta o - \alpha)]$$

Utilizando agora da equação 5.52, obtém-se a expressão para o parâmetro $K_1$, já considerando as simplificações e adequações relativas ao enunciado da questão. Assim:

$$K_1 = V_\infty K_I \{[(Xq - X'd)[(Xq + X_e) Iqo + R_e Eao]\sin(\delta o - \alpha) -$$
$$- [(Xq - X'd) R_e Iqo - (X'd + X_e) Eao]\cos(\delta o - \alpha)\}$$

Também é fácil comprovar a seguinte identidade:

$$R_e^2 + X_e^2 + (X'_d + X_q) X_e + X'_d X_q \equiv R_e^2 + (X_q + X_e)(X'_d + X_e) \equiv \frac{1}{K_I} = -\Delta$$

Assim, a expressão para o parâmetro $K_1$ ficará do seguinte modo:

$$K_1 = V_\infty K_I \{ Eao [R_e \sin(\delta o - \alpha) + (X'd + X_e)\cos(\delta o - \alpha)] +$$
$$+ Iqo (Xq - X'd)[(Xq + X_e)\sin(\delta o - \alpha) - R_e \cos(\delta o - \alpha)]\}$$

Ainda utilizando agora da equação 5.52, obtém-se a expressão para o parâmetro $K_2$, já considerando as simplificações e adequações relativas ao enunciado da questão. Deste modo, tem-se que:

$$K_2 = Iqo + \frac{1}{\Delta}\{ -[(\Lambda_1 X_e + \Lambda_2 R_e) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) Xq] (Xq - X'd) Iqo +$$

$$+ (\Lambda_2 X_e - \Lambda_1 R_e) Eao\} =$$

$$= Iqo + \frac{1}{\Delta}\{ Eao(-R_e) - (Xq - X'd) Iqo (X_e + X_q) \}$$

Considerando a identidade anterior relativa à expressão do parâmetro $K_I$, e promovendo as devidas simplificações algébricas, vem que:

$$K_2 = K_I \{ R_e Eao + [ R_e^2 + (X_q + X_e)^2 ] Iqo \}$$

Utilizando agora da equação 5.62, obtém-se a expressão para o parâmetro $K5$, já considerando as simplificações e adequações relativas ao enunciado da questão. Assim:

$$K_5 = \frac{V_\infty}{\Delta} \{ \frac{V_{tdo}}{V_{to}} X_q \; [(R_e + \Lambda_2 X'_d) sin(\delta o - \alpha) + (X_e + \Lambda_1 X'_d) cos(\delta o - \alpha)] -$$

$$- \frac{V_{tqo}}{V_{to}} X'_d \; [ \, (R_e + \Lambda_2 X_q) cos(\delta o - \alpha) - (X_e + \Lambda_1 X_q) sin(\delta o - \alpha)] \} =$$

$$= \frac{V_\infty}{\Delta} \frac{V_{tdo}}{V_{to}} X_q [ R_e \, sin(\delta o - \alpha) + (X_e + X'_d) cos(\delta o - \alpha)] -$$

$$- \frac{V_{tqo}}{V_{to}} X'_d \, [R_e \, cos(\delta o - \alpha) - (X_e + X_q) sin(\delta o - \alpha)]$$

Considerando a identidade anterior relativa à expressão do parâmetro $K_I$, e promovendo as devidas simplificações algébricas, vem que:

$$K_5 = K_I V_\infty \frac{V_{tqo}}{V_{to}} X'_d \, [R_e \, cos(\delta o - \alpha) - (X_e + X_q) sin(\delta o - \alpha)] -$$

$$- K_I V_\infty \frac{V_{tdo}}{V_{to}} X_q [ R_e \, sin(\delta o - \alpha) + (X_e + X'_d) cos(\delta o - \alpha)]$$

Ainda utilizando da equação 5.62, de modo semelhante ao caso anterior, obtém-se a expressão para o parâmetro $K_6$, já considerando as simplificações e adequações relativas ao enunciado da questão. Assim, tem-se que:

$$K_6 = \frac{V_{tqo}}{V_{to}} \{ 1 + \frac{X'd}{\Delta} [\Lambda_1 X_e + \Lambda_2 R_e + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) X_q ]\} -$$

$$- \frac{V_{tdo}}{V_{to}} \frac{X_q}{\Delta} (\Lambda_2 X_e - \Lambda_1 Re)] =$$

$$= \frac{V_{tqo}}{V_{to}} [1 - K_I X'd \, (X_e + X_q)] - K_I \frac{V_{tdo}}{V_{to}} X_q \; Re$$

---

## EXEMPLO 5.2

Calcular os parâmetros $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ do sistema elétrico formado pelo gerador síncrono cujos dados principais foram fornecidos no exemplo 4.13. Considerar que a ligação da máquina é promovida através de um transformador elevador cuja conexão se dá via sistema de transmissão conforme pode ser visto na figura 5.2. A reatância do transformador é de $X_{Tr} = 0{,}105\ pu$ e a impedância equivalente do sistema de transmissão até a barra infinita foi calculada a partir de um programa de curto-circuito e forneceu o valor de $Z_L = R_L + X_L = 0{,}0001 + j0{,}135\ pu$, valores referidos à base de $300\ MVA$. Sabe-se que não existem impedâncias *shunt* de compensação instaladas nesse sistema e que a fem da máquina síncrona era de $E_q = 1{,}025\ e^{j43{,}5^o}\ pu$, que a tensão na saída do transformador era de $V_t = 1{,}05\ e^{j0^o}\ pu$ e que a tensão na barra infinita era de $V_\infty = 1{,}0\ e^{-j5^o}\ pu$, todas na base de $16{,}5\ kV$.

Considerar que todos os parâmetros aqui envolvidos se encontram devidamente normalizados dentro de uma base de valores também já devidamente escolhida.

**Solução:**

Serão empregadas as mesmas expressões já desenvolvidas nesse capítulo, porém com algumas disposições mais adequadas a esse exemplo. Além disso, todas as variáveis de estado e todos os parâmetros envolvidos deverão ser considerados tal e qual como até aqui foram expressos.
Na figura 5.2, vêem-se a barra 1, representando a barra de saída da máquina logo após o transformador elevador, que é inerente a essa unidade de geração, e a barra 2, representando a barra infinita, e entre elas uma impedância que representa a parte relativa ao sistema de transmissão envolvido.
Foi dado do problema que um programa de curto-circuito específico para esse sistema elétrico fora rodado antes e que ele permitiu a obtenção do valor para a impedância equivalente entre a barra de saída desde o transformador elevador até a barra infinita, ou a barra assim denominada, inclusive com valores de módulo e ângulo. Pelo valor obtido será desprezada a parte relativa à resistência em função de seu baixo valor. Isso já era esperado de um sistema de grande porte como o presente sistema em questão.
Até aqui, tendo em conta as equações que fornecem os parâmetros $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$, equações 5.52, 5.37 e 5.62, considerando a ordem desses parâmetros, alguns dados iniciais deverão ser calculados antecipadamente, tais como as correntes $I_{do}$ e $I_{qo}$ e a tensão $E_{ao}$.

Primeiramente, já se podem admitir dois parâmetros, $\Lambda_1$ e $\Lambda_2$. Senão, veja-se.

Das equações 5.15 e 5.16, tem-se que:

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{R_{Lu}R_{su} + X_{Lu}X_{su}}{R_{su}^2 + X_{su}^2} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = \frac{R_{Lu}X_{su} - R_{su}X_{Lu}}{R_{su}^2 + X_{su}^2}$$

Como o presente sistema não admite qualquer tipo de impedância *shunt* do tipo compensação, $R_S = 0$ e $X_S = 0$, o que faz com que:

$$\Lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = 0$$

Também já se pode computar o valor do parâmetro $K_I$ que tem a seguinte expressão com a substituição dos valores do problema para $R_L = 0$:

$$K_I = \frac{1}{(X_q + X_{Tr} + X_L)(X'_d + X_{Tr} + X_L)} = \frac{1}{(0{,}882 + 0{,}105 + 0{,}135)(0{,}363 + 0{,}105 + 0{,}135)} = 1{,}478$$

Para o cômputo das correntes $I_{do}$ e $I_{qo}$, haverá a necessidade de se desenvolver um pequeno raciocínio de cálculo baseado na técnica dos fluxos de correntes nas barras de um sistema elétrico.

Sabe-se, da teoria de fluxo de carga, que a corrente elétrica que flui entre duas barras qualquer pode ser expressa em função das admitâncias envolvidas por essas barras.
Supondo-se o sistema mostrado na figura 5.2, pelo que foi exposto, já decompondo a corrente que flui da barra 1 para a barra 2, em seu valor rms ou eficaz, segundo os eixos $d$ e $q$ da transformação $d-q-0$, vem que:

$$I_{do} = Y_{11}V_t \sin(\theta_{11} + \alpha_t) + Y_{12}V_\infty \sin(\theta_{12} + \alpha_\infty)$$

e também que

$$I_{qo} = Y_{11}V_t \cos(\theta_{11} + \alpha_t) + Y_{12}V_\infty \cos(\theta_{12} + \alpha_\infty)$$

sendo $$I_1 = I_{qo} + jI_{do}$$

No presente exemplo, seguindo a descrição adotada no capítulo 4 para a representação de grandezas vetoriais, as admitâncias envolvidas podem ser assim descritas de maneira matemática:

$$\dot{Y}_{11} = |\dot{Y}_{11}|e^{j\theta_{11}} = \dot{y}_{10} + \dot{y}_{12} = Y_{11}(\cos\theta_{11} + j\sin\theta_{11})$$

$$\dot{Y}_{12} = \left|\dot{Y}_{12}\right| e^{j\theta_{12}} = -\dot{y}_{12} = Y_{12}\,(\cos\theta_{12} + j\sin\theta_{12})$$

onde, com base na figura 5.2:

$I_1$ : valor rms da corrente que flui da barra *1*

$Y_{11}$ : valor teórico da admitância própria da barra *1*

$Y_{12}$ : valor teórico da admitância mútua da barra *1* para a barra *2*

$\theta_{11}$ *:* ângulo refrente à admitância teórica $Y_{11}$

$\theta_{12}$ *:* ângulo refrente à admitância teórica $Y_{12}$

$V_1$ : valor rms da tensão da barra *1* (transformador elevador)

$V_2$ : valor rms da tensão da barra *2* (barra infinita)

$\alpha_t$ *:* ângulo da tensão $V_1$

$\alpha_\infty$ *:* ângulo da tensão $V_2$

$y_{12}$ : valor físico da admitância entre as barras *1* e *2*

$y_{10}$ : valor físico da admitância entre as barras *1* e a terra do sistema

Considerando os dados que foram fornecidos no enunciado do problema em questão, os seguintes valores podem ser então elencados:

$Y_{11} = 7{,}4\ pu$

$Y_{12} = 7{,}4\ pu$

$\theta_{11} = -90\ graus$

$\theta_{12} = 90\ graus$

$V_1 = 1{,}05\ pu$

$V_2 = 1{,}0\ pu$

$\alpha_t = 0$

$\alpha_\infty = \text{-}5\ graus$

$$y_{12} = \frac{1}{0{,}135} = 7{,}4\ pu$$

$$y_{10} = \frac{1}{\infty} = 0$$

As correntes $I_{do}$ e $I_{qo}$ podem, então, serem assim calculadas utilizando-se as expressões já descritas anteriormente. Deste modo, tem-se que:

$$I_{do} = 7{,}4\ x1{,}05\ x\sin(-90^o + 0) + 7{,}4\ x\ 1{,}0\ x\sin(90^o - 5^o) = -0{,}398$$

e também que

$$I_{do} = 7{,}4\ x1{,}05\ x\cos(-90^o + 0) + 7{,}4\ x\ 1{,}0\ x\cos(90^o - 5^o) = 0{,}645$$

A partir daqui, pode-se computar o valor da tensão $E_{ao}$. Por inspeção à figura 5.3, a seguinte expressão é obtida:

$$E_{ao} = E_{qo} - [X_d + X_{Tr} - (X_q + X_{Tr})]I_{do} =$$
$$= 1{,}3 - [1{,}246 + 0{,}105 - (0{,}882 + 0{,}105)]x(-0{,}398) = 1{,}443$$

As tensões $V_{td}$ e $V_{td}$ podem ser calculadas da seguinte forma:

$$V_{td} = -V_{to}\sin\delta_o = -1{,}0\ x\sin 43{,}49^o = -0{,}688\ pu$$

e

$$V_{tq} = V_{to}\cos\delta_o = -1{,}0\ x\cos 43{,}49^o = 0{,}7255\ pu$$

A partir daqui já se podem calcular os valores dos parâmetros $K_i$ , com $i = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$ .

1) <u>Parâmetro</u> $K_1$

$$K_1 = V_\infty K_I\{ Eao(X'd + X_{Tr} + X_L)\cos(\delta o - \alpha_\infty)] +$$
$$+ Iqo[Xq + X_{Tr} - (X'd + X_{Tr})](Xq + X_{Tr} + X_L)\sin(\delta o - \alpha_\infty)\} =$$
$$= V_\infty K_I\{ Eao(X'd + X_{Tr} + X_L)\cos(\delta o - \alpha_\infty)] +$$
$$+ Iqo(Xq - X'd)(Xq + X_{Tr} + X_L)\sin(\delta o - \alpha_\infty)\} =$$

$$= 1{,}0\ x1.478\ x[1{,}154\ x(0{,}363 + 0{,}105 + 0{,}135)\ x\cos(43{,}49 + 5) +$$
$$+ (0{,}646)x(0{,}882 - 0{,}363)x(0{,}882 + 0{,}105 + 0{,}135)x\sin(43{,}49 + 5)] = 1{,}098\ pu/rad$$

2) <u>Parâmetro</u> $K_2$

$$K_2 = K_I[(X_q + X_{Tr} + X_L)^2]I_{qo} = 1{,}478\ x[(0{,}882 + 0{,}105 + 0{,}135)^2](0{,}646) = 1{,}202\ pu/pu$$

3) <u>Parâmetro</u> $K_3$

$$K_3 = \frac{1}{1 + K_I\,[Xd + X_{Tr} - (X'd + X_{Tr})](X_L + X_q + X_{Tr})} = \frac{1}{1 + K_I\,(Xd - X'd)(X_L + X_q + X_{Tr})} =$$

$$= \frac{1}{1 + 1.478\,x(1{,}246 - 0{,}363)\,x(0{,}135 + 0{,}882 + 0{,}105)} = 0{,}405 \ pu/pu$$

4) Parâmetro $K_4$

$$K_4 = V_\infty K_I\,[Xq + X_{Tr} - (X'd + X_{Tr})](X_L + X_q + X_{Tr})\sin(\delta o - \alpha) =$$

$$= V_\infty K_I\,(X_d - X'd)(X_L + X_q + X_{Tr})\sin(\delta o - \alpha) =$$

$$= 1{,}0\,x1{,}478\,x(1{,}246 - 0{,}363)\,x(0{,}135 + 0{,}882 + 0{,}105)\,x\sin(43{,}49 + 5) = 1{,}096 \ pu/rad$$

5) Parâmetro $K_5$

$$K_5 = \frac{K_I V_\infty}{V_{to}}\{V_{tqo}(X'_d + X_{Tr})[-(X_L + X_q + X_{Tr})\sin(\delta o - \alpha_\infty)] -$$

$$-V_{tdo}(X_q + X_{Tr})[(X_L + X_{Tr} + X'_d)\cos(\delta o - \alpha_\infty)]\} =$$

$$= \frac{1{,}478\,x1{,}0}{1{,}05}\{0{,}725\,x(0{,}363 + 0{,}105)[-(0{,}135 + 0{,}882 + 0{,}105)\sin(43{,}49 + 5)] -$$

$$-(-0{,}688)\,x(0{,}882 + 0{,}105)\,x[(0{,}135 + 0{,}105 + 0{,}363)\cos(43{,}49 + 5))]\} = -0{,}020 \ pu/rad$$

6) Parâmetro $K_6$

$$K_6 = \frac{V_{tqo}}{V_{to}}[1 + \frac{(X'd + X_{Tr})}{\Delta}(X_L + X_q + X_{Tr})] =$$

$$= \frac{0{,}7255}{1{,}0}[1 - 1{,}478\,x(0{,}363 + 0{,}105)\,x(0{,}135 + 0{,}882 + 0{,}105)] = 0{,}162 \ pu/pu$$

**Nota 1:** portanto, o modelo linearizado em por unidade para esse SEP se resumirá no seguinte sistema de equações, levando-se em conta as equações 5.52, 5.38 e 5.62, nessa ordem, lembrando-se que em por unidade a variável de estado torque elétrico se confundirá com a variável de estado potência ativa elétrica:

$$\Delta p_e(S) = 1{,}097\,\Delta\delta(S) + 1{,}202\,\Delta Eq(S)$$

$$\Delta E_q(S) = \frac{0{,}405}{1 + 0{,}405 \frac{T'_{do}}{377} S} \Delta E_{FD}(S) - \frac{0{,}405 \, x 1{,}096}{1 + 0{,}405 \frac{T'_{do}}{377} S} \Delta\delta(S)$$

$$\Delta V_t(S) = -0{,}020 \, \Delta\delta(S) + 0{,}162 \Delta E_q(S)$$

**Nota 2:** observar que o parâmetro $T'_{do}$ aqui apresentado encontra-se em pu. O valor desse parâmetro será dado da seguinte forma tomando os resultados obtidos a partir do exemplo 4.13:

$$T'_{do} = \frac{L_F}{r_F} = \frac{0{,}708}{0{,}00046} = 1.539{,}13 \ \text{em pu}$$

ou então

$$T'_{do} = \frac{1.539{,}13}{377} = 4{,}08 \ s$$

---

## 5.3. Sistemas de Excitação de Máquinas Síncronas

Anteriormente, já se teve a oportunidade de estudar o sistema regulador de velocidade e potência responsável pelo controle da potência ativa gerada por uma turbina mecânica, uma máquina de fluxo. Do mesmo modo que no controle anterior, a potência reativa também necessita de comando sobre o sistema responsável pela excitação da máquina que controlará o fluxo magnético a ser utilizado no processo de transformação eletromagnética de energia.
Será analisado o comportamento elétrico da máquina síncrona, em especial o gerador síncrono, sob o controle do regulador automático de tensão.
Assim como ocorre com o regulador de velocidade, o regulador de tensão reúne também importantes funções além da própria regulação da tensão de saída da máquina. Para tal, pode-se dizer que o sistema de regulação de tensão, além da regulação em si, cumpre as funções de controlar os níveis da corrente de campo relativos aos limites térmicos do rotor, de controlar, do mesmo modo, os limites da corrente do estator, de manter em níveis suportáveis pelo equipamento ambas as correntes citadas, de controlar os limites de mínima excitação, de efetuar o controle suplementar ou secundário inerente à tensão de saída da máquina síncrona, de supervisionar, elétrica e magneticamente, fornecendo suporte para a proteção da máquina, além de outras intervenções pertinentes ao sistema e, em muitos casos, facilitando o acoplamento com dispositivos de sinais estabilizadores, os sinais estabilizantes também conhecidos como PSS, garantindo a estabilidade dinâmica operativa do SEP.
Além das funções básicas do sistema de regulação de tensão, existem outras funções intrínsecas relacionadas direta e indiretamente com o controle de

tensão que garantem e definem as faixas atuantes de todo o complexo regulador. O controle da cadeia de tensão-potência reativa acaba por interferir na relação máquina *versus* sistema elétrico interligado.
Através da filosofia de projeto adotada, os diferentes tipos de reguladores de tensão, seus ajustes, suas faixas de atuação, um tipo específico de controlador pode ser elaborado de modo a contornar os principais problemas de estabilidade que são normalmente verificados no processo de regulação automática de tensão. Um desses problemas tem a ver com o baixo amortecimento nos modos das oscilações de potência elétrica da área.
Portanto, numa primeira análise, pode-se perceber a importância do estudo da regulação de tensão no controle da potência reativa da máquina síncrona, garantindo uma faixa operativa estável durante o processo da operação interligada.
É evidente que tanto o regulador de velocidade quanto o regulador de tensão atuam juntos durante as operações normais de controle efetivo dentro da instalação elétrica. Além da diferença relativa aos processos sobre os quais ambos os sistemas reguladores atuam, existem aspectos intrínsecos relacionados com a característica de resposta de cada um dos sistemas, que delimitam o campo de atuação de cada um destes equipamentos lhes conferindo as características básicas de resposta tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência.
Os sistemas reguladores de velocidade respondem mais lentamente a uma determinada solicitação enquanto os reguladores de tensão costumam ser mais rápidos em suas respostas. Normalmente, o tempo de resposta de um regulador de velocidade se situa na faixa de $50$ até $300\,s$, conforme o caso, enquanto para um regulador de tensão este tempo encontra-se na faixa $1$ até $5\,s$. Não confundir este tempo com constante de tempo.
As restrições impostas aos ajustes dos principais parâmetros dos reguladores de tensão também ocupam um lugar importante dentro do quadro da estabilidade, principalmente quando se consegue a melhoria de um determinado item em detrimento de outro. Esse tipo característica acaba sendo um problema que pode ser notado em SEPs dotados de grupos reguladores automáticos.
Enfim, o tema do presente capítulo é vasto e indispensável ao complemento do estudo da regulação em geral. Através dele será possível a modelagem de sistemas de controle automático de regulação de tensão dentro do foco da análise e do estudo geral da estabilidade dos SEPs.

## 5.4. Análise Preliminar Acerca dos Reguladores de Tensão

Para uma primeira análise, deve-se considerar o esquema formado por um gerador síncrono acoplado a um barramento infinito através de uma linha de transmissão, conforme está mostrado na figura 5.2 anterior, desconsiderando-se a presença de qualquer impedância shunt.

Na figura 5.2, a potência ativa $p$, em valores rms, deliberada pelo gerador síncrono, é mantida constante e vale:

$$p = V_t I \cos\theta \qquad (5.65)$$

onde

$V_t$ : valor eficaz do vetor de tensão terminal

$I$ : valor eficaz do vetor de corrente de saída da máquina

$\theta$ : ângulo elétrico entre os vetores tensão de saída e corrente de saída

A equação básica de transferência de potência ativa da máquina para a barra terminal é dada pela equação 4.21, que está associada ao modelo de uma máquina síncrona de pólos salientes.
Considerando-se uma máquina síncrona de pólos lisos, no sentido de facilitar as operações algébricas, uma vez que o raciocínio é o mesmo, tem-se a seguinte equação:

$$p = \frac{EV_t}{X} \sin\delta \qquad (5.66)$$

onde

$E$ : valor eficaz do vetor fem da máquina

$X$ : soma das reatâncias da máquina e do transformador elevador

$\delta$ : ângulo elétrico entre os vetores fem e tensão de saída

**Nota:** a resistência do estator da máquina síncrona foi desprezada na presente análise.

Igualando as equações 5.65 e 5.66 tem-se que:

$$p = V_t\,(I\cos\theta) = V_t\,k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = I\cos\theta \qquad (5.67)$$

e

$$p = \frac{V_t}{X}(E\sin\delta) = \frac{V_t}{X}k_2 \rightarrow k_2 = E\sin\delta \qquad (5.68)$$

A representação na forma de diagrama fasorial das equações 5.67 e 5.68 pode ser vista na figura 5.5.

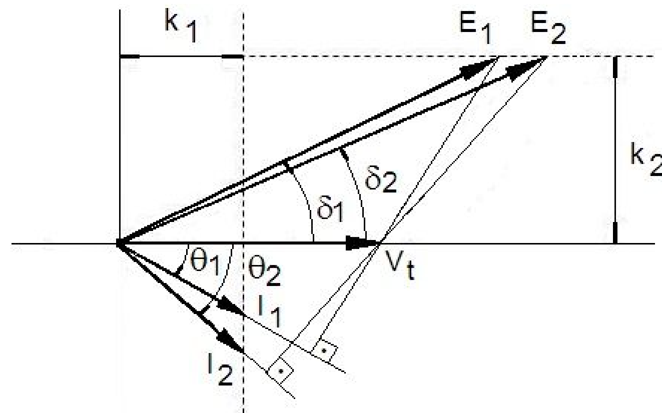



***Figura 5.5 – Diagrama Fasorial das Tensões da Máquina Síncrona***

Para que as grandezas $p$ e $V_t$ sejam constantes, torna-se necessário que os parâmetros $k_1$ e $k_2$ também o sejam.

O controle da tensão $E$, que se encontra sob duas condições na figura 5.5, $E_1$ e $E_2$, representa, como se sabe, o próprio controle da excitação da máquina.

Pela figura 5.5 observa-se que, partindo da pré-condição de regulador de velocidade limitado, um acréscimo na excitação da máquina corresponderá a um decréscimo no ângulo $\delta$ da fem e um acréscimo no fator de potência.

Conclui-se também que o controle da tensão, que é feito através da correção da excitação da máquina, implica no controle da fem gerada.

Na realidade, uma operação do tipo analisado somente existe teoricamente uma vez que a potência também sofre um decréscimo pela perda de rendimento a que a máquina síncrona fica sujeita pelo fato do acréscimo no fator de potência.

Até aqui, o regulador de tensão foi visto em nível de instalação não se preocupando com o seu posicionamento em nível do sistema de potência ou qualquer outra condição semelhante.

Para a representação sistemática, necessita-se, primeiramente, da definição do modelo representativo da parte elétrica da máquina síncrona, assunto que já foi abordado.

A presença de um regulador de tensão automático dentro de um diagrama em blocos representativo da máquina síncrona acoplada, por exemplo, a uma barra infinita seria algo como o que se encontra no bloco da figura 5.6.

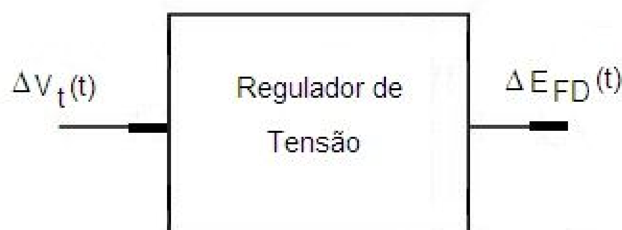


*Figura 5.6 – Bloco Representativo do Regulador de Tensão*

A equação 4.193, onde se tem $\sqrt{3}E_{fd} = \omega K M_F i_F = \omega K M_F \frac{V_F}{r_F}$, mostra que é possível atuar na excitação da máquina síncrona através do controle da tensão do campo de maneira automática ou manual considerando-se a condição de regime permanente.

O bloco da figura 5.6 se trata de uma representação simplista do sistema de excitação representado na figura 5.7.

O sistema de excitação aqui representado nada mais é que um tipo específico de excitação composto de um gerador de CC, auto-excitado, conhecido como acoplamento *shunt* por apresentar a ligação do campo em paralelo com a armadura da máquina. Na armadura estão dispostos os anéis coletores através dos quais a retificação do sinal da tensão de saída do gerador CC é promovida. Esse sistema em CC alimenta o campo da máquina síncrona principal de modo a manter um nível de tensão CC responsável pela criação do fluxo magnético a ser utilizado no processo de conversão eletromecânica da energia fornecida pela fonte mecânica primária. Trata-se do princípio básico da geração da energia elétrica que será entregue ao sistema interligado.

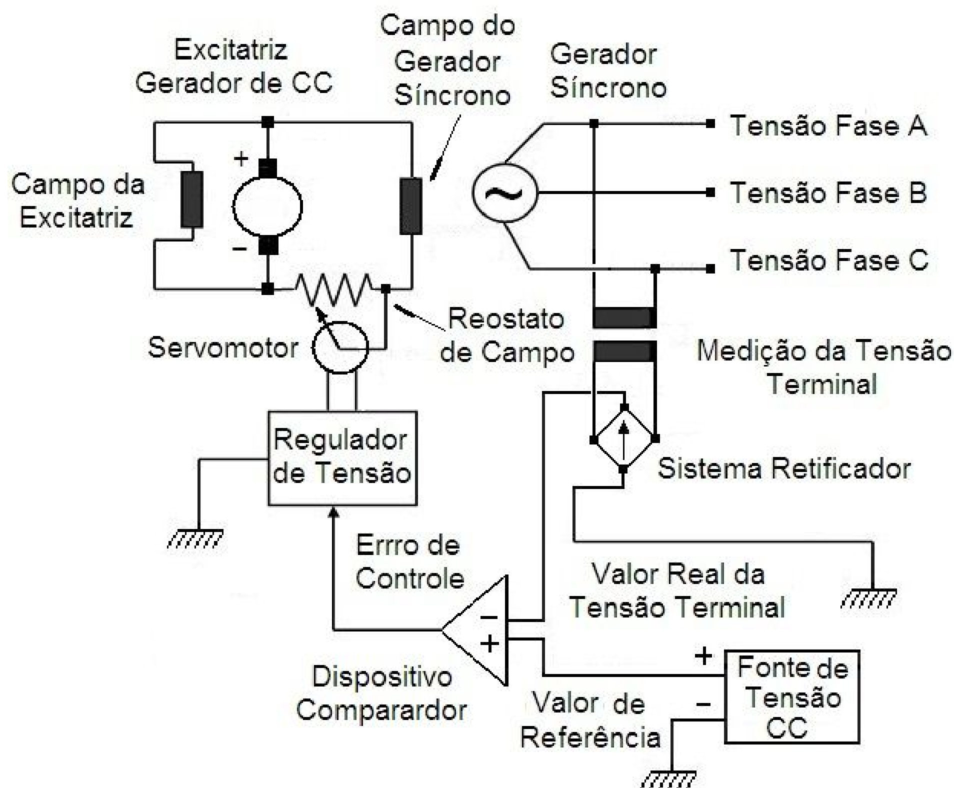



*Figura 5.7 – Esquema de um Regulador Automático de Tensão*

## 5.5. Tipos de Reguladores de Tensão

Existe uma variedade bastante grande de tipos e filosofias de construção e projeto para reguladores de tensão aplicados a máquinas síncronas.
A variação aparece desde o aspecto construtivo até mesmo na filosofia do projeto de controle onde se procura, a cada inovação, reduzir ao máximo o tempo de resposta deste sistema de comando e supervisão.

Numa classificação bem simplista, os reguladores de tensão podem ser do tipo:

a) com controle reostático simples ou automatizado;
b) estático utilizando amplificação magnética;
c) estático utilizando a retificação por diodo;
d) estático utilizando a retificação por tiristores.

Quanto aos sistemas de alimentação, estes se classificam em:

a) com excitatrizes piloto e principal;
b) com apenas excitatriz principal;
c) com excitação direta do gerador.

Além destas classificações anteriores, existem outras classificações bem mais rigorosas como as que foram apresentadas pelo IEEE no *IEEE Transactions – VOL. PAS. 87 – 1968*, onde quatro tipos de diagramas de blocos para reguladores de tensão que, dependendo do modelo, podem ser aproximados com boa margem de precisão.
Evidentemente que na maioria dos casos o modelo teórico não é suficiente, porém, nestas situações, devem-se promover analogias. Mesmo assim, o correto é partir para o levantamento de campo, esse é o procedimento mais adequado e confiável. Os diagramas teóricos são apenas didáticos, eles não servem para a representação real de uma planta, e quando utilizados de maneira indiscriminada podem até levar o analista a conclusões infundadas.

## 5.6. Efeito dos Reguladores de Tensão sobre o Comportamento dos Sistemas Elétricos em Termos de Estabilidade

### 5.6.1. Comportamento da Máquina Síncrona Acoplada a um Sistema

Seja considerar o diagrama em blocos no plano complexo de Laplace apresentado na figura 5.5, representativo do modelo linearizado da máquina síncrona contra o barramento infinito em por unidade numa base de valores previamente escolhida. Seja, também, considerar nula a variação da excitação $\Delta E_q$. O que se obtém é um diagrama em blocos mais simplificado tendo presente o coeficiente de amortecimento da carga $D$, conforme está mostrado na figura 5.8.

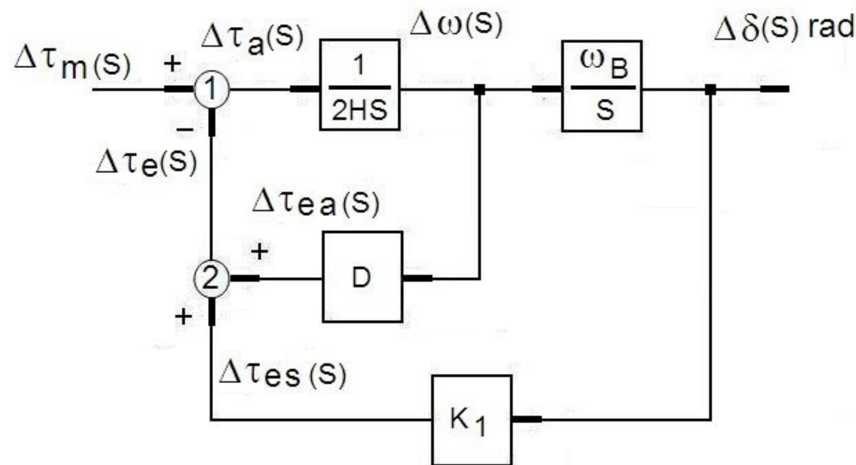



***Figura 5.8 – Diagrama Simplificado de uma Área de Geração em pu***

Na figura 5.8 considerar a seguinte legenda:

$\Delta\tau_m$ : variação do torque mecânico da turbina em pu

$\Delta\tau_a$ : variação do torque acelerante sobre o conjunto em pu

$\Delta\tau_{ea}$ : variação do torque elétrico amortecedor em pu

$\Delta\tau_{es}$ : variação do torque elétrico de sincronismo em pu

$S$ : operador complexo de Laplace

O parâmetro $D$, conhecido como coeficiente de amortecimento, de uma maneira mais geral, engloba os efeitos amortecedores tanto da carga elétrica quanto os efeitos amortecedores ligados à parte hidromecânica do conjunto girante. São os resultados de ações provenientes da auto-regulação referente à própria turbina e às cargas elétricas acopladas ao conjunto.

Para o somador 1, obtém-se a seguinte soma:

$$\Delta\tau_m(S) = \Delta\tau_a(S) + D\,\Delta\omega(S) + K_1\,\Delta\delta(S) \quad \text{em pu} \qquad (5.69)$$

A partir do diagrama da figura 5.8, considerando-se as expressões para o torque acelerante e para a freqüência elétrica, vem que:

$$\Delta\tau_a(S) = \frac{2H}{\omega_B} S^2 \Delta\delta(S) \quad \text{em pu} \qquad (5.70)$$

e também

$$\Delta\omega(S) = \frac{S}{\omega B} \Delta\delta(S) \quad \text{em pu} \qquad (5.71)$$

Substituindo-se os valores obtidos nas equações 5.70 e 5.71 na equação 5.69, e separando convenientemente, obtém-se a seguinte função de transferência no plano complexo:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta\tau_m(S)} = \frac{\frac{\omega_B}{2H}}{S^2 + \frac{D}{2H}S + \frac{K_1\omega_B}{2H}} = \frac{1}{K_1}\left(\frac{\frac{K_1\omega_B}{2H}}{S^2 + \frac{D}{2H}S + \frac{K_1\omega_B}{2H}}\right) \text{ em rad/pu} \qquad (5.72)$$

Como o denominador da equação 5.72 é de segunda ordem na variável $S$ de Laplace, conclui-se, considerando a função de transferência padrão para um sistema clássico de segunda ordem do tipo visto no capítulo 2, que a freqüência natural não amortecida do sistema será dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1\omega_B}{2H}} \text{ em rad/s} \qquad (5.73)$$

e que o coeficiente de amortecimento da resposta no domínio do tempo será dado por:

$$\xi = \frac{D}{2\sqrt{2H K_1 \omega_B}} \text{ s/d} \qquad (5.74)$$

A partir da teoria do controle clássico, extraem-se as seguintes relações sobre as quais se aplicará toda análise da estabilidade.
A função de transferência obtida na equação 5.72 apresenta dois pólos que, se supostos serem complexos conjugados, como se mostram na prática, permitem que se escreva:

$$S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad (5.75)$$

A resposta do sistema, no domínio do tempo, a uma função tipo degrau na variável torque mecânico $\Delta\tau_m(S)$ será:

$$\Delta\delta(t) = \frac{1}{K_1}\left[1 - \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \varphi)\right] \text{ em rad} \qquad (5.76)$$

onde

$T = \dfrac{1}{\xi\omega_n}$ → constante de tempo de resposta do sistema em s

e

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ → freqüência natural amortecida em rad/s

e

$\varphi = arc\ cos(\xi)$ → defasagem em rad onde $\xi \le 1$

Para que a condição geral de estabilidade seja obedecida, ambas as raízes solução da equação diferencial, na transformada complexa de Laplace do denominador da equação 5.72, não devem admitir parte real positiva, pois se assim o for, observando-se pela equação 5.76, a exponencial $e^{t/T}$ tenderia para valores infinitos, o que acaba caracterizando a presença de instabilidade.
Voltando para a análise no nível dos parâmetros do sistema, nota-se que o grau de amortecimento das oscilações depende diretamente do parâmetro $D$ e que a freqüência natural amortecida depende não só do parâmetro $K_1$ como também do coeficiente de amortecimento $\xi$, vide equações 5.73 e 5.74.
A partir do que foi visto, podem-se atacar os problemas mais comuns que afetam a estabilidade de um SEP.
Para que a confiabilidade da operação de um determinado sistema de potência esteja num grau considerado ótimo, quando não, muito bom, é necessário que certos agentes de proteção deste sistema operem numa condição restauradora através da qual, num afastamento momentâneo da posição inicial de equilíbrio, a que fique sujeito o sistema, o retorno à estabilização seja rápido e normal sem que ocorram fenômenos adversos.
Esses agentes de proteção são os chamados torques amortecedores, grandezas que atuam em fase com a freqüência elétrica.
Existem certos tipos de carregamento em determinados sistemas cujo comportamento da resposta a certas solicitações pode provocar a inversão do sinal do torque amortecedor colocando em risco a confiabilidade operativa destes sistemas. Eles caracterizam aqueles sistemas dotados de baixo amortecimento nas respostas transitórias.

Portanto, em termos de equacionamento, o torque elétrico de um determinado sistema pode ser decomposto segundo a seguinte equação:

$$\Delta\tau_e(S) = \Delta\tau_{es}(S) + j\,\Delta\tau_{ea}(S) \quad \text{em pu} \qquad (5.77)$$

**Nota:** observar que o torque elétrico $\Delta\tau_e(s)$ é uma função fasorial e na equação 5.77 foi decomposto segundo um sistema particular cuja referência é o fasor $\Delta\delta(S)$. Com isso fica possível estudar as características das componentes do torque elétrico, aquelas que se encontram em fase com a freqüência e aquelas que se encontram em fase com o ângulo de potência.

A partir da equação 5.52, tem-se que o torque elétrico desenvolvido pela máquina síncrona pode ser dado pela equação seguinte:

$$\Delta\tau_e(S) = K_1\,\Delta\delta(S) + K_2\,\Delta Eq(S) \quad \text{em pu}$$

Trazendo-se na equação anterior, do torque elétrico, a expressão da tensão de excitação, da equação 5.38, tem-se que:

$$\Delta\tau_e(S) = K_1\,\Delta\delta(S) + K_2\,[\frac{K_3}{1+K_3 T'_{do}S}\,\Delta E_{FD}(S) - \frac{K_3K_4}{1+K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B}S}\,\Delta\delta(S)] \quad \text{em pu}$$

Assim, obtém-se que:

$$\Delta\tau_e(S) = K_1\,\Delta\delta(S) - \frac{K_2K_3K_4}{1+K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B}S}\,\Delta\delta(S) + \frac{K_2K_3}{1+K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B}S}\,\Delta E_{FD}(S) \quad \text{em pu} \tag{5.78}$$

Considerando nula a variação da tensão de campo, $\Delta E_{FD} = 0$, a equação anterior toma a seguinte forma, mais simplificada:

$$\Delta\tau_e(S) = K_1\,\Delta\delta(S) - \frac{K_2K_3K_4}{1+K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B}S}\,\Delta\delta(S) \quad \text{em pu} \tag{5.79}$$

Usando-se de um artifício matemático de multiplicar a segunda parcela do segundo membro da equação anterior pelo conjugado da expressão do denominador vem que:

$$\Delta\tau_e(S) = K_1\,\Delta\delta(S) - \frac{K_2K_3K_4}{1-(K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B})^2 S^2}\,(1-K_3\frac{T'_{do}}{\omega_B}S)\,\Delta\delta(S) \quad \text{em pu}$$

Para a equação anterior, levando-se em conta as seguintes considerações:

$$S = j\omega$$
$$S^2 = -\omega^2$$

vem que:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - \frac{K_2K_3K_4}{1+(K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B})^2\,\omega^2} + j\,\frac{K_2(K_3)^2K_4\dfrac{T'_{do}}{\omega_B}\,\omega}{1+(K_3\dfrac{T'_{do}}{\omega_B})^2\,\omega^2} \quad \text{em pu} \tag{5.80}$$

Se os parâmetros referentes ao modelo linearizado adotado forem todos positivos, pode-se observar que o segundo membro da equação 5.80 apresentará uma componente positiva de torque amortecedor, porém a componente de torque sincronizante poderá assumir valores negativos, o que identifica um possível problema para a operação estável do sistema de controle, principalmente durante determinadas ocorrências. Não é interessante que torques sincronizantes e amortecedores assumam valores negativos.
Em regime permanente, a equação do torque elétrico, como função do ângulo de potência, apresentará apenas uma componente sincronizante, como está mostrado na equação seguinte:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - K_2K_3K_4 \quad \text{em pu} \qquad (5.81)$$

Nas baixas freqüências, a equação 5.80 tomará o aspecto seguinte:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - K_2K_3K_4 + jK_2(K_3)^2K_4\frac{T'do}{\omega B}\omega \quad \text{em pu} \qquad (5.82)$$

Para as altas freqüências, a equação 5.80 tomará um novo aspecto:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - \frac{K_2K_4}{K_3\left(\frac{T'do}{\omega_B}\right)^2\omega^2} + j\frac{K_2K_4}{\frac{T'do}{\omega_B}\omega} \quad \text{em pu} \qquad (5.83)$$

Portanto, pode-se concluir que a introdução da malha relativa à parte elétrica da máquina síncrona, onde o regulador de tensão deverá ser acoplado, influenciará, decisivamente, no desempenho do sistema uma vez que poderá haver redução do torque sincronizante fato este que pôde ser confirmado pelas deduções anteriores.
Assim, a otimização entre regulador de tensão e sistema deverá ser tal que os efeitos restauradores como, por exemplo, a presença de torques amortecedores positivos e torques sincronizantes também positivos, sejam mantidos.
Para o sistema em estudo, a condição básica de estabilidade é definida pela inequação seguinte:

$$K_1 - K_2K_3K_4 > 0 \quad \text{em pu}$$

sendo $K_i > 0 \quad i = 1,2,3,4$

**Nota:** durante as análises acerca da estabilidade do sistema elétrico, foi adotado o modelo linearizado de máquina síncrona contra a barra infinita mostrado na figura 5.4 onde aparecem as constantes $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ . Prova-se que esses parâmetros, em função do carregamento a que a máquina síncrona esteja sujeita, não assumem valores negativos, a exceção do parâmetro $K_5$ que, sob certos aspectos do carregamento, pode assumir valores negativos como ficou demostrado no exemplo 5.2.

---

## EXEMPLO 5.3

Considerando-se o exemplo 5.2, verificar a condição $K_1 - K_2 K_3 K_4 > 0$ de estabilidade a partir dos valores que foram computados para esses parâmetros.

**Solução:**

Os parâmetros $K_i > 0 \quad i = 1,2,3,4$ foram computados e seus valores são os seguintes:

$K_1 = 1,098$ pu/rad

$K_2 = 1,202$ pu/pu

$K_3 = 0,405$ pu/pu

$K_4 = 1,096$ pu/rad

Assim, tem-se que:

$K_1 - K_2 K_3 K_4 = 1,098 - (1,202 \, x \, 0,405 \, x 1,096) = 0,564$ pu/rad

Portanto, a inequação $K_1 - K_2 K_3 K_4 > 0$ em pu foi respeitada o que comprova a condição de estabilidade do sistema em questão.

---

## 5.6.2. Equacionamento Básico para os Sistemas de Excitação e Controle de Tensão por Reguladores Automáticos

### 5.6.2.1. Sistemas de Excitação com Excitatrizes Rotativas

Supondo um sistema de excitação composto por uma excitatriz piloto, uma máquina de CC autoexcitada, uma excitatriz principal, também uma máquina de CC de excitação independente e o gerador síncrono, por exemplo, assim como é mostrado na figura 5.9, tem-se o seguinte esquema:

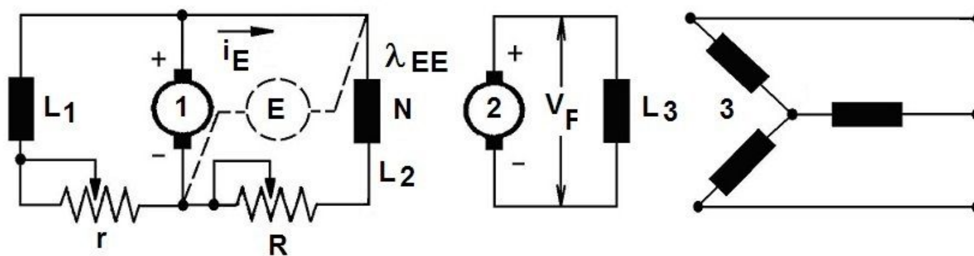



***Figura 5.9 – Sistema de Excitação com Excitatrizes Independentes***

Na figura 5.9, considerar a seguinte legenda:

$L_1$ : campo da excitatriz 1

$L_2$ : campo da excitatriz 2

$L_3$ : campo da máquina síncrona 3

*1* : excitatriz piloto, gerador de corrente contínua

*2* : excitatriz principal, gerador de corrente contínua

*3* : estator da máquina síncrona

$N$ : número de espiras do campo da excitatriz principal

$r$ : resistência de controle da excitação piloto

$R$ : resistência de controle da excitação principal

$i_E$ : corrente de excitação piloto

$\lambda_{EE}$ : fluxo total enlaçado pelo campo da excitatriz principal

As equações relacionadas com a figura 5.9, no domínio do tempo, são as seguintes, seguindo o raciocínio proposto na referência 7:

$$\dot{\lambda}_{EE} + R\, i_E = E \qquad (5.84)$$

$$v_F = K\phi_E \tag{5.85}$$

$$\phi_E = \phi_{EE} - \phi_{Ed} \tag{5.86}$$

onde

$K$ : constante de proporcionalidade

$\phi_E$ : fluxo útil no campo da excitatriz principal

$\phi_{Ed}$ : fluxo de dispersão no campo da excitatriz principal

$\phi_{EE}$ : fluxo total no entreferro da excitatriz principal

A constante $K$ é intrínseca ao projeto da excitatriz principal e pode ser obtida da seguinte relação:

$$K = \frac{Z\,n\,Pólos}{120\,a} \tag{5.87}$$

onde

$Z$ : número de condutores na armadura

$n$ : velocidade de rotação em rpm

$Pólos$ : número total de pólos

$a$ : número de passos paralelos na armadura

O fluxo de dispersão pode ser dado por:

$$\phi_{Ed} = C\phi_E \tag{5.88}$$

onde:

$C$: é uma constante porcentual para o fluxo de dispersão

Levando o valor de $\phi_{Ed}$, da equação 5.88, na equação 5.86 extrai-se a seguinte relação:

$$\phi_{EE} = (1+C)\phi_E \quad \therefore \quad \phi_{EE} = \sigma\phi_E \tag{5.89}$$

A relação da equação 5.89 é bem cômoda, pois liga as magnitudes dos fluxos total e útil que atravessam o entreferro da excitatriz principal.

Levando o valor do fluxo $\phi_E$, da equação 5.89, na equação 5.85, tem-se que:

$$v_F = \frac{K\phi_{EE}}{\sigma} \quad \therefore \quad \phi_{EE} = \frac{\sigma v_F}{K} \quad \therefore \quad \lambda_{EE} = \frac{N\sigma v_F}{K} \qquad (5.90)$$

Levando a expressão do fluxo $\lambda_{EE}$, da equação 5.90, na equação 5.84 tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{N\sigma}{K}\dot{v}_F + R i_E = E \qquad (5.91)$$

Utilizando da teoria das variáveis diferença, sabe-se que:

$$E = \Delta E + Eo \qquad (5.92)$$

$$v_F = \Delta v_F + v_{Fo} \quad \therefore \quad \dot{v}_F = \Delta\dot{v}_F \qquad (5.93)$$

$$i_E = \Delta i_E + i_{Eo} \quad \therefore \quad \dot{i}_E = \Delta\dot{i}_E \qquad (5.94)$$

onde

$E_o$ : tensão da excitatriz piloto referente à corrente $i_{Eo}$

$i_{Eo}$ : corrente da excitatriz principal referente à tensão $V_{Fo}$

$V_{Fo}$ : a tensão no campo da máquina síncrona referente às condições nominais em vazio considerando - se a linha de entreferro

Substituindo as expressões de $E$, $v_F$, $\dot{v}_F$, $i_E$, e $\dot{v}_E$, das equações 5.92, 5.93 e 5.94, na equação 5.91, obtém-se:

$$\frac{N\sigma}{K}\Delta\dot{v}_F + R\,\Delta i_E = \Delta E \qquad (5.95)$$

onde, em regime permanente, tem-se que $R\,i_{Eo} = E_o$ .

Deste modo, a equação 5.91 toma o aspecto seguinte:

$$\frac{N\sigma}{K}\Delta\dot{v}_F + R\,\Delta i_E = \Delta E \qquad (5.96)$$

Considerando, agora, a relação da tensão na linha do entreferro de saída da excitatriz principal, $v_F$, como uma função linear da corrente de campo da excitatriz piloto, $i_E$, onde $K_F$ é uma constante de proporcionalidade, pode-se escreve quer:

$$\Delta i_E = K_F\, \Delta v_F \quad \therefore \quad \Delta \dot{i}_E = K_F\, \Delta \dot{v}_F \tag{5.97}$$

Substituindo as expressões de $\Delta i_E$ e $\Delta \dot{i}_E$, da equação 4.33, na equação 5.96, obtém-se que:

$$\frac{N\sigma}{K}\Delta \dot{v}_F + R\, K_F\, \Delta v_F = \Delta E \tag{5.98}$$

Passando-se a equação 5.98 para o domínio da transformada de Laplace vem:

$$\frac{N\sigma}{K} S\, \Delta v_F(S) + R\, K_F\, \Delta v_F(S) = \Delta E(S) \tag{5.99}$$

onde $S$ é a variável complexa da transformada de Laplace

A equação 5.99, numa forma mais compacta, pode ser escrita como seguinte:

$$T_e\, S\, \Delta v_F(S) + R\, K_F\, \Delta v_F(S) = \Delta E(S)$$

A equação anterior pode ser transformada no seguinte tipo:

$$\Delta v_F(S) = \frac{1}{T_e\, S}\Delta E(S) - \frac{R\, K_F}{T_e\, S}\Delta v_F(S) \tag{5.100}$$

onde $Te = \dfrac{N\sigma}{K}$

A equação 5.100 pode ser representada sob a forma de diagrama em blocos como se encontra mostrado na figura 5.10 que apresenta uma característica de não linearidade. Nesta figura, o valor da resistência $R$ de controle é variável em função do valor assumido pela tensão terminal de saída ou da corrente de excitação da máquina síncrona, ambas as condições pedem ser admitidas.

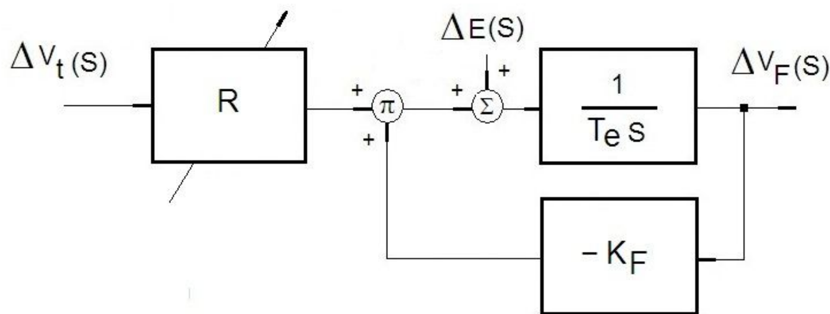



***Figura 5.10 – Diagrama em Blocos do Sistema de Excitação da Equação 5.100 Não Linear***

O modelo mostrado na figura 5.10 não tem a característica linear de modo que para se conseguir a linearização dessa modelagem deve-se utilizar do artifício apresentado a seguir.
Nesse modelo passa a existir o produtório $R\,K_F$ que é função da constante $K_F$ de valor fixo e do resistor R que dependerá de um valor da tensão terminal da máquina síncrona.
Considerando um valor fixo para $R$ e trabalhando no somador, obtém-se o diagrama mostrado na figura 5.11.

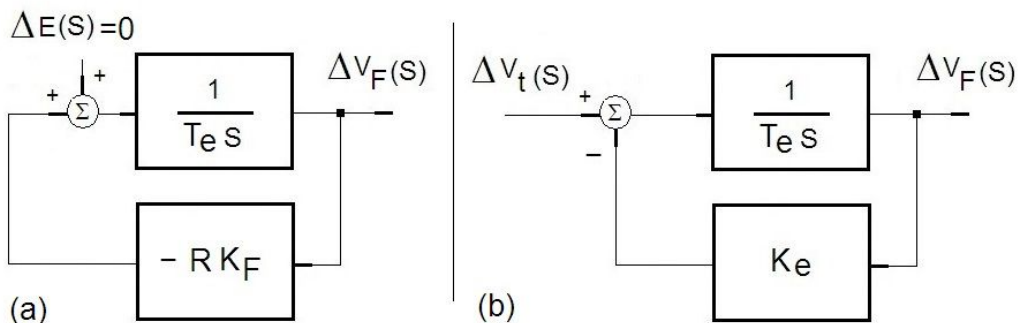



***Figura 5.11 – Diagrama em Blocos do Sistema de Excitação da Equação 5.100 Linearizado***

Na figura 5.11(a), a variável $\Delta E$ foi, inicialmente, considerada nula uma vez que este valor é fixado, teoricamente, por intermédio do valor de resistência $r$; ver figura 5.9.
Caso o valor $R$ seja mantido fixo, para um determinado valor da tensão terminal, é fácil notar que será possível fazer com que o controle da tensão terminal da máquina síncrona seja agora promovido através do valor da resistência $r$ o que será efetivado ou por um controlador manual ou por um dispositivo de controle automático.

**Nota:** o arranjo mostrado nas figuras 5.10 e 5.11 é o que se verifica na prática. Como se sabe, a regulação automática de tensão não ocorre em toda a

extensão da excursão do sinal de tensão terminal da máquina síncrona. Não importa se o sistema de excitação seja do tipo que utiliza de excitatrizes rotativas ou mesmo dos modernos SCRs, de qualquer forma, a faixa de regulação automática, geralmente, se dará entre *90* e *110%* da tensão terminal nominal ou próximo desta faixa. Isso quer dizer que acima dessa faixa algum tipo proteção associada à sobretensão irá provocar TRIP com o desligamento da máquina e que abaixo dessa faixa outro tipo de proteção, que seja de subtensão, por exemplo, irá atuar. Convém lembrar que normalmente a faixa que antecede à entrada da regulação automática se dá entre *0* e *90%* da tensão terminal nominal da máquina síncrona, um período pertencente à chamada seqüência de partida com o fechamento do disjuntor de campo, a entrada da excitação externa de partida e o comando de ligamento do regulador automático. Considerando o modelo apresentado na figura 5.10, o resistor $R$ será o chamado resistor que controlará a corrente de excitação da máquina síncrona através do qual será possível levar a tensão terminal da máquina para um valor próximo da faixa de automatismo. Nesse ponto, o valor de $R$ não mais se modificará. A partir de então, a ação do resistor $r$ é que permitirá o controle da tensão terminal. Na prática, diz-se que o resistor $R$ representa o ajuste grosso enquanto que o resistor $r$ representa o ajuste fino. O regulador automático de tensão deve atuar sobre a excitação através da variação da resistência $r$ de ajuste fino.

A função de transferência do sistema de excitação referente à figura 5.11 será a seguinte:

$$\frac{\Delta V_F(S)}{\Delta V_t(S)} = \frac{1}{T_e S + K_e} \qquad (5.101)$$

Caso se queira normalizar a relação da equação 5.101 em termos de por unidade, dentro de uma base de valores previamente escolhida, a equação de transferência tomará o aspecto seguinte:

$$\frac{\Delta V_F(S)}{\Delta V_t(S)} = K'_e \frac{1}{T'_e S + 1} \quad \text{em pu} \qquad (5.102)$$

onde $K'_e = \dfrac{V_{TO}}{K_e\, V_{FO}}$ e $T'_e = \dfrac{T_e}{K_e}$ em s

sendo

$V_{to}$ : valor eficaz da tensão terminal nominal

$V_{Fo}$ : valor da tensão de campo associada à tensão terminal nominal

Normalmente, o sistema de excitação apresentado na figura 5.9, em termos de máquinas síncronas, é aquele que pode retratar o processo de excitação de

uma maneira bem didática, daí a razão de sua escolha para as primeiras explicações.
Muitas vezes, por imposição do projeto, a necessidade de utilização de um sistema controlador apresentando um elevado ganho de canal direto, com valores de constantes de tempo ajustáveis, maior flexibilidade no controle suplementar e utilização de malhas de estabilização e malhas de limitadores específicos, acaba por definir um verdadeiro aparato que passa a constituir o conhecido sistema de excitação da máquina síncrona, designação mais comum adotada tanto por fabricantes quanto por clientes usuários. Inclui-se aí a parte de potência que pode ser representada por um conjunto de excitatrizes, situação verificada em sistemas mais antigos datados de antes de 1970, ou então por um conjunto formado pelo transformador de excitação e ponte de tiristores, esta última constituída de elementos do tipo SCRs, situação verificada nos equipamentos mais modernos.
Aos sistemas atuais de excitação, além das principais funções de controle, incorporam-se, também, as funções de proteção da máquina contra possíveis efeitos de subexcitação, de sobrexcitação, de proteção tensão-freqüência, também conhecida por proteção Volts/Hertz, além da introdução de malhas especiais de estabilização bastante difundidas e conhecidas como sinais estabilizantes ou simplesmente PSSs.

Por conveniência, a partir daqui, a constante de tempo $T_e$ será designada por constante de tempo da excitatriz enquanto que a constante $K_e$ representará o ganho geral do circuito do sistema de excitação. Já tendo em mente a aplicação de um controlador automático, a constante de tempo $T_V$ e o ganho $K_V$ serão os parâmetros do regulador de tensão envolvido no processo de controle.
Como o interesse principal residirá, especialmente, nas análises relativas à malha de regulação de tensão, as variações do ângulo de potência $\Delta\delta$ serão desconsideradas para essa situação. Esta condição não equivale a dizer que as análises corresponderão às condições de máquina síncrona operando em vazio e desinterligada do sistema elétrico. Para tal condição, os parâmetros $K_i$ com $i = 1,2,3,4$ deverão ser recalculados para esse fim.
Deste modo, a seguinte função de transferência, no plano complexo de Laplace, será adotada para a malha de regulação de tensão da máquina síncrona, já considerando-se a presença de um regulador de tensão de um tipo bem conhecido:

$$\frac{\Delta V_F(S)}{\Delta V_t(S)} = \frac{K_V}{(T_V S + 1)} \frac{K_e}{(T_e S + 1)} \quad \text{em pu} \qquad (5.103)$$

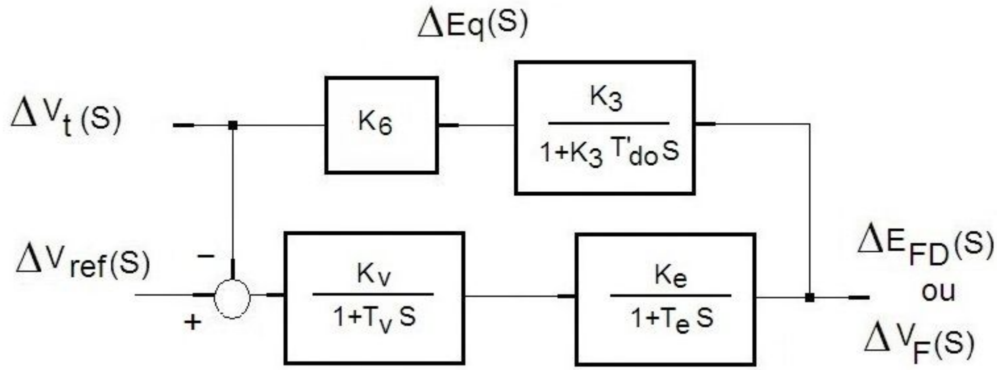



***Figura 5.12 – Diagrama em Blocos do Sistema Automático de Excitação com $\Delta\delta(S)=0$***

Na figura 5.12 é apresentada a malha completa relativa a um sistema de excitação típico, dotado de um regulador automático de tensão, onde o parâmetro *T'do* já se encontra dado em segundos. Notar que o sinal menos da realimentação encontra-se associado ao ganho negativo do regulador de tensão.

A função de transferência de malha fechada $\dfrac{\Delta V_t(S)}{\Delta V_{ref}(S)}$ do sistema, considerando-se a figura 5.12, será dada pela seguinte equação:

$$\frac{\Delta V_t(S)}{\Delta Vref(S)} = \frac{K_v K_e K_3 K_6}{K_v K_e K_3 K_6 + (1+T_v\, S)\,(1+T_e\, S)\left(1+K_3\, T'_{do}\, S\right)} = \tag{5.104}$$

$$= \frac{K_v K_e K_3 K_6}{K_v K_e K_3 K_6 + 1 + (T_e + K_3 T'_{do})S + T_e K_3 T'_{do} S^2}$$

Considerando os parâmetros já computados para o exemplo 5.2, e assumindo os seguintes valores bem aproximados com aquilo que se pode ver na prática para equipamentos de porte semelhante, quando $T_e = 0{,}5\,s$, variando-se a faixa de ajustes de parâmetro $K_e$ é possível perceber a influencia dessa variação no comportamento da resposta da tensão terminal da máquina síncrona.

A figura 5.13 mostra a resposta da máquina síncrona, em termos de tensão terminal, a uma variação do sinal de comando na referência do regulador de tensão na forma de um degrau correspondente a *0,12 pu* para apenas três valores do ganho $K_v$.

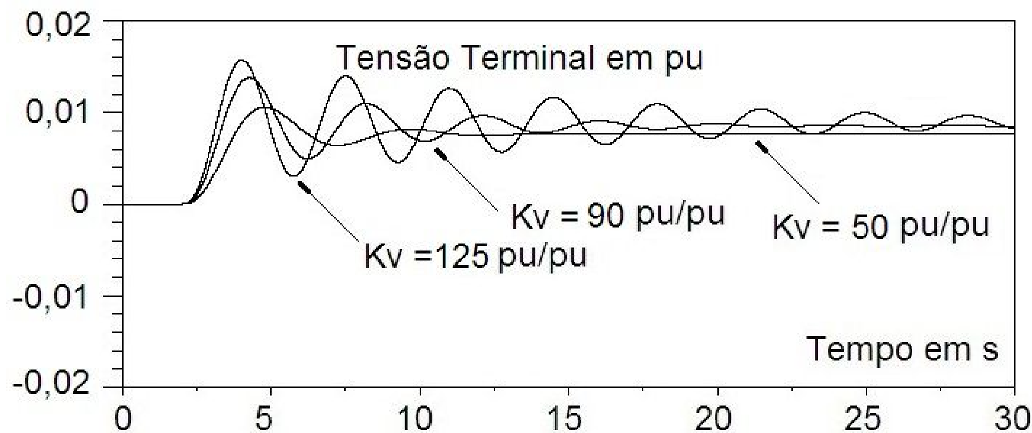



***Figura 5.13 – Resposta ao Degrau na Referência do Regulador de Tensão do Diagrama em Blocos da Figura 5.12 sem Realimentação Transitória para*** $T_V = 1{,}0\ s\ \ K_e = 1{,}0\ \ pu/pu\ \ \ T_e = 0{,}5\ s$

À medida que o ganho do regulador de tensão é elevado percebem-se dois fatos:

a) quanto maior o ganho de canal direto da regulação de tensão menor é a taxa de amortecimento do sistema;

b) quanto maior o ganho de canal direto da regulação maiores serão as freqüências naturais de oscilação do sistema.

Como é possível notar, a figura 5.14 já trás um modelo de regulador de tensão que apresenta um bloco de realimentação do sinal da tensão de campo para efeito de estabilização.
A presença de uma malha de realimentação transitória é uma condição prática bem favorável e muito utilizada pelos fabricantes no sentido de se aumentar a margem de estabilização da regulação de tensão. A figura 5.15 mostra uma comparação entre as duas respostas da máquina síncrona, a um degrau na referência do regulador de tensão, considerando-se a presença e a não presença da realimentação transitória.

O tema estabilidade será abordado com mais profundidade no próximo capítulo e lá será mostrado como que a adição de uma malha de realimentação pode melhorar a estabilidade local.
Esta simulação está baseada em uma situação real de um sistema cujo regulador de tensão apresentava uma malha extra de realimentação transitória.

**Nota:** a utilização de uma malha de realimentação transitória dependente da freqüência é uma estratégia muito explorada na teoria de controle automático, principalmente na área de regulação tanto de tensão quanto de velocidade, porém deve ser avaliada com critérios. Houve casos, comprovados, em que a

utilização de uma malha de realimentação do tipo transitório, embora tenha melhorado substancialmente a resposta em regime permanente, não foi corroborada pelo desempenho do controle em regime transitório.

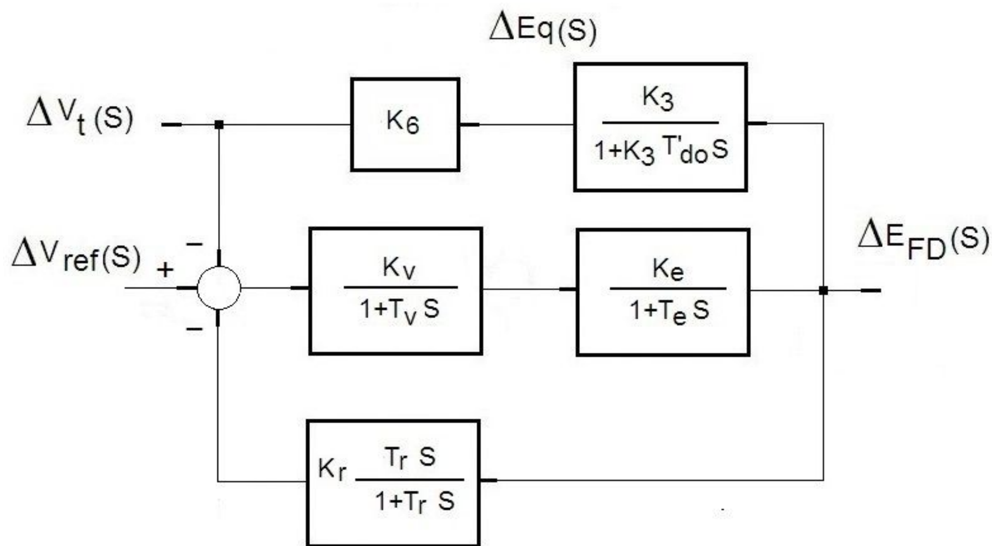



***Figura 5.14 – Diagrama em Blocos do Sistema Automático de Excitação com $\Delta\delta(S)$ =0 e Realimentação Transitória Presente***

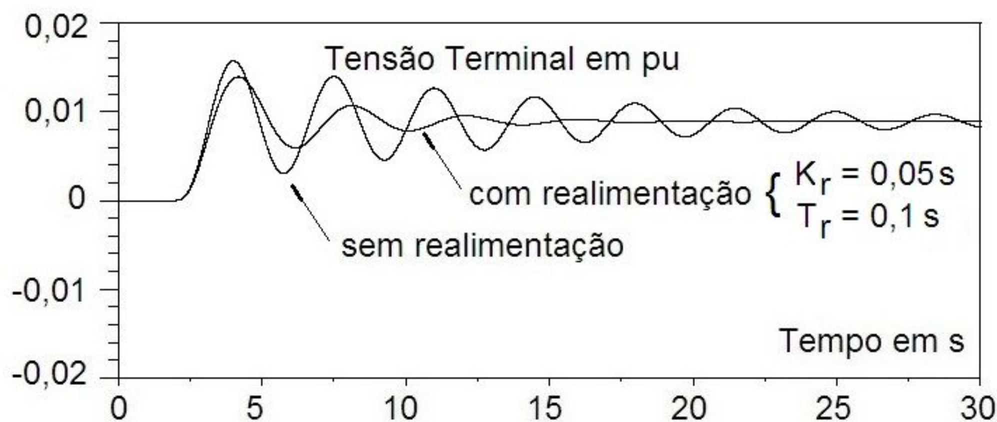



***Figura 5.15 – Resposta ao Degrau na Referência do Regulador de Tensão do Diagrama em Blocos da Figura 5.12 com e sem Realimentação Transitória para*** $K_V = 125$ *pu/pu* $T_V = 1{,}0$ *s*

$K_e = 1{,}0$ *pu/pu* $T_e = 0{,}5$ *s*

Outro ponto importante a ser considerado nos sistemas de excitação que se utilizam de excitatrizes rotativas é questão da saturação introduzida pelo processo eletromagnético das máquinas elétricas envolvidas.
No caso da modelagem, já foi visto no capítulo anterior, item 4.4.15, exemplos de como se deve trabalhar com esse tipo de fenômeno, independente do tipo de máquina elétrica.
A figura 5.16 traz o modelo na forma de diagrama em blocos, no plano complexo, onde aparece o bloco relativo à saturação magnética.

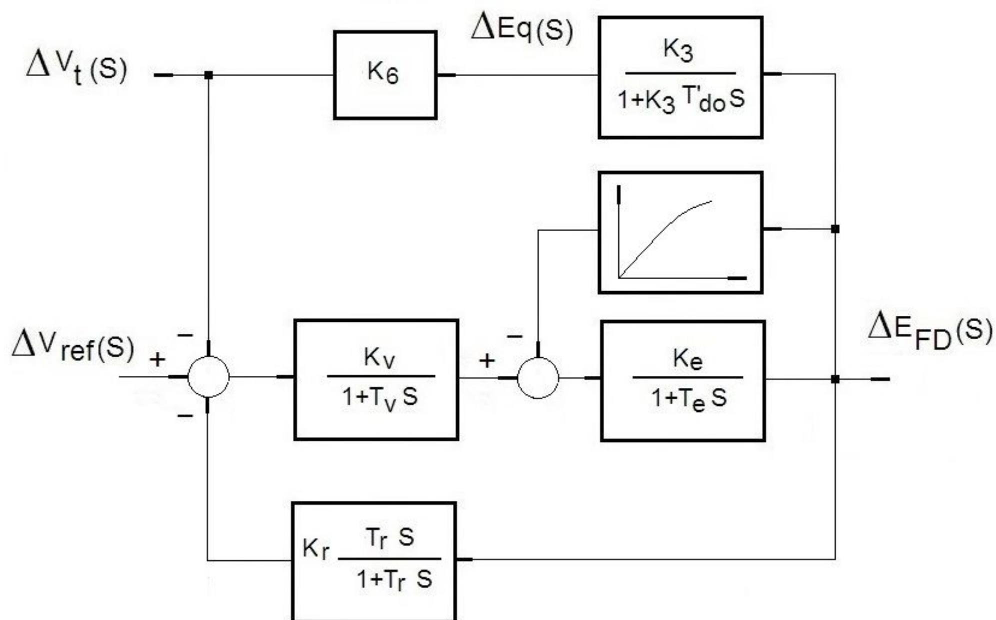



***Figura 5.16 – Representação da Função de Saturação num Sistema de Excitação***

A função saturação se apresentará na forma matemática da expressão ditada pela equação 4.227 aqui repetida por comodidade.

$$S_{E\,u} \overset{\Delta}{=} A_s \, e^{B_s \, E_{fd\,u}}$$

## 5.6.2.2. Sistemas de Excitação com Excitação Estática

O avanço na tecnologia de materiais semicondutores permitiu o desenvolvimento de uma série de elementos e componentes eletrônicos conhecidos como dispositivos em estado sólido ou *solid state*, como é designado no jargão técnico. O tiristor ou *thyristor* é um desses dispositivos do tipo semicondutor cuja classe de potência o enquadra perfeitamente bem no processo de excitação da máquina síncrona.

Na fabricação de um tiristor são empregadas camadas de material do tipo P ou positivo e do tipo N ou negativo de modo que a ação de um determinado sinal de controle, ao ser aplicado ou não a uma porta ou *gate*, permitirá que o processo de retificação de um sinal alternado seja possível.
O tiristor nada mais é que um diodo cuja retificação é controlada em função do ângulo elétrico de aplicação de um sinal de comando externo; trata-se de elementos tipo SCR componentes da chamada cadeia de excitação estática de máquinas síncronas.
A vantagem da utilização desses dispositivos de retificação do sinal de tensão em CA é a sua aplicação direta no processo de excitação de máquinas síncronas que exige alta potência onde se tem um sinal de tensão de campo em CC e uma elevada corrente de excitação associadas a uma baixíssima constante de tempo de resposta do circuito inerente.
Assim como em tudo que se conhece, haverá sempre dois lados da questão a serem considerados; nas máquinas síncronas onde o processo de excitação se dá por intermédio de excitatrizes rotativas, sabe-se que os tempos de resposta são maiores que aqueles em que a excitação é estática, porém nesse ponto há que se considerar a classe de isolamento da máquina elétrica. Geralmente, a excitação estática é aplicada a máquinas síncronas cuja classe de isolamento é F. Portanto, quando se consideram máquinas síncronas de classe de isolamento inferior que, via de regra, utilizam sistemas de excitação onde são empregadas excitatrizes rotativas, uma possível substituição, levando-se em conta algum processo de modernização, terá de ser observada com grande cuidado e com um forte julgamento de Engenharia. As taxas de subida da tensão de campo em sistemas de excitação estática são muito elevadas se comparadas com aquelas taxas relativas a sistemas de excitação dotados de excitatrizes rotativas.

O mesmo sistema, que na figura 5.14 está mostrado como um sistema de excitação baseado na presença de excitatrizes rotativas, encontra-se agora representado na figura 5.17 como um sistema de excitação estática composto por tiristores de retificação.

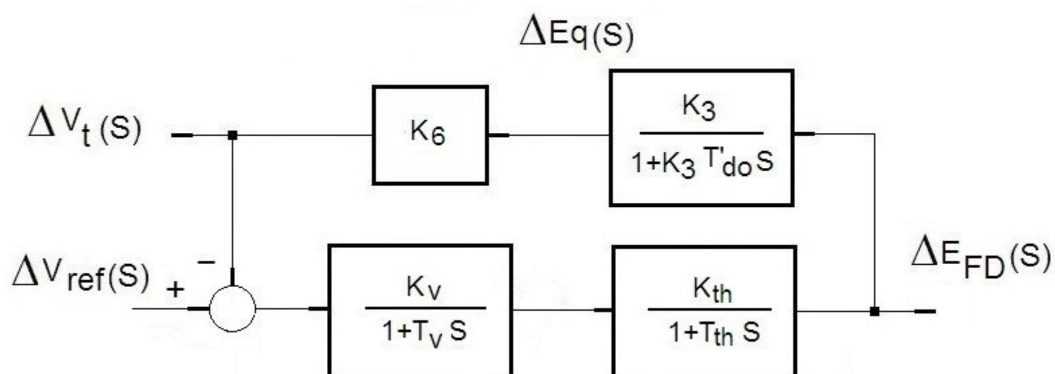



***Figura 5.17 – Sistema de Excitação Estática Geral***

Na figura 5.17, a constante $K_{th} = 500\ pu/pu$ representa o ganho de canal direto enquanto que a constante de tempo $T_{th} = 0{,}005\ s$ é conhecida como constante de tempo de resposta da ponte de tiristores. O nome *ponte de tiristores* tem tudo a ver com a forma relativa ao arranjo físico e a disposição dos tiristores nos cubículos do sistema de excitação.
A figura 5.18 mostra a resposta dos dois sistemas de excitação, considerando-se a mesma máquina síncrona e eliminando o bloco relativo à realimentação de estabilização. Evidentemente que se trata de uma discussão teórica já que tal possibilidade na prática seria impossibilitada por várias razões.

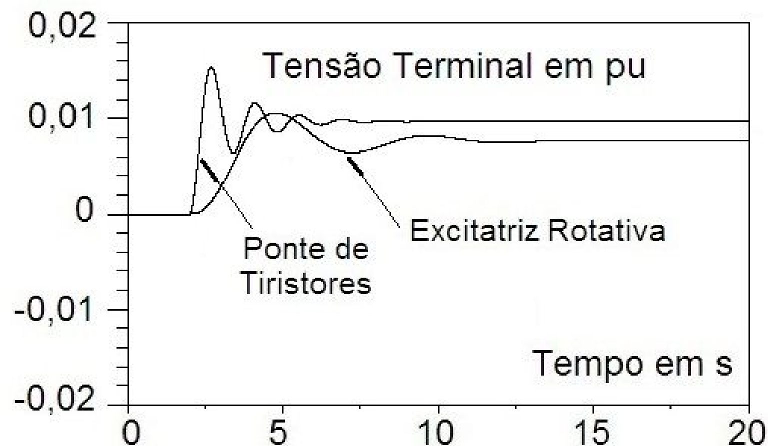



***Figura 5.18 – Resposta no Domínio do Tempo do Sistema de Excitação Excitatriz Rotativa versus Excitação estática***
$K_e = 1{,}0\ pu/pu$ $T_e = 0{,}5\ s$ **versus** $K_{th} = 500\ pu/pu$ $T_{th} = 0{,}005\ s$

O que se pode concluir é que, em termos comparativos, a resposta no domínio do tempo de um sistema de excitação estática é mais rápida que a de um sistema que se utiliza de excitatrizes rotativas, considerando-se as mesmas condições.
Então, pode-se perguntar o motivo de não se elevar o ganho de canal direto, ou ganho $K_v$, do regulador de tensão em sistemas onde há excitatrizes rotativas, visando exatamente adequar a resposta no tempo desses sistemas. Essa pergunta fica como um exercício para o leitor encontrar o porquê.

**Nota 1:** a utilização de um sistema de excitação de resposta mais rápida tem uma importância enorme no sentido de preservação da integridade do sistema elétrico, principalmente das cargas alimentadas, prevenindo os efeitos tanto de sobretensão como de subtensão ou, pelo menos, diminuindo-os em face da presença de tais fenômenos. Fenômenos como a perda ou a entrada de blocos de geração com a abertura de LTs e LIs, bem como a rejeição de carga ou mesmo chaveamento de cargas exigem um controle rápido da tensão via regulador de tensão. Não se pode esquecer que a própria máquina síncrona tem em seu sistema automático de excitação um órgão de proteção principalmente contra possíveis fenômenos de sobreexcitação e subexcitação, fenômenos esses que podem provocar danos irreversíveis ao equipamento.

A figura 5.19 mostra, de maneira bem resumida, um pequeno diagrama unifilar onde pode ser visto o sistema de excitação de uma máquina síncrona do tipo estático a base de tiristores sob controle de ângulo de disparo.

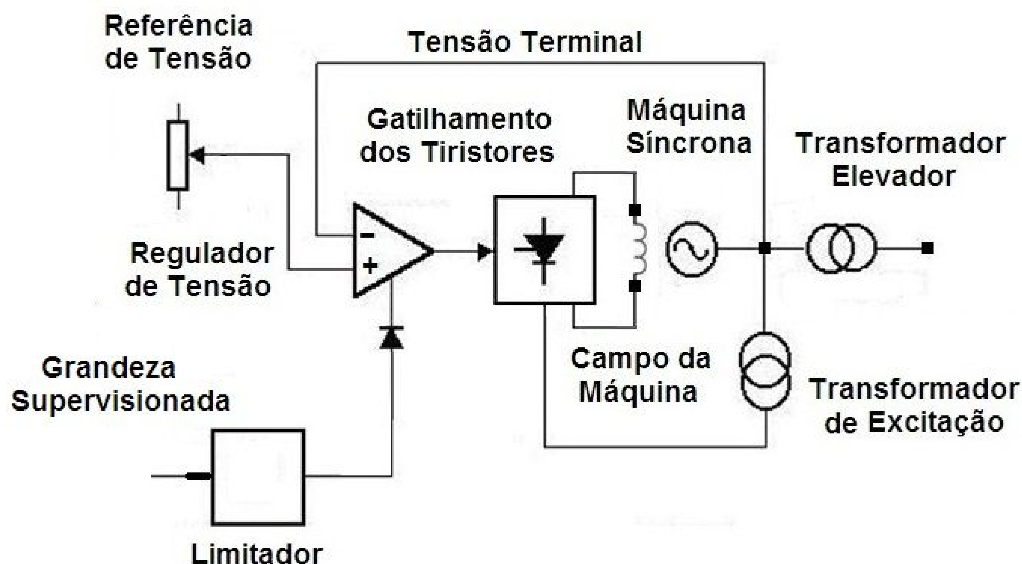



***Figura 5.19 – Esquema Unifilar de um Sistema de Excitação Estática***

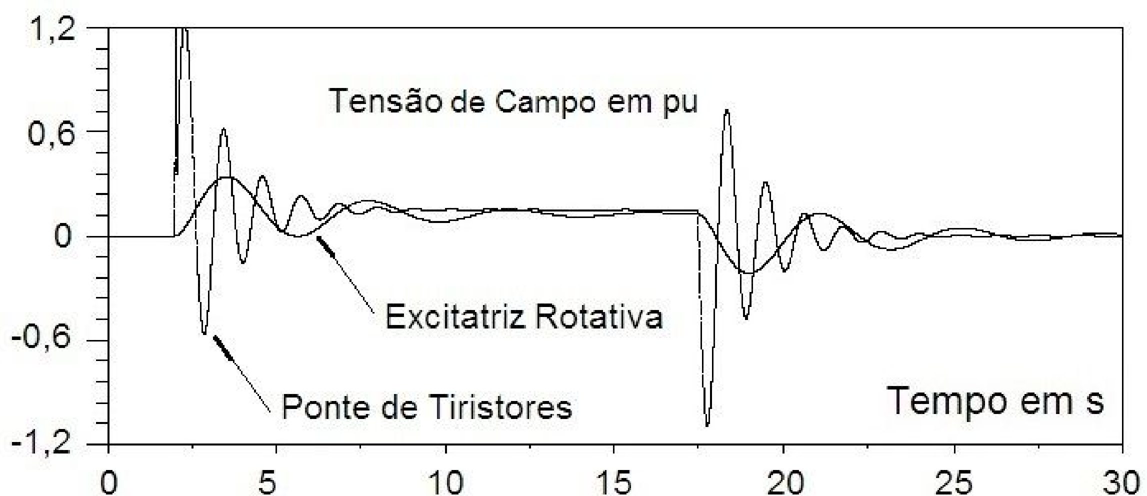



***Figura 5.20 – Resposta no Domínio do Tempo do Sistema de Excitação Excitatriz Rotativa versus Excitação estática***

$K_e = 1{,}0$ *pu/pu* $T_e = 0{,}5\ s$ **versus** $K_{th} = 500$ *pu/pu* $T_{th} = 0{,}005\ s$

O sistema de excitação à base de tiristores é um conjunto de dispositivos eletrônicos cujo bloco de controle e comando pode ser de tecnologia analógica, analógica-digital ou totalmente digital sendo que a parte de potência é formada por elementos retificadores dispostos na forma de uma ponte na qual a retificação em si é propriamente efetivada.

Os arranjos são os mais variados possíveis de modo que se pode ter uma retificação do tipo polifásico. A maioria das montagens que se vê é de pontes de tiristores numa disposição hexafásica, ou seja, um arranjo cujo defasamento é de $60$ graus elétricos.

**Nota 2:** a simples observação no registro da figura 5.20 abre espaço para um questionamento que sempre é feito durante os ensaios envolvendo sistemas de excitação estática. Como o processo de excitação da máquina síncrona, tanto na operação como gerador quanto na operação como motor, se dá a partir de um valor absoluto mínimo para um valor absoluto máximo, sempre com polaridade positiva, como explicar que no processo de gatilhamento ou controle dos tiristores, a partir de um valor intermediário de comando, por exemplo, a tensão retificada tem sua polaridade invertida? Na realidade, há mesmo a inversão da polaridade da tensão de excitação, porém isso tem tudo a ver com a questão do teto que é atingido pela tensão de campo num primeiro instante.
No registro da figura 5.20, quando foi aplicado o sinal de degrau na entrada do regulador de tensão, o sistema de excitação estática fez com que a tensão terminal da máquina síncrona atingisse um teto positivo, situação idêntica foi verificada quando o sinal de degrau foi retirado, apenas que o sentido foi invertido.
O valor de tensão de teto pode superar em muito o valor da tensão de campo nominal de regime permanente quando o comando for para aumentar a excitação da máquina, do mesmo modo como pode diminuir em muito o valor da tensão de campo quando o comando for para reduzir a excitação. Isso é uma característica atrelada ao processo.
Existem máquinas síncronas cujo sistema de excitação admite tensões de teto de até $\pm 7\ pu$. São máquinas projetadas para trabalhar com um fluxo magnético sob um entreferro de até $30\ mm$.
Por essa razão que certas máquinas síncronas, que trabalhem com tensões de campo da ordem de $250$ ou $300\ VCC$, em regime permanente, podem, transitoriamente, admitir tensões de campo da ordem de $2\ kV$.

Um sistema de excitação estática de uma máquina síncrona, como já foi citado, tem como característica principal a utilização de elementos SCRs formando as chamadas pontes de tiristores que são responsáveis pela retificação da tensão a ser aplicada no campo da máquina.

A figura 5.21 traz o esboço de uma ponte de tiristores em uma conexão conhecida como hexafásica de retificação completa alimentando uma carga puramente indutiva semelhantemente ao campo de uma máquina síncrona. Existem várias outras formas de conexão e montagem das unidades de tiristores.

**Nota:** convém lembrar que o tipo de carga muda substancialmente a forma da resposta da tensão retificada. A presença de uma carga resistiva deve ser levada em conta nesses casos.

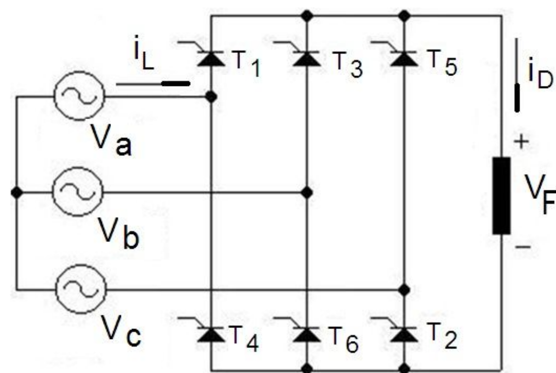



***Figura 5.21 – Ponte de Tiristores Hexafásica***

Na figura 5.21 considerar a seguinte legenda:

$v_{a,b,c}$ : tensões trifásicas rms de alimentação da ponte

$v_F$ : tensão retificada aplicada à carga

$i_L$ : corrente de linha rms de alimentação da ponte

$i_D$ : corrente na carga já retificada

$T_{1,2,3,4,5,6}$ : unidades de tiristores componentes da ponte

As unidades de tiristores podem ser compostas por mais de um tiristor. Isso é visto em sistemas de excitação fabricados nas décadas de 70 e 80. Ultimamente, com o desenvolvimento da tecnologia, já é possível montar uma ponte com apenas uma unidade de tiristores dependendo do valor da corrente circulante pelos braços da ponte. As unidades de tiristores são indicadas por $T_i$ para $i = 1,2,3,4,5,6$ , considerando-se um sistema hexafásico de retificação completa.

Assim como é mostrado na figura 5.19, a alimentação da ponte de tiristores se dá através de um transformador específico conhecido com transformador de excitação que promove a redução da tensão de saída da máquina para um valor compatível. Geralmente, o transformador de excitação é fabricado numa potência na ordem de $1{,}5$ a $3\,\%$ da potência aparente de saída da máquina principal. A excitação estática se trata, portanto, de um sistema de autoexcitação que por esse motivo exigirá a presença de um grupo paralelo de excitação de partida, normalmente alimentado ou via sistema auxiliar ou via banco de baterias da instalação elétrica.

O controle da tensão de saída da ponte, tensão $v_F$ , é promovido através de um sinal que define o ângulo elétrico de disparo do elemento retificador ou tiristor.
A figura 5.22 mostra a característica teórica de saída da tensão retificada em função do ângulo elétrico de disparo das unidades de tiristores usada no sistema de excitação de uma máquina síncrona.

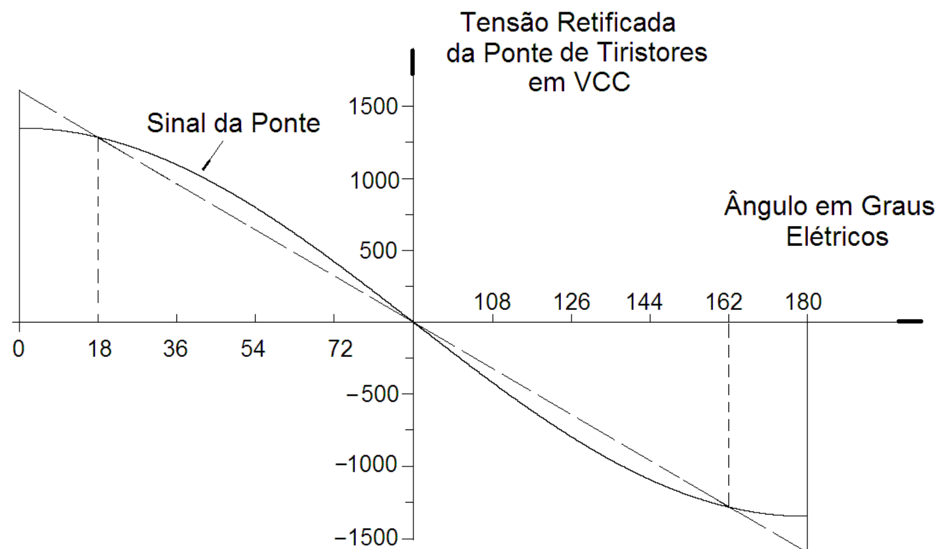



***Figura 5.22 – Ponte de Tiristores Hexafásica***

Na figura 5.22, considerar que a tensão retificada de saída da ponte de tiristores seja dada pela seguinte expressão referente à equação originária do cálculo teórico do processo de retificação hexafásica segundo o esquema mostrado na figura 5.21.

$$v_F(t) = \frac{3}{\pi}\sqrt{2}V_{ca}\cos\alpha = 1{,}35V_{ca}\cos\alpha \qquad (5.105)$$

onde

$V_{AC}$ *: 1000 VAC*

*α : ângulo de disparo de cada tiristor em graus elétricos*

Geralmente, o que se faz é linearizar a curva referente ao ganho da ponte de tiristores entre dois pontos, um a *18°* elétricos, num ponto chamado de ponto de operação com retificador, e outro ponto a *162°* elétricos chamado de ponto de operação como inversor.
Esses valores são teóricos e podem variar conforme o projeto.

**Nota:** é importante ressaltar que, embora haja inversão do sinal da tensão entre os ângulos de disparo, como pode ser comprovado pela figura 5.22, o mesmo não ocorre com a corrente retificada circulante. Isso é em decorrência do tipo de carga envolvida no processo. No caso de a carga ser o enrolamento de campo de uma máquina síncrona, o valor ôhmico da reatância indutiva, para uma freqüência de *60 Hz*, em relação à resistência do circuito, é da ordem de *100* para *5%* na maioria dos casos. O que se comprova é que o gatilhamento de um tiristor, a partir dos *150°* elétricos, alimentando uma carga puramente indutiva, não mais provoca a circulação de corrente pelo circuito, principalmente se a indutância for de valor significativo, situação aproximada do circuito de campo aqui estudado. É por essa razão que não se consegue, com

uma ponte de tiristor, inverter a corrente de excitação do campo de uma máquina síncrona quando ocorre um fenômeno magnetizante, efeito esse já estudado no capítulo 4, por exemplo.
É muito difícil, porém não impossível, de se encontrar certas instalações cujo sistema de excitação apresente acoplado ao sistema de excitação positiva, um sistema adicional de excitação negativa. A UHE São Simão $(6\,x\,285\ MW)$, localizada no Rio Paranaíba, em Goiás, é uma instalação cujo sistema de excitação foi projetado com uma excitação positiva e outra negativa.

**Nota sobre limitadores ativos em sistemas de excitação de máquinas síncronas:** nos sistemas de excitação onde o controle ou comando do regulador de tensão é eletrônico, é possível prever a instalação de elementos limitadores de ação ativa cuja função é supervisionar o estado operativo da máquina síncrona em seu regime permanente de operação. A referência 52 mostra um estudo onde se vêem a modelagem e a validação desses dispositivos no campo prático da experiência.
Nos reguladores de tensão mais antigos esse processo era de difícil consecução, situação esta que acabava deixando por conta da ação humana verificar, constantemente, se a máquina estava operando dentro de sua curva de capacidade, uma tarefa hercúlea se bem analisada.
Nos modernos sistemas de controle, mesmo que se utilizando de simples arranjos do tipo PID, já foram montados e postos em serviço alguns dispositivos limitadores de ação contínua que trouxeram e trazem enormes ganhos tanto para a estabilidade operativa quanto para a vida útil do equipamento.
A ação desses dispositivos é caracterizada pelo bloqueio direto do comando de controle do gatilhamento da ponte de tiristores, considerando-se aqui um sistema de excitação estática. Na maior parte das vezes, a função de transferência de um dispositivo limitador nada mais é que um controlador do tipo P ou PI, quando muito um filtro do tipo passa-baixa com uma constante de tempo associada. A figura 5.19 mostra um diagrama unifilar simplificado onde se pode ver a ligação de um limitador geral agindo no ponto de limitação de um amplificador operacional.
Nos controladores e reguladores baseados em eletrônica analógica, determinados arranjos exigiam grande criatividade nas associações de elementos passivos e ativos para a criação dos dispositivos limitadores entre outros. Nos atuais controladores de tecnologia digital a dificuldade tem mais a ver com a questão numérica no processo de formulação desses dispositivos. Nesses casos, muitas vezes, tais elementos já se encontram com a programação feita e embutida cuja rotina não se encontra aberta. Trata-se de programação muitas vezes baseada em softwares proprietários com *trade mark*.
São os seguintes os principais dispositivos de limitação empregados no sistema de excitação das máquinas síncronas:

**a) limitador de subexcitação**

Dispositivo que monitora o nível mínimo da corrente de excitação de modo a garantir que a máquina não perca a estabilidade operativa em função do enfraquecimento do fluxo magnético enlaçado entre rotor e estator.

Normalmente, o limitador de subexcitação ou de mínima excitação tenta criar uma função que busca emular a condição verificada à esquerda do gráfico relativo à carta de capacidade da máquina síncrona, na parte conhecida como região de subexcitação. Ver figura 4.12 onde se encontra indicada a região de subexcitação.

**b) limitador de sobrexcitação**

Dispositivo que monitora o nível máximo da corrente de excitação de modo a garantir que os limites térmicos do enrolamento do rotor não sejam ultrapassados. Normalmente, o limitador de sobrexcitação ou de máxima excitação monitora o valor máximo da corrente de excitação que fica associado à região de sobrexcitação, uma região que se apresenta do lado direito do gráfico relativo à carta de capacidade da máquina síncrona.

**c) limitador de corrente de armadura ou estator**

Dispositivo que monitora o nível máximo da corrente de excitação associado a um valor máximo de corrente de estator da máquina síncrona de modo a garantir que os limites térmicos do enrolamento do estator não sejam ultrapassados.

**d) limitador da relação tensão terminal *versus* freqüência ou de Volts/Hertz**

Dispositivo destinado ao monitoramento da relação entre a tensão terminal da máquina síncrona e sua rotação ou freqüência. Geralmente é designado pelo nome de limitador de *Volts/Hertz* ou *Volts por Hertz*.
Ao contrário do que se pode pensar, a função desse dispositivo não é a proteção da máquina síncrona em si, mas sim a proteção do transformador de excitação e do transformador elevador que se encontram conectados a essa máquina.
Os fabricantes de transformadores têm fornecidos elementos bem concretos sobre os danos causados a transformadores conectados à rede elétrica quando ocorrem sobretensões originárias do crescimento da relação tensão/freqüência *versus* o tempo de exposição a que esses equipamentos ficam sujeitos. Trata-se daquilo que é conhecido como efeito danoso do sobrefluxo que provoca danos irreversíveis aos elementos transformadores. A referência 58 traz mais detalhes a respeito desse assunto.

## 5.6.2.3. Valores Típicos para os Alguns Parâmetros Principais de Sistemas de Excitação

A referência 1 apresenta, de maneira extensa, as faixas específicas de valores típicos para reguladores de tensão e sistemas de excitação focalizando, principalmente, os grupos que empregam excitatrizes rotativas.
As tabelas 5.1 e 5.2 apresentam os valores típicos de sistemas de excitação que se reportam mais aos exemplos apresentados no presente livro,

considerando-se a experiência de 35 anos de trabalho nessa área de regulação.
Na tabela 5.1, os dados se referem a sistemas de excitação que empregam excitatrizes rotativas. São máquinas síncronas que operam como geradores numa faixa de potência de até *70 MW* .

**Tabela 5.1**

***Alguns Valores Típicos de Parâmetros de Sistemas de Excitação Rotativas***

| Parâmetro | Valor Típico | Faixa |
|---|---|---|
| ganho da excitatriz - $K_e$ | *1,0 pu/pu* | *0,2 a 1,0 pu/pu* |
| constante de tempo da excitatriz - $T_e$ | *0,5 s* | *0,1 a 0,6 s* |
| ganho do regulador de tensão - $K_V$ | *1,0 pu/pu* | *25 a 125 pu/pu* |
| constante de tempo do regulador de tensão - $T_V$ | *1,0 s* | *0,5 a 16 s* |
| ganho da realimentação transitória - $K_r$ | *0,05 pu/pu* | *0,05 a 0,8 pu/pu* |
| constante de tempo da realimentação transitória - $T_r$ | *0,1 s* | *0,1 a 1,0 s* |
| tensão de teto positiva - $V_{máx}$ | *1,25 pu* | *1,1 a 1,25 pu/pu* |
| tensão de teto negativa - $V_{mín}$ | $-1,25$ *pu* | $-1,1$ *a* $-1,25$ *pu* |
| faixa de regulação automática da tensão terminal | *0,8 a 1,10 pu* | *0,8 a 1,10 pu* |

A tabela 5.2 já foca máquinas síncronas de maior porte e mais modernas que se utilizam de sistemas de excitação estática a base de tiristores. São máquinas síncronas que operam como geradores numa faixa de potência de *100* até *400 MW* .

| abela 5.2 | | |
|---|---|---|
| **Alguns Valores Típicos de Parâmetros de Sistemas de Excitação Estática** | | |
| Parâmetro | Valor Típico | Faixa |
| constante de tempo do transdutor de tensão | *0,05 s* | *0,01 a 0,06 s* |
| ganho da ponte de tiristores - $K_{th}$ | *500 pu/pu* | *350 a 550 pu/pu* |
| constante de tempo da excitatriz - $T_{th}$ | *0,005 s* | *0,005 a 0,025 s* |
| ganho do regulador de tensão - $K_V$ | *1,0 pu/pu* | *1,0 a 2,5 pu/pu* |
| constante de tempo do regulador de tensão - $T_V$ | *1,0 s* | *0,5 a 2,5 s* |
| tensão de teto positiva - $V_{máx}$ | *7,0 pu* | *3,5 a 7,0 pu/pu* |
| tensão de teto negativa - $V_{mín}$ | $-7,0$ *pu* | $-3,5$ *a* $-7,0$ *pu/pu* |
| faixa de regulação automática da tensão terminal | *0,9 a 1,10 pu* | — |
| gatilhamento limite como retificador - $\alpha_g$ | *20º elétricos* | — |
| gatilhamento limite como inversor - $\alpha_w$ | *150º elétricos* | — |

## EXEMPLO 5.4

Considerar a máquina síncrona do exemplo 4.13 operando interligada ao SIN e alimentando sua carga nominal. Sabe-se que a resposta desse sistema, no domínio do tempo, a um degrau unitário de torque mecânico pode ser observada através da inspeção da variação do ângulo elétrico de potência da máquina contra a barra infinita.
Sendo assim, pede-se que os seguintes parâmetros sejam calculados:

a) as freqüências amortecida e não amortecida locais;

b) o coeficiente de amortecimento do sistema;

c) a resposta do sistema na forma do curso da resposta do ângulo elétrico de potência no domínio do tempo.

Os seguintes parâmetros, já em por unidade na base de valores da própria máquina, são dados:

- constante de inércia do conjunto girante: $2H = 10\,s$

- coeficiente de amortecimento da carga elétrica alimentada: $D = 2$ *pu/pu*

- coeficiente de torque sincronizante local: $K1 = 1{,}098$ *pu/rad*

Qual a conclusão que se pode chegar, em termos práticos, a respeito do comportamento operativo desse sistema?

**Solução:**

O presente sistema nada mais é que aquele sistema mostrado no diagrama em blocos da figura 5.8 onde será considerado apenas o comportamento intrínseco sem a interferência dos controlardes automáticos.

- A freqüência natural não amortecida será obtida diretamente através da equação 5.73 onde $\omega_B = 377$ rad/s é a freqüência base do sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1 \omega_B}{2H}} = \sqrt{\frac{1{,}098\,x377}{10}} = 6{,}433 \quad rad/s$$

- O coeficiente de amortecimento do sistema será obtido através da equação 5.74:

$$\xi = \frac{D}{2\sqrt{2H K_1 \omega_B}} = \frac{2}{2\sqrt{10\,x1{,}098\,x377}} = 0{,}015 \;\; s/d$$

- A freqüência natural amortecida será obtida diretamente através da equação seguinte proveniente da equação 5.76:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 6{,}433\sqrt{1-(0{,}015)^2} = 6{,}432 \;\; rad/s$$

A resposta do sistema, na forma do curso do ângulo elétrico de potência, será obtida diretamente através da equação 5.76, mas para isso será necessário o cálculo antecipado da constante de tempo de resposta $T$ em $s$ e do defasamento existente $\varphi$ em $rad$.

A constante de tempo de resposta do sistema será:

$$T = \frac{1}{\xi \omega_n} = \frac{1}{0{,}015\,x\;6{,}433} = 10{,}363 \;\; s$$

O desfasamento será dado por:

$$\varphi = arc\,cos(\xi) = arc\,cos(0{,}015) = 1{,}555 \;\; rad$$

A resposta do sistema, na forma do curso do ângulo elétrico de potência será então:

$$\Delta\delta(t) = \frac{1}{K_1}[1 - \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{\sqrt{1-\xi^2}} sin(\omega_d t + \varphi)] =$$

$$= \frac{1}{1,098}[1 - e^{-\frac{t}{10,363}} sin(6,432t + 1,555)] \quad em\ rad$$

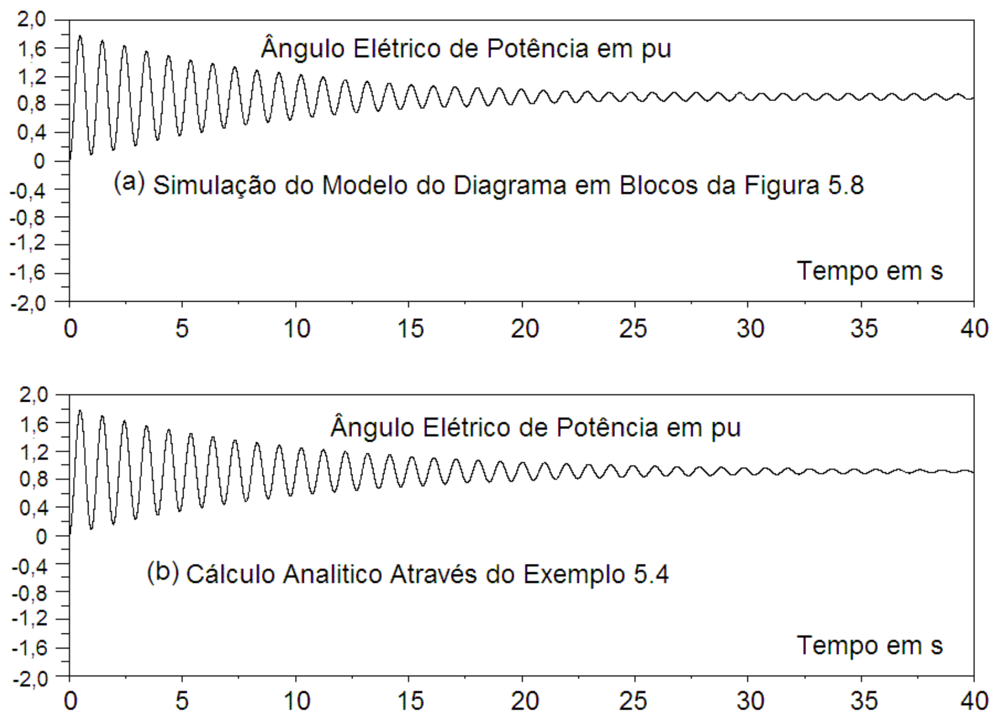



***Figura 5.23 – Comparação entre Resultados de Simulação e Analítico do Exemplo 5.4***

Em termos práticos, nota-se que o sistema sob análise se apresentou fortemente oscilante e isso pode ser comprovado pelo baixo valor do coeficiente de amortecimento $\xi$. Por isso as freqüências de oscilação, tanto amortecida quanto a não amortecida, ficaram bem próximas em seus valores. Como era de se esperar, a freqüência de oscilação amortecida foi de $\omega_d = 6,432\ rad/s$ ou de $f_d = 1,023\ Hz$ caracterizando o *modo local de oscilação*.

---

## EXEMPLO 5.5

O sistema de excitação de um gerador síncrono instalado no SIN é do tipo que emprega um grupo que contém uma excitatriz rotativa, uma máquina de CC em um arranjo cuja ligação é do tipo *shunt*.

Pede-se calcular o valor da constante de tempo da excitatriz, $T_e$, em $s$, considerando os seguintes dados obtidos a partir da desmontagem geral do conjunto retificador em função de serviços de manutenção:

- potência nominal: $25\ kW$

- tensão de saída nominal: $125\ VCC$

- corrente nominal à plena carga: $200\ A$

- rotação nominal: $500\ RPM\ em\ 50\ Hz / 600\ RPM\ em\ 60\ Hz$

- número de pólos principais: $Pólos = 6$

- número de pólos de comutação: $PólosComut = 6$

- rotor de $56\ ranhuras$ com $2\ condutores$ em cada ranhura

- número de espiras de campo por pólo: $N = 50$

- número de passos paralelos na armadura: $a = 6$

- fator de dispersão do fluxo magnético: $\sigma = 1{,}2$

**Solução:**

A expressão da constante de tempo da excitatriz pode ser obtida, diretamente, pela aplicação da equação 5.100, aqui repetida por comodidade, onde o número total de espiras de campo deverá ser multiplicado pelo número de pólos da máquina:

$$Te = \frac{N\sigma}{K}$$

onde, da equação 5.100, tem-se que:

$$K = \frac{Z\,n\,Pólos}{120\,a}$$

sendo

$Z$ : número de condutores na armadura $= 56\ x\ 2 = 112\ condutores$

$n$ : velocidade de rotação em rpm $= 600\ RPM$

$Pólos$ : número total de pólos $= 6\ pólos$

$a$ : número de passos paralelos na armadura $= 6\ passos$

Assim

$$K = \frac{Z\,n\,Pólos}{120\,a} = \frac{112\,x\,600\,x\,6}{120\,x\,6} = 560$$

Deste modo, o valor da constante de tempo da excitatriz será de:

$$Te = \frac{6N\sigma}{K} = \frac{6\,x\,50\,x\,1{,}2}{560} = 0{,}642\,s$$

---

## 5.7. Exercícios Propostos

**1** Considerando-se a teoria que foi aplicada nesse capítulo na determinação dos parâmetros de linearização, $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ , do sistema elétrico formado por uma máquina síncrona operando interligada a um barramento infinito, desenvolver, de modo linearizado, as expressões para as correntes de estator de eixos $d$ e $q$ . A partir de então, desenvolver as expressões para as potências ativa e reativa envolvidas no processo.

**2.** Desenvolver um programa que permita avaliar os valores assumidos pelos parâmetros de linearização, $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ , em função das potências ativa e reativa de carregamento. Do mesmo modo, considerar o arranjo máquina síncrona contra a barra infinita.

**3.** De maneira semelhante ao que foi realizado na pesquisa sobre a influência do ganho de canal direto de regulador de tensão, na tensão terminal de saída da máquina síncrona, introduzir nas análises a influência do ângulo elétrico de potência.

**4.** Explicar o motivo de se realizarem ensaios de resposta ao degrau na referência do regulador de tensão na condição máquina operando em vazio. Se o ensaio fosse feito em carga o que deveria ser considerado?

**5** Pesquisar o tipo específico de sistema de excitação utilizado nos geradores diesel de emergência conhecido por *brushless*.

**6.** Analisando as funções de transferência do regulador de velocidade e do regulador de tensão, até aqui estudadas, é possível fazer uma comparação entre essas duas entidades de controle. Listar, comparativamente, as principais características desses dois tipos de controle, mostrando a faixa de freqüência em que ambos efetivamente atuam.

**7**. Um importante tipo de sistema de excitação visto principalmente em médias e pequenas centrais de geração é aquele que utiliza os recursos dos

amplidínamos ou geradores especiais dotados de escovas adicionais de eixo direto.
Na figura 5.24 é mostrado um sistema de excitação que adota o princípio dos amplidínamos. Neste caso, mais genérico, o sistema é composto de uma excitatriz piloto e de uma excitatriz principal. Considerando-se a mesma identificação verificada para as variáveis da figura 5.9, precedente, exceto as seguintes, determinar a função de transferência no plano complexo semelhante à equação 5.100.

Considerar os seguintes dados:

$K_{dq}$ : constante do circuito em quadratura para a tensão no eixo direto

$v_{Fq}$ : tensão gerada entre as sapatas de eixo em quadratura

$v_{Fd}$ : tensão gerada entre as sapatas de eixo direto

Como sugestão, utilizar as seguintes equações básicas considerando-se a figura 5.24:

$$\dot{\lambda}_{EE} + R\, i_E = E$$

$$v_{Fq} = K\, \phi_E$$

$$\phi_{EE} = \phi_E + \phi_{Ed}$$

$$v_{Fd} = K_{dq}\, i_E$$

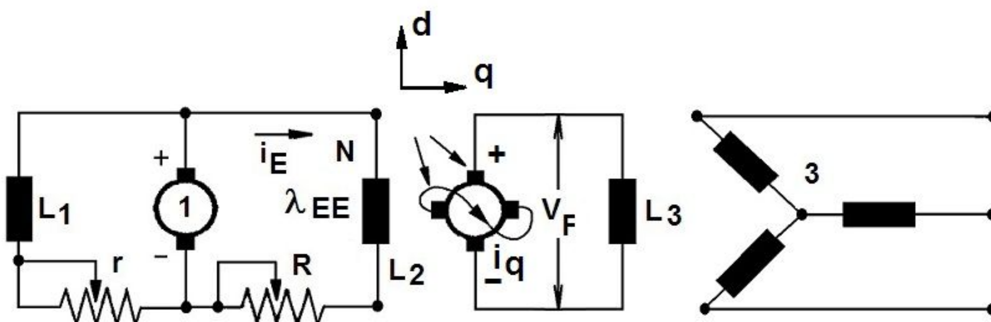



***Figura 5.24 – Sistema de Excitação do Tipo Amplidínamo***

**8**. Estudar os efeitos da saturação magnética da excitatriz analisando a resposta no domínio do tempo de um sistema de excitação do tipo mostrado na figura 5.16.
Para tal, considerar a seguinte função de saturação:

$$S_{E\,u} \overset{\Delta}{=} A_s\, e^{B_s\, E_{fd\,u}}$$

onde são dados os seguintes parâmetros representativos da função de saturação:

$\Delta S_{Eu}$ : efeito da saturação em pu

$\Delta E_{fdu}$ : variação da tensão de excitação em pu

$A_S = 0{,}0357$

$B_S = 1{,}1507$

# CAPÍTULO 6

# ASPECTOS DE ESTABILIDADE DOS SEPs

## 6.1. Geral

Depois de desenvolver os estudos sobre os processos de regulação de velocidade para turbinas hidráulicas e de regulação de tensão de máquinas síncronas chega-se ao ponto fundamental do estudo cujo objetivo não foi outro senão o de analisar os aspectos da estabilidade operativa do conjunto eletromecânico de geração de energia elétrica com base nos dispositivos de controle automático envolvidos. O termo estabilidade, cunhado na teoria de controle, é bem simples, porém são diversas as formas disponíveis para a sua abordagem. Seja qual for a linha adotada, o objetivo estará sempre voltado para a questão da avaliação do desempenho operacional de um determinado sistema de controle no sentido de saber se ele é ou não é estável e se não o for o que se pode fazer para torná-lo estável.
O conceito de estabilidade destaca dois aspectos, um aspecto local e relativo e outro mais amplo e global. Quando se estuda sistemas físicos reais não tem muito sentido explorar limites globais de estabilidade, mas sim estabelecer os limites relativos e locais da operação estável.
Historicamente, os primeiros conceitos dessa abordagem se devem aos matemáticos Joseph-Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace e Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, embora tenha sido Lyapunov quem introduziu, na teoria de controle, o conceito de estabilidade local. Na referência 13, o autor faz uma análise robusta a respeito da teoria de estabilidade.
Nesse interim, Lagrange, em seus estudos sobre sistemas dissipadores, foi um dos primeiros a lidar com essa questão e estabeleceu que a estabilidade de um sistema estivesse associada com a energia potencial mínima e um determinado ponto de equilíbrio.
Para o que se pretende nesse livro, entre as várias abordagens de estabilidade, será adotada a mais simples que diz ser a estabilidade de um sistema a capacidade deste permanecer em equilíbrio operativo, ou em sincronismo, enquanto ocorrerem perturbações sobre este mesmo sistema. Convém lembrar que não necessariamente a origem do sistema de coordenadas seria um ponto de equilíbrio para as trajetórias assumidas por um sistema físico, mas haveria um determinado ponto cuja energia mínima faria com que os estados convergissem para tal.
O que se fará nesse capítulo é trabalhar com o conceito de estabilidade relativa e de sincronismo em regime permanente, dois pontos fundamentais em tais discussões.

## 6.2. Estabilidade no Sistema Elétrico de Potência ou SEP

No sistema elétrico de potência o conceito estabilidade encontra associado a três situações distintas, a saber: o regime de estabilidade permanente, o regime de estabilidade transitória e o regime de estabilidade dinâmica.
Estes três regimes operativos se caracterizam, principalmente, pelo comportamento

da resposta dos órgãos controladores automáticos envolvidos, ou seja, o regulador de velocidade e o sistema de excitação que comandam as unidades geradoras que compõem o sistema elétrico.
Basicamente, o que se pode afirmar, para esses três regimes, é o seguinte:

a) regime de estabilidade permanente

Refere-se à condição operativa quando o sistema está sujeito a pequenas variações de carga, sem oscilações prolongadas, com possíveis atuações do regulador de velocidade e/ou do regulador de tensão.
Este regime operativo se caracteriza pela manutenção do sincronismo entre as usinas geradoras e da interligação entre as linhas de transmissão.
A característica básica em regime permanente é a manutenção do sincronismo.

b) regime de estabilidade transitória

Refere-se à condição operativa quando o sistema está sujeito a grandes distúrbios caracterizando um forte impacto com a saída e/ou entrada de grandes blocos de geração.
Nesta condição operativa os reguladores de velocidade e de tensão podem não conseguir manter a estabilidade, e mesmo os PSSs podem também não contribuir para a estabilização. Há casos em que os ERACs entram em operação. Pode ocorrer sobrefreqüência ou subfreqüência. Em muitos casos o sistema se torna instável logo após a atuação dos reguladores de velocidade.
A característica básica em regime transitório é permanecer em sincronismo.

c) regime de estabilidade dinâmica

Refere-se à condição operativa imediatamente após o sistema ter estado sujeito a um distúrbio de grande impacto.
Um forte impacto como a saída e/ou entrada de grandes blocos de geração tem a ver com esta condição operativa. Normalmente, o que se percebe é a atuação dos reguladores de velocidade com oscilações mais lentas e demoradas.
A característica básica em regime dinâmico é manter o sincronismo logo após o primeiro ciclo da oscilação transitória.

Existem, basicamente, dois grandes grupos de métodos para avaliação do desempenho de sistemas lineares de controle automático de uma maneira geral.
Um grupo explora as técnicas da matemática ordinária, mais clássico, enquanto o outro explora as técnicas da matemática numérica, mais moderno.
Para informação, em termos de sistema de controle de geração e de regulação, quer por velocidade quanto por tensão, o processo mais usual é aquele que explora o método clássico a luz da resposta em freqüência.
Hoje em dia, a utilização do processo que explora as técnicas modernas com a utilização de controles do tipo LQR, ou *Linear Quadratic Regulator* tem se mostrado bastante eficiente, porém ainda esbarra na questão da dificuldade de se lidar com as operações matemáticas envolvendo cálculo matricial computacional.
Apesar de os dois métodos anteriores terem sido aplicados com sucesso ainda é preferido o método da entrada limitada-saída limitada (bibo – *bounded input – bounded output*) com avaliação via resposta no tempo do sistema frente à aplicação

de sinais de entrada na forma de funções singulares tais como impulso, degrau e rampa.
Para o presente livro, será utilizado o método clássico de análise da estabilidade, não se prescindindo da inspeção via resposta no domínio do tempo pelo método da entrada limitada–saída limitada, além da aplicação do método de análise do lugar das raízes que poderá ser utilizado quando do ajuste do ganho de canal direto de sistemas que assim o exigir.

## 6.3. Estabilidade de Sistema Lineares

No capítulo 2, foi visto que *um sistema linear será definido como estável, no sentido clássico, se, e somente se, todos os pólos associados à equação característica da função de transferência do sistema de malha fechada forem negativos ou, para o caso de incidência de pólos complexos, estes apresentarem suas partes reais negativas. Caso contrário, se pelo menos um desses pólos for positivo ou, no caso de pólos complexos, apresentar sua parte real positiva o sistema será declarado instável*. Essa será uma condição bem ampla em que as raízes associadas ao polinômio característico do sistema são complexas e conjugadas. Quando não, as próprias raízes serão então reais e deverão ser negativas.
Pela técnica do espaço de estado, do mesmo capítulo 2, foi dito que quando se trabalhar no plano matricial, essa característica deverá ser mantida. Apenas que nesse caso, ao invés de raízes, as incógnitas a serem levantadas são agora chamadas de autovalores relativos ao sistema em questão. Os autovalores, semelhantemente às raízes do polinômio característico da função de transferência de um sistema qualquer, como foi visto anteriormente, têm tudo a ver com a estabilidade operativa da resposta do sistema. Assim como foi escrito no texto do capítulo 2, no caso, os autovalores do sistema serão as raízes da equação característica.
Nota-se que esta definição é bem rigorosa, uma vez que ela não admite pólo simples no eixo imaginário, em outras palavras, pólos cuja parte real seja nula.
A idéia de estabilidade vem associada ao fato de que todos os componentes da resposta do sistema decrescerão ao longo do tempo para zero ou para outro valor finito e possível.
Quando o sistema admitir pólos cuja parte real seja nula ele será dito sistema marginalmente estável.
Esse texto foi um resumo daquilo que foi apresentado no capítulo 2 de maneira breve e sinótica.
Esse aspecto do estudo da estabilidade tem respaldo naquilo que se chamada de estabilidade absoluta. Porém, existe outro aspecto do estudo que se refere ao conceito de estabilidade relativa em que, mesmo sendo um sistema estável para determinadas condições, até quanto ele será estável e qual seria uma margem cotada para a estabilidade.

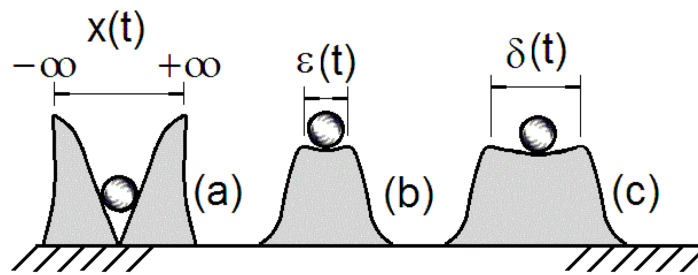



***Figura 6.1 – Exemplos Físicos de Estabilidade Relativa***

A figura 6.1 representa, de maneira bem simples, as condições de estabilidade de um sistema físico comum. Trata-se de esferas dispostas em superfícies aproximadamente cônicas. Na figura 6.1(a) tem-se uma variação para o estado no domínio do tempo $x(t)$ onde $-\infty < x(t) < +\infty$. Trata-se de um estado plenamente estável, podendo-se até designá-lo como um sistema cuja trajetória é assintoticamente estável. O mesmo já não se pode falar dos outros dois sistemas formados pelas figuras 6.1 (b) e (c). Estão numa condição estável, porém num grau bem restrito. Na figura 6.1(b) a situação é bem pior, pois no sistema da figura 6.1(c) há uma margem maior de estabilidade. Notar que a relação dos estados $\delta(t) > \varepsilon(t)$ é que garante essa afirmativa.
Na natureza, de um modo geral, e principalmente nos sistemas de controle reais, é comum encontrar sistemas do tipo representado pelas figuras 6.1 (b) e (c).

## 6.3.1. Estabilidade a Luz da Resposta em Freqüência

Seja um sistema de controle automático descrito pela figura 2.9 cuja função de transferência de malha fechada é dada pela equação 2.78, repetida a seguir por comodidade:

$$\frac{\Delta C(S)}{\Delta B(S)} = \frac{g(S)}{1 + g(S)h(S)}$$

Como se sabe, o polinômio ou a equação característica do sistema, na variável complexa de Laplace $S$, será a equação do denominador da função de transferência de malha fechada sendo aqui denominada de $D(S)$:

$$D(S) = 1 + g(S)h(S) \tag{6.1}$$

As raízes desse polinômio $D(S)$ representam os chamados pólos da função de transferência do modelo e conforme os valores assumidos por esses pólos o sistema pode ser declarado estável ou instável quanto a sua capacidade operacional.

Por força de definição, cumpre-se que as raízes da equação característica serão então as raízes da equação seguinte:

$$1+g(S)h(S)=0 \qquad (6.2)$$

Agora, como então definir uma margem de estabilidade de um determinado sistema de controle?
Evidentemente que uma resposta a esse questionamento tem tudo a ver com as propriedades desse sistema e, para tal, a inspeção das raízes ou dos autovalores da equação característica da função de transferência em malha fechada é uma questão *sine qua non*.

A técnica mais utilizada, até por sua enorme difusão, é a análise da resposta em freqüência do sistema onde é montada uma disposição conhecida por plano de Bode, referindo-se ao Engenheiro norte-americano Hendrik Wade Bode que primeiro a utilizou. Trata-se do simples traçado de dois gráficos de resposta em freqüência, sendo um deles o gráfico do ganho do sistema e outro o de sua fase tendo ambas funções como domínio a freqüência dos eventos.
Esse assunto já foi abordado no capítulo 2 onde foram traçados tais gráficos considerando-se um sistema simples de primeira ordem. Ver figuras 2.21 e 2.22.

A figura 6.2 traz a resposta em freqüência de um sistema de regulação de velocidade fictício do qual foi extraída a função de transferência do processo para que se possam desenvolver os devidos argumentos sobre a questão da estabilidade relativa.
As curvas no plano de Bode podem ser vistas tanto em ganho quanto em fase. A freqüência é dada em Hertz e disposta em escala logarítmica no eixo das abscissas, uma característica peculiar do plano de Bode.
Assim como já foi descrito no capítulo 2, na parte em que se estudaram as curvas de resposta em freqüência, o gráfico do ganho encontra-se dado em decibel e o gráfico da fase dado em graus.
As freqüências $\omega_1$ e $\omega_\pi$, respectivamente, representam aquelas freqüências em que, primeiro, o ponto do eixo das abscissas cujo valor do ganho da função de transferência é nulo, segundo, o ponto cujo valor da fase da função de transferência é $180°$ ou $-180°$. Nos gráficos da figura 6.2 se encontram assinalados os valores da margem de fase, no caso $20°$, e da margem de ganho, no caso aproximadamente $17{,}5\ db$. Tais medidas são assim designadas por definição.
Como a questão do ajuste é o ponto fundamental a ser desejado, no caso do método da resposta em freqüência, é importante o conhecimento pleno da função de transferência do sistema.
Muitas vezes, durante ensaios para a obtenção da função de transferência do processo, a fim de se ajustar a função de transferência de um determinado compensador, é importante guardar sempre a idéia de que tal método exige que o sistema seja linear. Deste modo, há que se garantir de que durante os levantamentos executados em campo, por exemplo, os devidos cuidados sejam tomados para que, nas excursões dos sinais registrados, não ocorra o fenômeno da saturação, facilmente observado na forma de onda do sinal senoidal.
Outra observação que se faz, considerando a prática, é quanto à faixa de freqüência a ser varrida. Lembrar que para reguladores de velocidade, por exemplo, a faixa de freqüência deverá estar entre $0{,}001$ e $1\ Hz$.
Já para sistemas de excitação, a faixa de freqüência poderá ser $0{,}01$ e $10\ Hz$. Dependendo do tipo de sistema de excitação esta faixa poderá ser alterada.

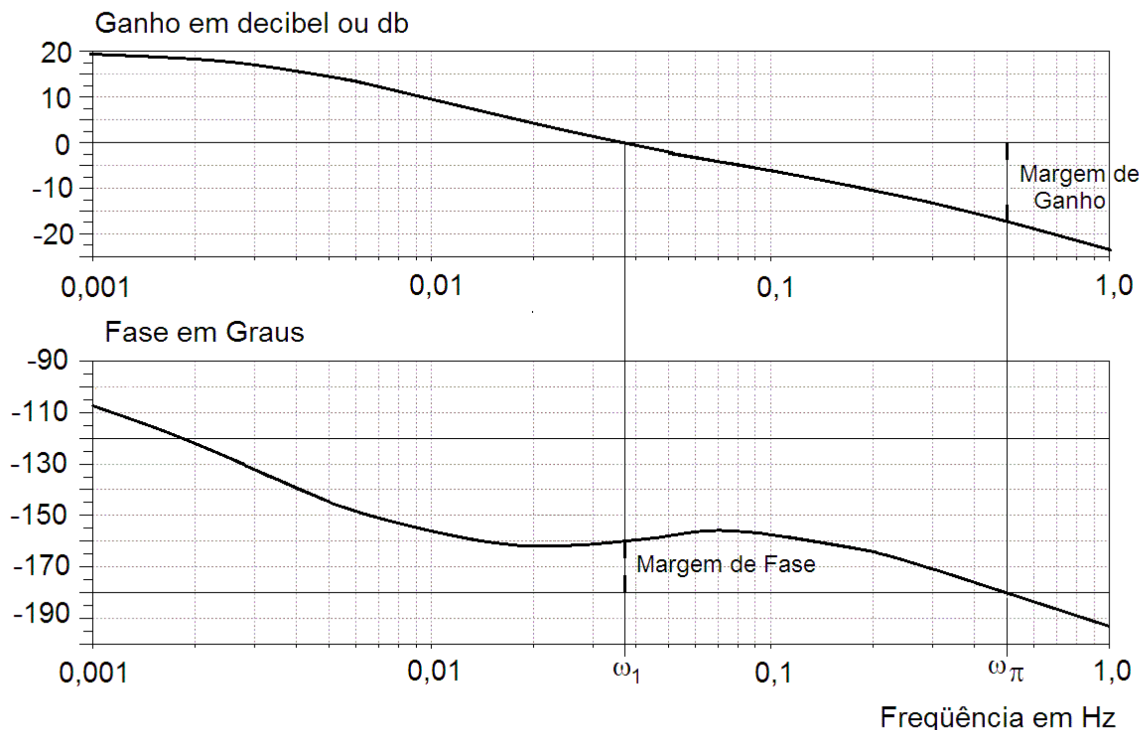



***Figura 6.2 – Resposta em Freqüência de um Sistema de Regulação Fictício***

## 6.3.2. Estabilidade a Luz do Método do Lugar Das Raízes

O método de estudo da estabilidade a luz do lugar geométrico das raízes de sistemas lineares foi introduzido na teoria de controle pelo Engenheiro Eletricista norte-americano Walter Richard Evans.

Esse método tem como finalidade explorar a questão da influência na elevação do ganho de canal direto, de uma determinada função de transferência, *versus* a presença ou não de partes reais das raízes do polinômio característico distribuídas sobre o semi-plano direito de um gráfico cartesiano onde, no eixo das ordenadas, se encontram marcadas as partes imaginárias das raízes e, no eixo das abscissas, as suas partes reais. De outra maneira, o método visa verificar até que ponto a elevação do ganho de canal direto de uma função de transferência poderá torná-la instável, considerando-se o sistema de controle do tipo com realimentação.

Esse método se tornou uma ferramenta interessante para o caso em que se estuda a estabilidade principalmente em reguladores de tensão de máquinas síncronas.

Como se sabe, os reguladores de tensão, via de regra, operam com elevadas taxas de ganho de canal direto na malha de regulação de tensão de máquinas síncronas. Trata-se de uma imposição desse tipo de controle em função das necessidades já abordadas no capítulo anterior.

O método do lugar das raízes parte do mesmo desenvolvimento utilizado no capítulo 2, item 2.2.6, mais precisamente da equação 2.95, do qual tomou emprestado a análise.

A equação 2.95 é um padrão para o polinômio ou equação característica de um sistema de controle com realimentação no qual existe a prevalência de duas raízes

ou um par de raízes complexas conjugadas.
Essa abordagem leva em conta uma situação muito comum existente em sistemas de regulação de máquinas síncronas dotadas de turbinas hidráulicas.

Imagine-se um determinado sistema de controle, com realimentação, cujo polinômio característico da função de transferência em malha fechada se encontra descrito a seguir e suas raízes seguindo após esse.

$$Q(S) \equiv S^2 + 2\xi\,\omega_n\,S + \omega_n{}^2$$

$$S_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm j\,\omega_n\,\sqrt{1-\xi^2}$$

A resposta no domínio do tempo $\Delta C(t)$, por exemplo, de um sistema desse tipo é dada pela equação 6.3 seguinte, retirada da solução do exemplo 2.17:

$$\Delta C(t) = \frac{1}{\omega_n\,\sqrt{1-\xi^2}}\; e^{-j\,\xi\,\omega_n\,t}\; sen(\omega_n\,\sqrt{1-\xi^2}\;t) \qquad (6.3)$$

As raízes, que normalmente são as raízes dominantes da resposta no domínio do tempo desse sistema, podem ser representadas num gráfico cartesiano onde seja possível estabelecer uma relação entre a representação em coordenadas retangulares das raízes com sua representação em coordenadas polares.
A figura 6.3 mostra a representação do par de raízes complexas dominante.

Por uma imposição dos cálculos, define-se que:

$$\cos\theta = \xi \quad \therefore \quad \theta = arc\ \cos\xi \qquad (6.4)$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\xi^2} \qquad (6.5)$$

Por outro lado, conforme a disposição, se o par de raízes $S_{1,2}$ vier a apresentar as suas partes reais positivas, isso vem revelar que, segundo a expressão de resposta no domínio do tempo dada pela equação 6.3, tal sistema é instável. Mesmo que as partes reais dessas raízes forem nulas, ainda assim o sistema não pode ser declarado plenamente estável.

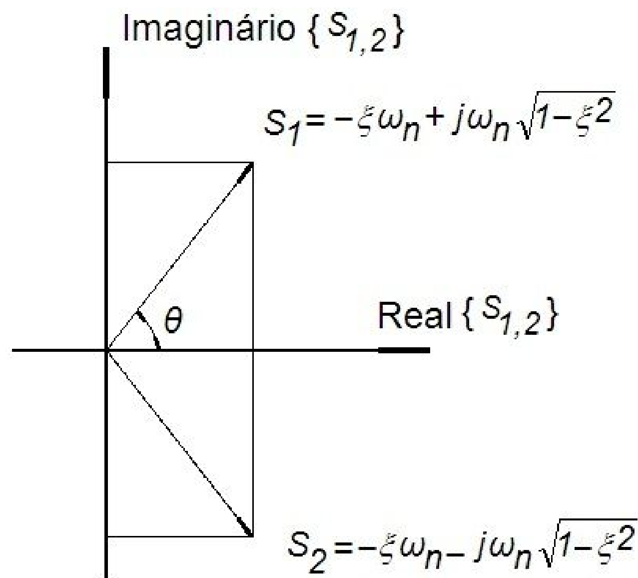



***Figura 6.3 – Representação Geométrica das Raízes Complexas Conjugadas***

O método do lugar das raízes permite que se estude a variação do ganho de canal direto frente ao gráfico dessas raízes do polinômio característico.

No exemplo 6.1, é mostrado como se traça, na prática, um gráfico aplicando a técnica desse método.

---

## EXEMPLO 6.1

Desenhar o gráfico do lugar geométrico das raízes do sistema de controle de realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é dada pela seguinte equação:

$$g(S)h(S) = \frac{K}{S(1+S)(2+S)}$$

Em seguida, considerando-se a necessidade de se ter para o sistema um coeficiente de amortecimento de $\xi = 0{,}707$ , qual o valor de $K$ que atenderia a essa condição. O que se pode dizer dessa situação?

**Solução:**

A função de transferência de malha fechada desse sistema é dada pela seguinte expressão, considerando-se a realimentação unitária:

$$\frac{\Delta y(S)}{\Delta x(S)} = \frac{g(S)}{1+g(S)} = \frac{K}{K+S(1+S)(2+S)}$$

onde

$\Delta x(S)$ : variação do sinal de entrada

$\Delta y(S)$ : variação do sinal de saída

$S$ : variável complexa de Laplace

O gráfico do lugar do lugar das raízes pode ser visto na figura 6.4 seguinte. Ele foi traçado dando-se valores ao parâmetro $K$ da função de transferência de malha fechada e calculando-se, posteriormente, o valor das raízes do polinômio característico associado. De posse das raízes, o gráfico é então traçado. Esses valores se encontram em linha cheia. Como as raízes complexas são conjugadas, essa propriedade é responsável pela simetria do desenho no gráfico.

No gráfico da figura 6.4 foi considerado que $cos\ \theta = cos 135^o \cong -0,707$ , sendo $\theta$ o ângulo de um dos pólos da função de transferência de malha fechada do sistema.

O ponto pedido está associado a um par de raízes complexas conjugadas cuja parte real encontra-se sobre o semi-plano esquerdo do plano do lugar das raízes que valem aproximadamente $S_{1,2} = -0,375 \pm j0,375$ .

Trata-se de um ponto de estabilidade!

A determinação do valor de $K$ necessitará da comparação entre os coeficientes das equações características aproximadas da função de transferência de malha fechada.

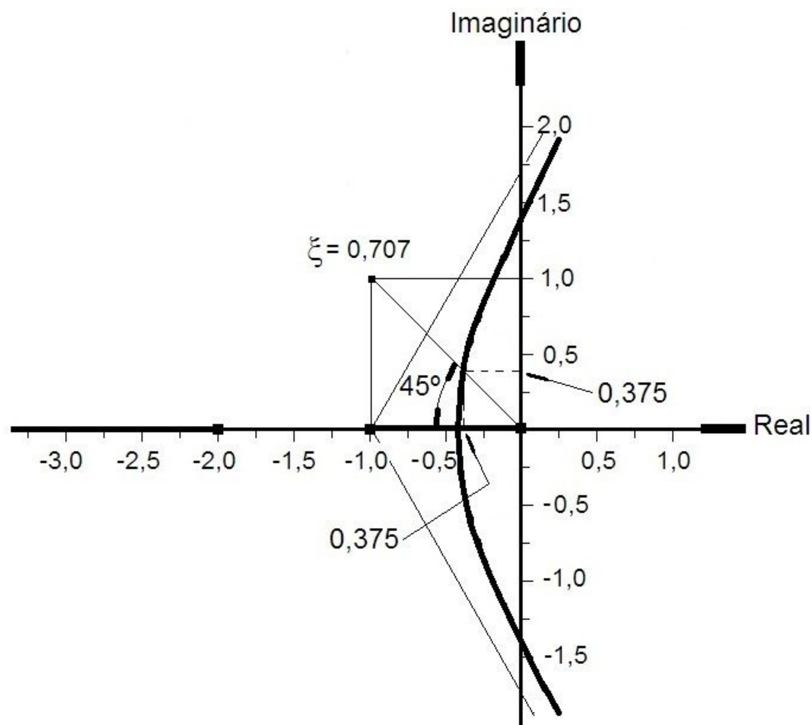



***Figura 6.4 – Lugar das Raízes do Exemplo 6.1***

O polinômio denominador da função de transferência de malha fechada pode ser assim escrito, onde $a$ é uma raiz real desconhecida:

$$Q(S) = (S + 0{,}375 - j0{,}375)(S + 0{,}375 + j0{,}375)(S + a) =$$

$$= (S^2 + 0{,}75S + 0{,}28125)(S + a) =$$

$$= S^3 + (0{,}75 + a)S^2 + (0{,}28125 + 0{,}75a)S + 0{,}28125a$$

Por outro lado, sabe-se também que o polinômio característico, através da expressão da função de transferência de malha fechada, tem a seguinte forma

$$Q(S) = K + S(1+S)(2+S) = S^3 + 3S^2 + 2S + K$$

Assim, igualando-se os dois polinômios $Q(S)$, vem que:

$$S^3 + (0{,}75 + a)S^2 + (0{,}28125 + 0{,}75a)S + 0{,}28125a \equiv S^3 + 3S^2 + 2S + K$$

As seguintes equações podem ser obtidas:

$0{,}75 + a_1 = 3 \quad \therefore \quad a_1 = 2{,}25$

$0{,}28125 + 0{,}75\,a_2 = 2 \quad \therefore \quad a_2 = 2{,}29$

$0{,}28125\,a = K$

A obtenção de dois valores diferentes para a raiz real $a$ se deve ao fato de que, graficamente, houve uma ligeira aproximação.

Adotando um valor médio para a raiz $a$ vem que:

$$a \cong \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2{,}25 + 2{,}29}{2} = 2{,}27 \quad \therefore \quad K = 0{,}28125 \times 2{,}27 = 0{,}638$$

Assim, o polinômio característico será então:

$$Q(S) \cong S^3 + 3S^2 + 2S + 0{,}638$$

**Verificação:** analiticamente calculando, as raízes do polinômio característico $Q(S)$ da expressão anterior são as seguintes:

$-0{,}384 \pm j0{,}372$

$-2{,}232$

A figura 6.5 mostra o formato da resposta no domínio do tempo a um degrau na entrada do sistema com os dados calculados. Notar que a curva de resposta praticamente não apresenta ultrapassagem, razão esta explicada pelo elevado valor do coeficiente de amortecimento adotado.

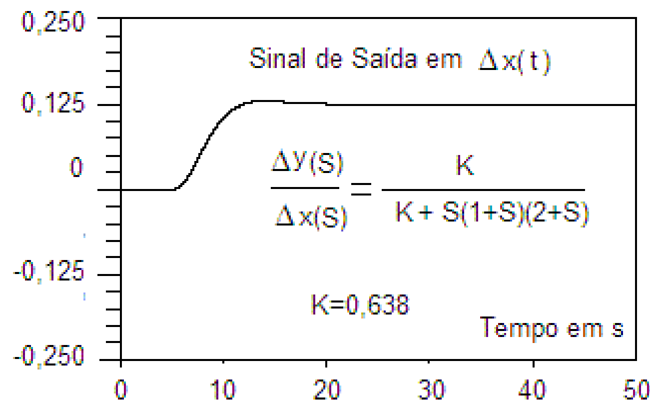



***Figura 6.5 – Resposta ao Degrau do Sistema do Exemplo 6.1***

## 6.3.3. Comentários Gerais sobre Estabilidade

Como pode ser notado no desenvolvimento dos tópicos anteriores, existem dois grandes grupos de abordagem dentro do tema estabilidade de sistemas de controle automático. Um deles foca a condição operativa dentro de uma situação global que, como já foi mencionado, prima pela exploração do problema num contexto mais acadêmico ou mesmo de uma pesquisa enquanto o outro já tem um foco mais local ou mesmo regional, como se referem alguns autores. A abordagem local é mais

prática já que, em seu dia a dia, o Engenheiro lida com sistemas limitados dentro do contexto operacional de um projeto e não de uma pesquisa teórica.
Os métodos de resposta em freqüência são métodos que permitem a análise de uma condição de estabilidade relativa de fundamental importância. Os métodos preferidos são o método da resposta em freqüência utilizando o plano de Bode e o método do lugar das raízes de Evans. Já os métodos de Nyquist e de Nichols, embora de resposta em freqüência, são pouco utilizados, talvez pela dificuldade de interpretação dos resultados ou mesmo na dificuldade na elaboração das cartas de freqüência. O certo é que são pouco utilizados na prática do dia a dia. Os métodos de Routh, de Hurwitz e o método de análise por fração contínua, podem ser vistos na literatura de controle, porém são métodos de tipo é estável ou não é estável, apenas isso, muito embora sejam de fácil consecução. Hoje em dia, com a facilidade de obtenção de aplicativos para a determinação das raízes de um polinômio de elevado grau ou mesmo dos autovalores de uma matriz, esses métodos ficaram mais no campo acadêmico.
Outros métodos mais modernos focando técnicas com a abordagem de sistemas de controle por variáveis de estado tais como os métodos de Lyapunov, o método LQR ou até mesmo o método via MPC, ou *Model Predictive Control* , cujo conjunto de pormenores pertence ao plano da matemática matricial, com certeza acabam mesmo se limitando ao campo acadêmico. Na prática, não é muito comum por parte de fabricantes e projetistas da área de regulação de velocidade para turbinas hidráulicas e de regulação de tensão de máquinas síncronas apresentarem seus sistemas de controle na forma de variáveis de estado. Nem o cliente, muitas vezes, está interessado nesse tipo de abordagem. O que se vê são funções de transferência apresentadas em matemática contínua mesmo.
Outro fator que age como um complicador é utilização de modelos em matemática numérica ou discreta onde a transformação de Laplace é substituída pela conhecida transformada Z que não é tema desse livro.

## 6.4. Estabilidade Ligada ao Regulador de Velocidade

O regulador de velocidade é um dispositivo que, como já discutido no capítulo 3, apresenta um conjunto de funções sendo que é na operação automática de controle da velocidade ou rotação ou freqüência que ele se envolve com o controle da potência ativa mecânica do órgão motriz que, para o caso presente, é uma turbina hidráulica.
Existem alguns fatores que se tornam críticos para o processo de regulação de velocidade. Um deles é a manutenção da pressão de serviço do sistema ar-óleo pressurizado, uma questão observada em qualquer tipo de regulador, seja ele puramente mecânico, seja ele um regulador ultramoderno de tecnologia eletrônico-digital. Quando o sistema elétrico se apresenta oscilante durante uma determinada ocorrência, culminando com grandes excursões do servomotor das palhetas de uma turbina, por exemplo, conforme o tamanho do tempo de amortecimento dessas oscilações, é bem possível que seja deliberado o TRIP ou desligamento de uma ou mais unidades de geração por baixa pressão do sistema hidráulico, ação esta normalmente acompanhada do comando de fechamento da comporta de tomada de água da máquina em questão. Esse é um dos possíveis problemas advindos quando o sistema for sujeito a algum tipo de ocorrência de grande porte e não estiver adequadamente preparado para tal.

A figura 3.32 mostra o diagrama em blocos de um sistema de regulação de velocidade do qual foi extraída a função de transferência de malha aberta do processo. A figura 6.6 traz parte desse diagrama em blocos para análise. Notar que foi inserida no diagrama em blocos a função de transferência equivalente ao conjunto de válvulas aqui representado pela conhecida constante de tempo do regulador de velocidade $T_G$.

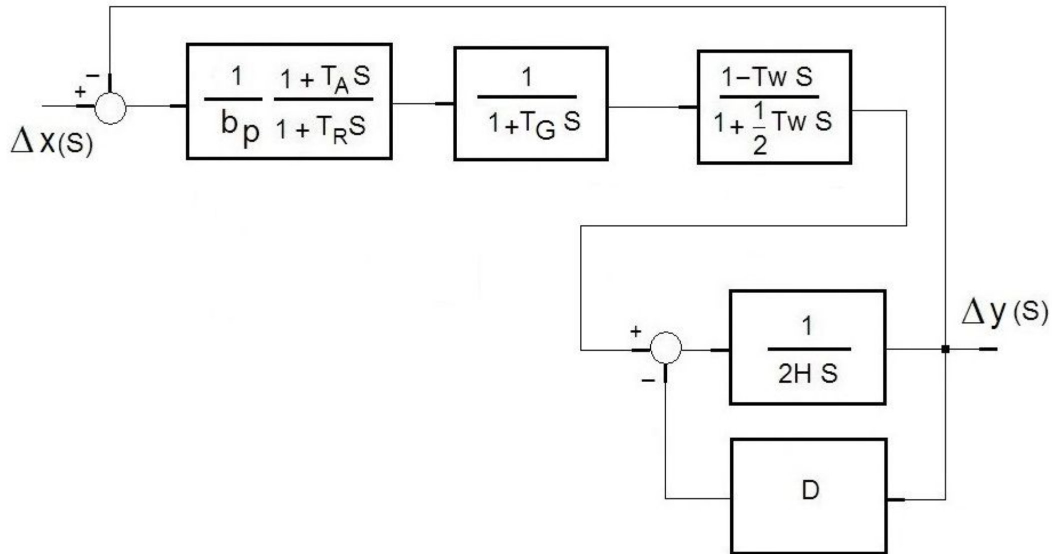



***Figura 6.6 – Esquema de um Regulador de Velocidade***

A função de transferência de malha aberta do processo, no plano complexo de Laplace, mostrado na figura 6.6, é dada a seguir onde todos os parâmetros se encontram em por unidade, sendo as funções *x(S)* e *y(S)* apenas funções genéricas para efeito de análise.

$$g(S) = \frac{(1+T_A S)(1-T_W S)}{b_p D(1+T_G S)(1+T_R S)(1+\frac{1}{2}T_W S)(1+\frac{2H}{D}S)} =$$

em pu/pu (6.6)

$$= \frac{(1+6{,}907S)(1-2{,}6S)}{0{,}05\,x 2{,}0(1+0{,}3S)(1+51{,}8S)(1+1{,}3S)(1+6{,}16S)}$$

Para a realização dessa análise, serão dados aos parâmetros da equação 6.6 valores que foram levantados a partir de ensaios de campo realizados em uma instalação de grande porte do SIN. Os parâmetros relativos à realimentação transitória, cuja função é introduzir o efeito do estatismo ou queda transitória no sistema de controle, foram deixados na forma literal. O formato da função de compensação do bloco transitório é o mesmo que aquele descrito no capítulo 3.
Na realidade, o ajuste do regulador de velocidade tem tudo a ver com o ajuste do bloco transitório em função das características particulares da instalação hidráulica.

Ele será responsável pela incorporação do esperado efeito compensador dos atrasos introduzidos na malha de controle de velocidade pelas inércias mecânicas.

Assim, tem-se que:

$$g(S) = \frac{(1+T_A S)(1-2{,}6S)}{0{,}1(1+0{,}3S)(1+T_R S)(1+1{,}3S)(1+6{,}16S)} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.7)$$

Também relativos aos ensaios de campo, os seguintes parâmetros referentes à equação 6.6 foram obtidos:

$b_p = 0{,}05$ pu/pu

$T_G = 0{,}3$ s

$D = 2{,}0$ pu/pu

A função de transferência da malha de controle global do diagrama em blocos da figura 6.6 será dada pela seguinte expressão segundo aquilo que foi descrito pela figura 2.9 cuja função de transferência de malha fechada foi dada pela equação 2.78, onde a realimentação é unitária:

$$\frac{\Delta y(S)}{\Delta x(S)} = \frac{g(S)}{1+g(S)} \qquad (6.8)$$

Como é sabido, e já foi discutida no capítulo 3, a introdução da malha de realimentação transitória se deve ao fato da existência de atrasos na resposta da malha de regulação de velocidade em função da presença das inércias mecânico-hidráulicas de rotação do conjunto girante. Deste modo, conhecendo-se os valores de tais inércias, estipula-se o que seria considerado alta freqüência para tais inércias e ajusta-se a compensação transitória de modo a se prover o regulador automático de um redutor de ganho na faixa de tais freqüências. Seria como um filtro para altas freqüências do tipo mecânico-hidráulica.

Sendo $g_R(S)$ a função de transferência do sistema de regulação de velocidade, desconsiderando-se a constante de tempo do regulador em face do valor da constante de tempo de escoamento ou de *washout* do regulador de velocidade, vem que:

$$g_R(S) = -\frac{(1+T_A S)}{b_p(1+T_R S)} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.9)$$

Nas altas freqüências, a variável complexa de Laplace, fisicamente, tenderá ao infinito, ou seja $S \to \infty$, o que permite que se reescreva a equação 6.10 para essa condição.

$$g_R(S \to \infty) = \lim_{S \to \infty} -\frac{(1+T_A S)}{b_p(1+T_R S)} = -\frac{T_A}{b_p T_R} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.10)$$

Lembrando-se da equação 3.174, a constante de escoamento do regulador de velocidade é dada por $T_R = (1+\frac{b_t}{b_p})T_A$ e disso vem que a equação 6.10 poderá ser resumida para a seguinte expressão:

$$g_R(S \to \infty) = -\frac{T_A}{b_p(1+\frac{b_t}{b_p})T_A} = -\frac{1}{b_p + b_t} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.11)$$

Assim, o ganho do regulador de velocidade automático, que em regime permanente ou baixas freqüências, considerando-se a dinâmica mecânico-hidráulica do conjunto girante, vale $g_R(S \to 0) = -\frac{1}{b_p}$, passará a valer $g_R(S \to \infty) = -\frac{1}{b_p + b_t}$ nas altas freqüências assim assinaladas.

Com base na equação 6.7, separando a função de transferência do processo e denominando-a de $g_P(S)$, desprezando a constante de tempo $T_G$, tem-se que:

$$g_P(S) = \frac{(1-T_W S)}{D(1+\frac{1}{2}T_W S)(1+\frac{2H}{D}S)} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.12)$$

Com os valores aplicados:

$$g_P(S) = \frac{(1-2,6S)}{2(1+1,3S)(1+6,16S)} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.13)$$

As três freqüências de esquina ou de corte envolvidas no processo são as seguintes:

a) zero → $\omega_1 = \frac{1}{T_W} = \frac{1}{2,6} = 0,384 \ rad/s \to 0,061 Hz$

b) pólos → $\omega_2 = \frac{2}{T_W} = \frac{2}{2,6} = 0,769 \ rad/s \to 0,122 Hz$

$\omega_3 = \frac{D}{2H} = \frac{2}{2x6,16} = 0,162 \ rad/s \to 0,258 Hz$

A figura 6.7 traz os gráficos do ganho e da fase da função de transferência do

processo $\frac{1}{b_p} g_P(S)$ no plano de Bode.

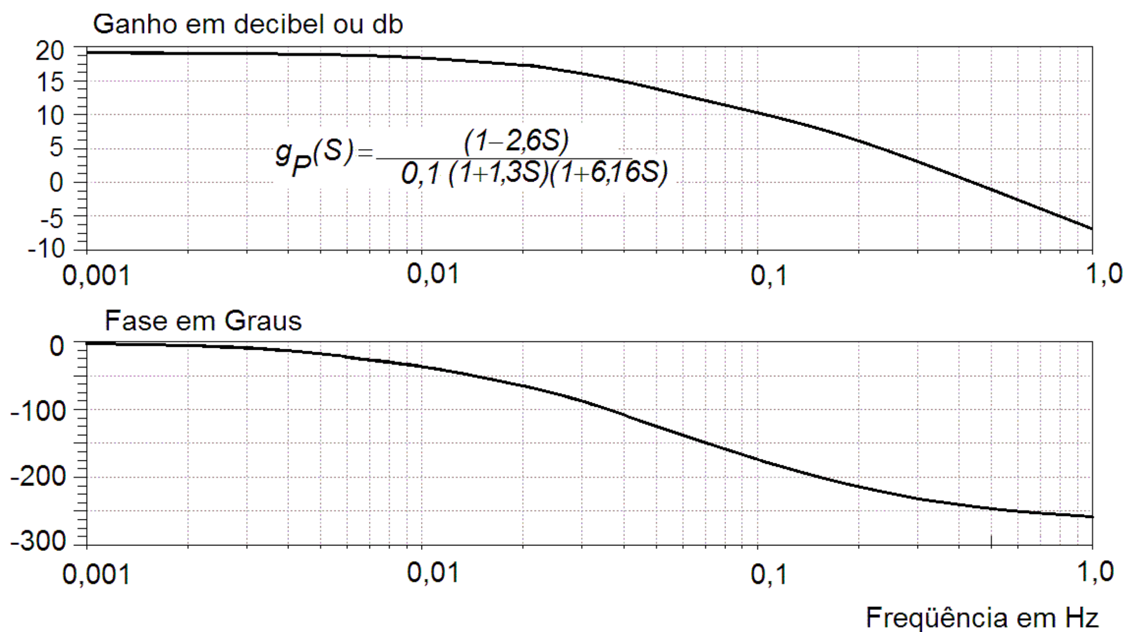



***Figura 6.7 – Plano de Bode para a Função de Transferência*** $g_P(S)$

Para se proceder aos devidos ajustes do bloco de estatismo transitório do regulador de velocidade, deverão ser estabelecidos os seguintes critérios que foram sugeridos e seguidos pela maioria dos estudiosos que lidam com esse tipo de problema:

a) definir o ponto de *cross over point* onde o ganho unitário da função de transferência em malha aberta global do sistema de regulação de velocidade deverá cruzar o eixo das abscissas, considerando-se o plano de Bode;

b) em seguida, estipular um valor entre $-30^o$ e $-50^o$ para a margem de fase da função de transferência em malha aberta global do sistema no mesmo valor de freqüência correspondente ao ganho unitário.

Para o sistema em questão, a freqüência crítica será aquela correspondente às inércias mecânico-hidráulicas, ou seja, $\omega_3 = 0{,}162\ rad/s \rightarrow 0{,}258\,Hz$, enquanto para a margem de fase será adotado o valor de $-50^o$.

Através do que ficou estabelecido, a fase sugerida numa primeira etapa para a função de transferência global será então:

$$\varphi_{g\,(S)} = -180-(-50) = -130^o$$

Com a definição da fase deve-se agora calcular as contribuições de cada membro da função de transferência global afim de que seja obtido o valor a ser realmente compensado.

a) A contribuição do bloco relativo à função de transferência das inércias mecânico-hidráulicas $\dfrac{1}{1+\dfrac{2H}{D}S}$ em $\omega = 0,162\ rad/s$ ou $f = 0,0258\ Hz$ será:

$$\varphi_{2H/D} = -arc\,tg\,(\frac{2H}{D}\omega) = -\,arc\,tg\,(6,16\ x\ 0,162) = -\,44,94^o$$

b) A contribuição do bloco relativo à função de transferência da tubulação hidráulica $\dfrac{(1-T_W S)}{(1+\dfrac{1}{2}T_W S)}$ em $\omega = 0,162\ rad/s$ ou $f = 0,0258\ Hz$ será:

$$\varphi_{T_W} = arc\,tg\,(-\omega T_W) - arc\,tg\,(\frac{1}{2}\omega T_W) =$$

$$= arc\,tg\,(-2,6\ x\ 0,162) - arc\,tg\,(1,3\ x\ 0,162) = -\,34,73^o$$

Caso a parcela relativa à constante de tempo do regulador, $T_G$, seja considerada tem-se ainda que:

c) A contribuição da função $\dfrac{1}{1+T_G S}$ em $\omega = 0,162\ rad/s$ ou $f = 0,0258\ Hz$ será:

$$\varphi_{T_G} = -arc\,tg\,(T_G\,\omega) = -arc\,tg\,(0,3\ x\ 0,162) = -\,2,78^o$$

d) O regulador automático deverá contribuir com a seguinte fase:

$$\varphi_R = \varphi_{g(S)} - \varphi_{2H/D} - \varphi_{T_W} - \varphi_{T_G} = -130^o - (-44,94^o - 34,73^o - 2,78^o) = -47,55^o$$

Assim, o regulador de velocidade, composto agora pelo bloco que contém a função de transferência, conforme está dado na equação 6.9, na freqüência $\omega = 0,162\ rad/s$ ou $f = 0,0258\ Hz$, deverá ter uma fase de $\varphi_R = -\,47,55^o$.

e) Considerando-se a função de transferência global de malha aberta do sistema de regulação de velocidade $g(S)$, para $\omega = 0,162\ rad/s$ ou $f = 0,0258\ Hz$, com ganho unitário, tomando-se como ganho do bloco do regulador de velocidade por $\dfrac{1}{r+R}$:

$$|g(S)| = \frac{1}{D(b_p + b_t)}\sqrt{\frac{1+(\omega T_W)^2}{[1+(\omega T_G)^2]\ [1+(\frac{1}{2}\omega T_W)^2]\ [1+(\omega \frac{2H}{D})^2]}} = 1$$

$$|g(j0,162)| = \frac{1}{2(0,05+b_t)}\sqrt{\frac{1+0,177}{(1+0,002)\ (1+0,044)\ (1+0,995)}} = 1$$

Donde se tem que:

$$\frac{0,751}{2(0,05+b_t)} = 1 \quad \therefore \quad b_t = 0,325\ pu/pu$$

f) Para a função de transferência do regulador automático $g_R(S)$, sabe-se que, na freqüência estipulada de $\omega = 0,162\ rad/s$ ou $f = 0,0258\ Hz$, a fase deverá ser $\varphi_R = -47,55^o$ , logo:

$$\varphi_R = arc\,tg\,(T_A\,\omega) - arc\,tg\,(T_R\,\omega) = -\ 47,55^o \qquad (6.14)$$

Como na trigonometria $tg\,(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\ tg\,\beta}$, a equação 6.14 tomará a seguinte forma:

$$tg\ [arc\,tg\,(T_A\,\omega) - arc\,tg\,(T_R\,\omega)\ ] = tg\,(-\ 47,55^o\ ) = -\ 1,09 \qquad (6.15)$$

Desenvolvendo-se a equação 6.15 vem que:

$$\frac{T_A\,\omega\ - T_R\,\omega}{1+T_A\,T_R\,\omega^2} = -\ 1,09 \qquad (6.16)$$

Como $T_R = (1+\dfrac{b_t}{b_p})T_A$, tem-se que, substituindo os valores já determinados:

$$T_R = (1+\frac{0,325}{0,05})T_A = 7,5\,T_A$$

Substituindo-se os valores já determinados, até aqui, na equação 6.16, bem como a relação entre $T_R$ e $T_A$ vem que:

$$\frac{T_A x 0,162\ - 7,5\ x T_A x 0,162}{1+T_A\ x\ 7,5\ x\ T_A\ x(0,162)^2} = -\ 1,09$$

Pela equação anterior pode-se escrever a seguinte equação do segundo grau na variável $T_A$:

$$T_A{}^2\ - 4,92\,T_A + 5,09 = 0 \qquad (6.17)$$

A solução da equação 6.17 fornece duas soluções, a saber:

$T_{A1} = 3{,}44\,s$ e $T_{A2} = 1{,}48\,s$

Com os ajustes propostos se consegue uma boa margem de fase para o regulador de velocidade operar num sistema interligado.
Apesar da suposição de que um sistema forte permite maior estabilidade operativa deve se sempre ter em mente que esta é uma situação conservativa.
É evidente que se for considerado o efeito da malha do ângulo de potência via coeficiente de torque sincronizante duas importantes situações serão apresentadas, quais sejam: a condição operativa em rede interligada e a condição operativa em rede isolada. Nestas duas condições a pior condição operativa é aquela determinada pela operação em rede isolada quando o coeficiente de torque sincronizante é reduzido abruptamente.
Para os casos em que a instalação deve operar sob tais condições, até por segurança, é necessário que a margem de fase da função de transferência em malha aberta global seja alta.
Para o exemplo da instalação em questão, optou-se por uma margem de fase de $-62{,}55^o$ na freqüência de $\omega = 0{,}162\ rad/s$, por razões específicas apresentadas pela área de estudos de estabilidade, o que exigirá como contribuição do regulador automático o seguinte valor de fase:

$$\varphi_{g(S)} = -180 - (-62{,}55) = -117{,}45^o$$

Logo

$$\varphi_R = \varphi_{g(S)} - \varphi_{2H/D} - \varphi_{T_W} - \varphi_{T_G} = -117{,}45^o - (-44{,}94^o - 34{,}73^o - 2{,}78^o) = -35^o$$

Assim, o regulador de velocidade, na freqüência $\omega = 0{,}162\ rad/s$ ou $f = 0{,}0258\ Hz$, deverá apresentar uma fase de – 35º.
Como para o *cross over point* o valor da queda transitória de velocidade já foi calculado e vale $b_t = 0{,}325\ pu/pu$, pela equação 6.16 tem-se que:

$$\frac{T_A\,\omega - T_R\,\omega}{1 + T_A T_R\,\omega^2} = tg(-35^o) = -0{,}700$$

Substituindo-se os valores já determinados, até aqui, na anterior, bem como a relação entre $T_R$ e $T_A$ vem que:

$$\frac{T_A x 0{,}162 - 7{,}5\,x T_A x 0{,}162}{1 + T_A\,x\,7{,}5\,x T_A\,x(0{,}162)^2} = -0{,}700$$

Do mesmo modo, pela equação anterior pode-se escrever a seguinte equação do segundo grau na variável $T_A$:

$$T_A^2 - 7{,}642\,T_A + 5{,}08 = 0 \qquad (6.18)$$

A solução da equação 6.18 fornece duas soluções, a saber:

$T_{A1} = 6{,}907\ s$ e $T_{A2} = 0{,}735\ s$

Pode-se concluir, analiticamente, que para um mesmo valor da queda transitória ou estatismo transitório a elevação no valor da constante de tempo da realimentação transitória tornará o regulador de velocidade mais duro, como é comum se dizer no jargão de quem lida com regulação, ou seja, insensível à faixa de freqüência superior a $\omega = 0{,}162\ rad/s$ ou $f = 0{,}0258\ Hz$ para o caso em questão.

A figura 6.8 mostra a comparação entre as curvas de resposta em freqüência para função de transferência $g(S)$, com o bloco de realimentação transitória ajustado para a queda transitória de velocidade em $b_t = 0{,}325\ pu/pu$ e a constante de tempo $T_A = 3{,}44\ s$ donde $T_R = 25{,}8\ s$ , e depois para a constante de tempo $T_A = 6{,}907\ s$ donde $T_R = 51{,}8\ s$ .

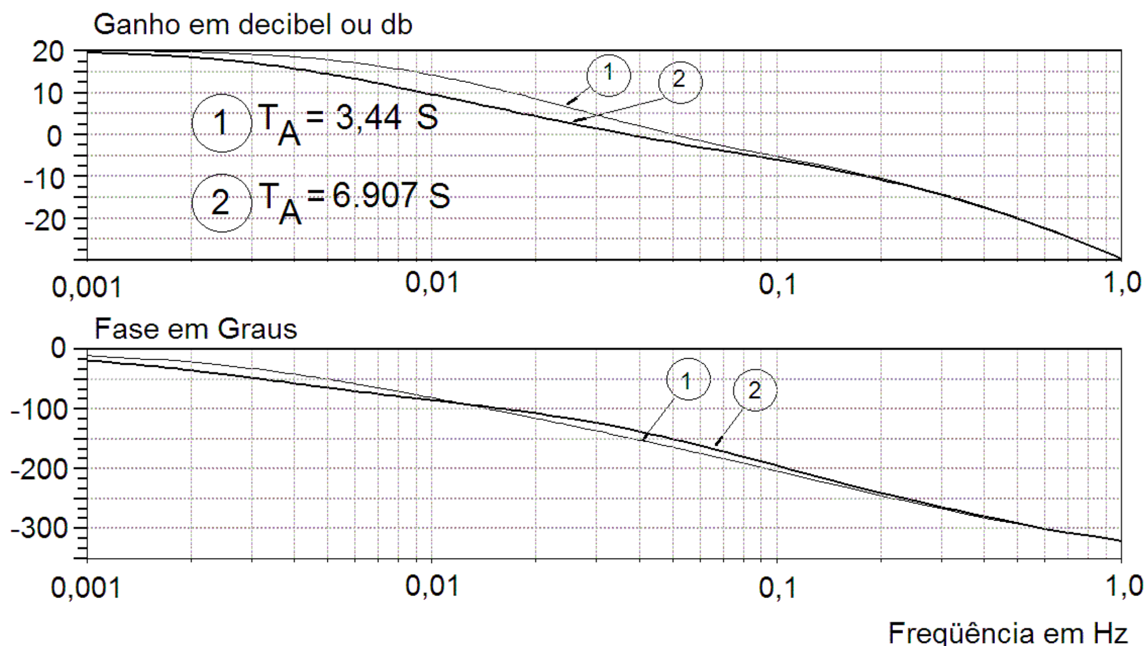



***Figura 6.8 – Plano de Bode da Função de Transferência do Processo de Regulação de Velocidade para Dois Valores de Ajuste da Realimentação Transitória***

Para o sistema de regulação de velocidade em questão, a figura 6.9 traz a resposta no domínio do tempo da saída $\Delta y(t)$ para a aplicação de um sinal na forma de um degrau na entrada $\Delta x(t)$.

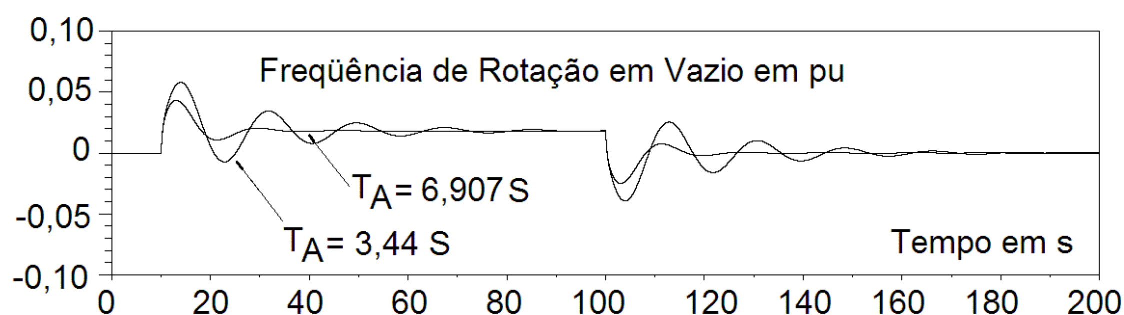



***Figura 6.9 – Resposta no Domínio do Tempo do Processo de Regulação de Velocidade para Dois Valores de Ajuste da Realimentação Transitória Sinal da Freqüência de Rotação em Vazio***

Pelo que foi calculado, e posteriormente mostrado nos gráficos da figura 6.9, conclui-se que a primeira tentativa de ajuste se apresentou na forma de um sistema mais oscilante que no caso da segunda tentativa. A oscilação vai estar sempre presente nesse tipo de abordagem, uma vez que o sistema está sendo analisado numa condição de operação em vazio.

Caso se queira verificar a resposta desse mesmo sistema numa condição de carregamento pleno seria necessário que se introduzisse o efeito da carga elétrica o que se daria com a conseqüente consideração do respectivo coeficiente de torque sincronizante que, para a presente instalação, foi calculado e vale $K_1 = 2{,}90$ pu/rad na base da própria máquina.

A resposta em carga, do curso do servomotor das palhetas diretrizes da turbina hidráulica, a um comando primeiro de abertura, no sentido de se aumentar a geração, e depois de fechamento, no sentido se diminuir o carregamento, pode ser visto na figura 6.10, para ambos os ajustes avaliados.

É perceptível como a elevação da margem de fase do sistema de controle, através da elevação da constante de tempo da queda transitória ou estatismo transitório, tornou o regulador de velocidade mais *duro*.

Muitos estudiosos de regulação de velocidade adotam esse critério que é também conhecido como *critério de ajuste do regulador de velocidade para a condição de operação em rede isolada*.

A questão é que, com um regulador de velocidade mais duro, durante fortes ocorrências do sistema elétrico por qualquer motivo, não haverá contribuição negativa desse órgão de controle. Durante o período de estabilidade dinâmica, se o regulador de velocidade tentar corrigir erros de freqüência ou potência ativa elétrica, fatalmente o sistema irá cair pelas razões já expostas. A questão tem tudo a ver com a redução brusca do torque sincronizante que quase sempre ocorre nessas circunstâncias em função de saída de LTs, muitas vezes deixando o sistema ainda em funcionamento num arranjo do tipo rede isolada, caracterizado por baixos valores de coeficiente de torque sincronizante.

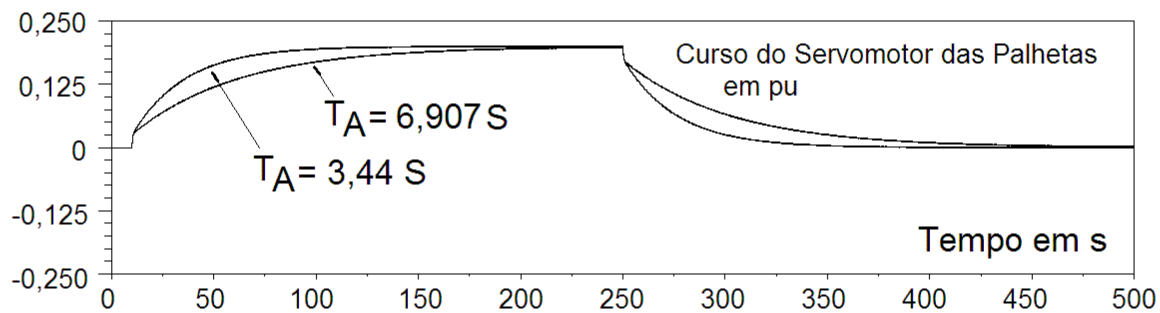



***Figura 6.10 – Resposta no Domínio do Tempo do Processo para Dois Valores de Ajuste da Realimentação Transitória***
***Sinal do Curso do Servomotor das Palhetas em Carga***

**Nota:** normalmente, as funções de transferência dos processos de controle e regulação de velocidade, em malha aberta, apresentam número de pólos maior que o número de zeros o que, na função de transferência global em malha fechada, impõe ao sistema a característica de apresentar um ganho elevado para baixas freqüências e ganho decrescente nas altas freqüências.

A figura 6.7 traz a característica do processo do sistema original com o regulador de velocidade, sem a malha de realimentação transitória, representado apenas pela queda permanente de velocidade ou estatismo permanente. Facilmente se percebe que a faixa de resposta é bem ampla sendo que as respostas a fenômenos de origem elétrica causarão atuação de correção na velocidade se esta for sensibilizada. Isto ocorrerá pelo fato de a malha de canal direto possuir um ganho elevado na faixa de freqüência de oscilação do conduto forçado e da inércia mecânica.
Observando agora a figura 6.8, nota-se como que a colocação da malha transitória fez reduzir o ganho nessa faixa de freqüência tornando o controle mais estável.

---

## <u>EXEMPLO 6.2</u>

Levando-se em conta o diagrama em blocos da figura 6.6, que representa o sistema de regulação de velocidade de uma turbina hidráulica operando em vazio, encontrar as equações de estado na forma de variáveis de estado desse sistema. Considerar uma entrada na variável de estado velocidade e duas saídas nas variáveis de estado velocidade e curso do servomotor das palhetas.
A partir daí, verificar a estabilidade do sistema pela inspeção de seus autovalores.

Considerar a seguinte função de transferência de malha aberta do sistema em questão com os seguintes valores:

$$g(S) = \frac{(1+T_A S)(1-T_W S)}{b_p D(1+T_G S)(1+T_R S)(1+\frac{1}{2}T_W S)(1+\frac{2H}{D}S)} =$$

$$= \frac{(1+6{,}907\,S)(1-2{,}6\,S)}{0{,}05x2\,(1+0{,}3\,S)(1+51{,}8\,S)(1+1{,}3\,S)(1+6{,}16\,S)}$$

**Solução:**

Para a elaboração das equações de estado será necessária a computação, passo a passo, da inter-relação entre as equações das diferentes variáveis de estado que compõem o sistema em questão. No presente caso, o sistema é de quarta ordem, bastando confirmar isso pelo número de pólos contidos na função de transferência de malha aberta.
Também será criada uma série de variáveis auxiliares, um procedimento corriqueiro nesses casos.

a) bloco do regulador de velocidade

$$g_R(S) = \frac{(1+T_A S)}{b_p\,(1+T_R S)} = \frac{v(2)}{v(1)}$$

A equação desmembrada conduz a seguinte equação correspondente ao diagrama em blocos da figura 6.11:

$$\frac{1}{S}[v(1)(\frac{1}{b_p T_R}) - v(2)(\frac{1}{T_R})] = v(2) - v(1)\frac{T_A}{b_p T_R}$$

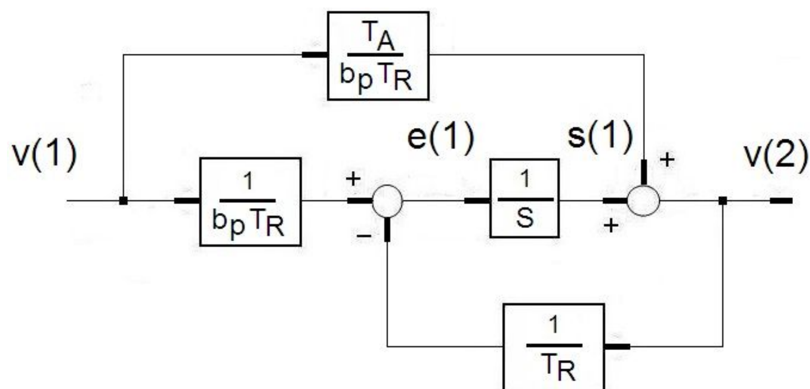



***Figura 6.11 – Diagrama em Blocos Descompactado da Função de Transferência do Regulador de Velocidade***

b) bloco referente às válvulas mecânicas

$$g_G(S) = \frac{1}{1+T_G S} = \frac{v(3)}{v(2)}$$

A equação desmembrada conduz a seguinte equação correspondente ao diagrama em blocos da figura 6.12:

$$\frac{1}{S}\left(\frac{1}{TG}\right)[v(2)-v(3)] = v(3)$$

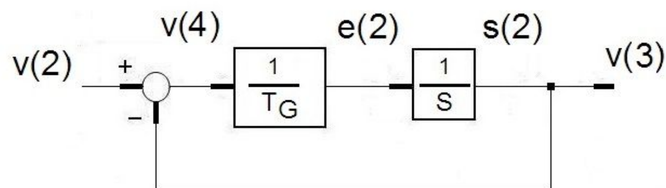



***Figura 6.12 – Diagrama em Blocos Descompactado da Função de Transferência das Válvulas Mecânicas***

c) bloco referente à tubulação forçada

$$g_T(S) = \frac{1-T_W S}{1+\frac{1}{2}T_W S} = \frac{v(4)}{v(3)}$$

A equação desmembrada conduz a seguinte equação correspondente ao diagrama em blocos da figura 6.13:

$$\frac{1}{S}\left(\frac{2}{T_W}\right)[v(3)-v(4)] = v(4)+2v(3)$$

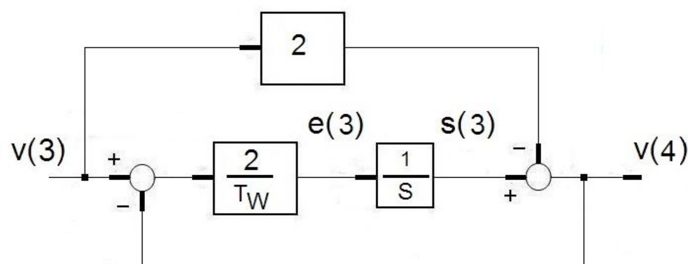



***Figura 6.13 – Diagrama em Blocos Descompactado da Função de Transferência da Tubulação Forçada***

d) bloco referente às inércias mecânicas da máquina

$$g_{2H}(S) = \frac{1}{D + 2HS} = \frac{v(7)}{v(6)}$$

A equação desmembrada conduz a seguinte equação correspondente ao diagrama em blocos da figura 6.14:

$$\frac{1}{S}(\frac{1}{2H})[v(6) - Dv(7)] = v(7)$$

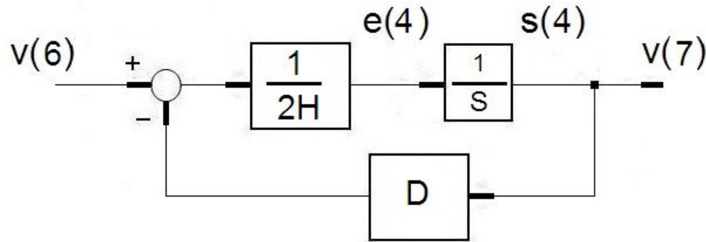



***Figura 6.14 – Diagrama em Blocos Descompactado da Função de Transferência das Inércias Mecânicas da Máquina Síncrona***

Utilizando-se da mesma notação para a designação de variáveis de estado usada no capítulo 2 vem, pela ordem, que:

$$\dot{s}(1) = -\frac{1}{T_R}s(1) + (\frac{T_A}{b_p T_R^2} - \frac{1}{b_p T_R})s(4) + \frac{1}{b_p T_R}(1 - \frac{T_A}{T_R})u(1)$$

$$\dot{s}(2) = \frac{1}{T_G}s(1) - \frac{1}{T_G}s(2) - \frac{T_A}{b_p T_G T_R}s(4) + \frac{T_A}{b_p T_G T_R}u(1)$$

$$\dot{s}(3) = \frac{6}{T_w}s(2) - \frac{2}{T_w}s(3)$$

$$\dot{s}(4) = -\frac{2}{2H}s(2) + \frac{1}{2H}s(3) - \frac{D}{2H}s(4)$$

$$y(1) = s(4)$$

Colocando-se as expressões anteriores na forma matricial dada pelas equações 2.214, vem que:

$$\dot{x}(S) = A\ x(S) + B\ u(S)$$

$$y(S) = C\ x(S) + D\ u(S)$$

onde

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \dot{s}(1) \\ \dot{s}(2) \\ \dot{s}(3) \\ \dot{s}(4) \end{bmatrix} \quad [x] = \begin{bmatrix} s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_R} & 0 & 0 & \frac{T_A}{b_p T_R^2} - \frac{1}{b_p T_R} \\ \frac{1}{T_G} & -\frac{1}{T_G} & 0 & -\frac{T_A}{b_p T_G T_R} \\ 0 & \frac{6}{T_w} & -\frac{2}{T_w} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2H} & \frac{1}{2H} & -\frac{D}{2H} \end{bmatrix}$$

$$[u] = [u(1)] \qquad [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_p T_R}(1 - \frac{T_A}{T_R}) \\ \frac{T_A}{b_p T_G T_R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [D] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trazendo, em cada uma das matrizes, os valores dados para os parâmetros, obtém-se que:

$$[x] = \begin{bmatrix} s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \end{bmatrix} \qquad [A] = \begin{bmatrix} -0{,}0190 & 0 & 0 & -0{,}334 \\ 3{,}333 & -3{,}333 & 0 & -8{,}889 \\ 0 & 2{,}307 & -0{,}769 & 0 \\ 0 & -0{,}162 & 0{,}081 & -0{,}162 \end{bmatrix}$$

$$[u] = [u(1)] \qquad [B] = \begin{bmatrix} 0{,}334 \\ 8{,}889 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Depois de montadas as equações matriciais de estado, será então possível verificar se o sistema é ou não é estável pela simples inspeção dos autovalores da chamada matriz da planta, aplicando-se diretamente a equação matricial 2.217, conforme o seguinte procedimento:

$$|S\,I - A| = 0$$

Os autovalores associados à matriz da planta são obtidos diretamente da solução do polinômio característico gerado pela solução do determinante anterior. Assim, tem-se que:

$$-3{,}8517$$

$$-0{,}14759 + j\,0{,}38169$$

$$-0{,}14759 - j\,0{,}38169$$

$$-0{,}1360$$

O sistema é estável !

---

## 6.5. Outros Critérios de Ajuste do Regulador de Velocidade

Como já foi citado anteriormente, existem outros tipos de critérios de ajuste do regulador de velocidade de uma forma geral.
No passado, os reguladores de velocidade eram ajustados mais por uma questão de sentimento norteado por um procedimento prático uma vez que, na grande maioria dos sistemas de controle e regulação de velocidade, o desconhecimento da modelagem, com suas funções de transferência, impedia um avanço maior na análise da estabilidade. Isso pode ser observado com a grande maioria das instalações do tipo PCH ou pequenos grupos de geração onde a modelagem, ainda hoje, ou não existe ou é desconhecida.
Existem centrais, em pleno funcionamento, em que se desconhecem completamente as funções de transferência tanto dos sistemas de regulação de velocidade quanto do sistema de excitação o que torna muito difícil a realização de estudos de estabilidade para tais instalações.

Um dos primeiros métodos era aplicar os critérios da chamada estabilidade BIBO, já referenciada anteriormente nesse capítulo.
O que se fazia era aproximar a resposta do sistema regulador a uma resposta que, mesmo um pouco oscilatória, respeitasse o critério de estabilidade BIBO.
A estabilidade pode ser assim definida: *um sistema é considerado estável no sentido BIBO se a qualquer entrada limitada em amplitude resultar como resposta correspondente uma saída também limitada em amplitude, respeitando-se as*

*condições operativas impostas a esse sistema*.
É interessante falar em estabilidade nesse sentido porque em assim sendo se evita a discussão sobre o traçado de limites globais de estabilidade.

O ponto de partida, nesse ínterim, seria imaginar a existência de uma função linear $y_X = f(x)$ onde $-L \leq x \leq +L$ com $|L| \leq \infty$.
Se houver dois pontos extremos de modo que se tenha $y_{-L} = f(-L) = -M$ e $y_{+L} = f(+L) = +M$ então, pode-se afirmar que $-M \leq y \leq +M$ com $|M| \leq \infty$, garantindo que o sistema em questão é estável no sentido BIBO.

Praticamente a grandeza na qual se concentrava o exame de inspeção era a velocidade de rotação ou freqüência quando era imposta sobre o *spool* da válvula proporcional uma determinada variação. Ali era verificada a condição de estabilidade.

Outro procedimento, bem mais preciso, se refere à utilização das técnicas do controle moderno onde os recursos computacionais avaliam as condições de toda a planta de energia elétrica, previamente modelada e validada no campo, ditando os ajustes ou novas realimentações visando o estabelecimento da operação otimizada.
Este procedimento teve sua aplicação amparada no conseqüente avanço da informática no campo da Engenharia de controle uma vez que a análise aqui aplicada explora a técnica matricial trabalhando com o conceito de variáveis de estado e autovalores, assuntos já abordados no capítulo 2. As referências 13, 14 e 59 desenvolvem extensa abordagem nesse sentido.

## 6.6. Estabilidade Ligada ao Sistema de Excitação

O sistema de excitação da máquina síncrona é um dispositivo que, como já foi discutido no capítulo 5, apresenta um conjunto de funções sendo que é na operação automática de controle da tensão terminal que ele se envolve com o controle da potência reativa que é trocada entre máquina e sistema ou entre máquina e carga elétrica conectada.
Assim como foi visto quando se estudou a estabilidade do sistema de regulação de velocidade, também aqui existem alguns fatores que se tornam críticos para o processo de regulação da tensão terminal da máquina síncrona pelo controle direto da corrente de excitação de campo. Um deles tem a ver com a necessidade de se trabalhar com um controlador automático de respostas bem mais rápidas que àquelas associadas ao regulador de velocidade e, ao mesmo tempo, conciliar os problemas advindos dessa característica.
Isso não quer dizer que um regulador de velocidade rápido seria melhor que outro regulador de velocidade mais lento. Logicamente que não é nesse sentido que se fala, mas no sentido de que os fenômenos elétricos, até por sua característica de celeridade, exigem que o órgão de controle automático seja, da mesma forma, um dispositivo de alto desempenho e rapidez.
Sabendo-se dessa exigência, houve por bem que se construísse um sistema de excitação que respondesse a tais condições de maneira estável e rápida.
Ocorre que essa característica onde, num sentido, se garantia a regulação de tensão, evitando os indesejáveis problemas de sobretensão e subtensão, acabava

por esbarrar num problema que se mostrou atuante, a amplificação de oscilações de origem hidráulica. Essas oscilações, no mínimo inconvenientes, são provenientes do tubo de sucção da turbina, sinais esses que se propagam através da malha de controle de tensão com a introdução de flutuações no sinal da potência reativa assim como no sinal da tensão terminal de máquina.
Além desse tipo de problema, houve outro associado à questão dos baixos valores assumidos pelo torque sincronizante e pelo torque de amortecimento — grandezas específicas já explicadas no capítulo anterior — originários dos atrasos existentes na própria malha de controle de tensão terminal.

Considerando-se o sistema de controle de tensão apresentado na figura 5.14, aqui redesenhado numa outra conformação, vem que:

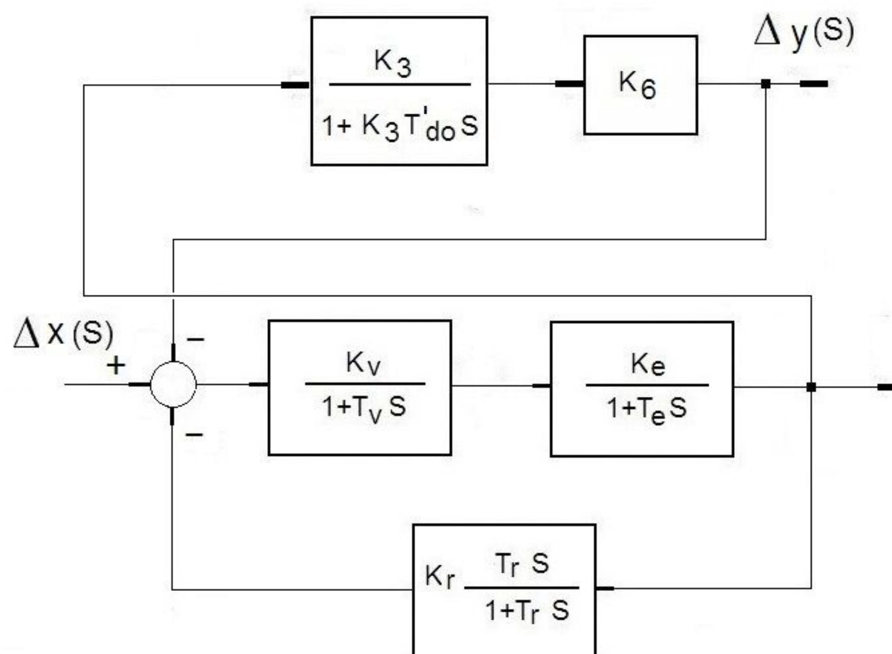



***Figura 6.15 – Diagrama em Blocos do Sistema de Excitação de uma Máquina Síncrona***

De maneira semelhante àquela que foi desenvolvida para o caso em se focou o regulador de velocidade, também aqui será feita uma análise do sistema de excitação da máquina síncrona sem compensação e depois com a compensação pela introdução de uma realimentação transitória, uma situação utilizada por muitos fabricantes em instalações até de grande porte, com máquinas de potência da ordem de $100MW$.

A função de transferência de malha aberta do processo inteiro, no plano complexo de Laplace, mostrado na figura 6.15, é dada a seguir onde todos os parâmetros se encontram em por unidade, sendo as funções $x(S)$ e $y(S)$ apenas funções genéricas para efeito de análise.

$$g(S) = \frac{K_V K_e K_6 (1+T_r S)}{[(1+T_r S)(1+T_V S)(1+T_e S)+K_V K_e K_r T_r S](1+T'_{do} S)} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.19)$$

Para efeito de análise, será considerada apenas a função de transferência dos sistema de excitação como na equação seguinte:

$$g(S) = \frac{K_V K_e (1+T_r S)}{(1+T_r S)(1+T_V S)(1+T_e S)+K_V K_e K_r T_r S} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.20)$$

Considerando a função de transferência de malha aberta relativa ao sistema de excitação da máquina síncrona, para a operação em vazio, é muito importante que a margem de fase no *cross over point* seja superior a 60º. Qualquer valor da margem de fase acima desse valor é interessante para que se tenha uma boa margem de estabilidade operacional do sistema.
Quando não se dispõe dessa margem, é bem possível que a presença de um bloco de realimentação transitória seja necessária. Não são todos os sistemas que exigem a presença da realimentação transitória, é bom frisar.
As figuras 6.16 e 6.17 mostram o plano de Bode para as condições operativas considerando-se, respectivamente, a função de transferência de malha aberta do sistema não compensada e compensada.

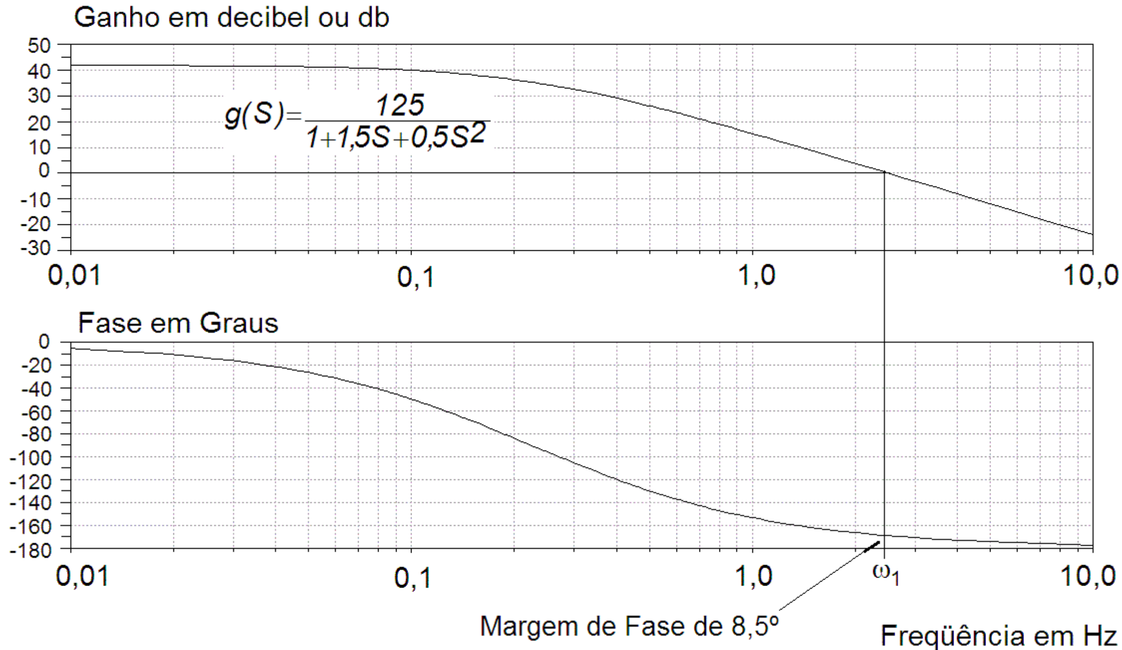



***Figura 6.16 – Plano de Bode da Função de Transferência do Processo de Regulação de Tensão sem o Bloco de Realimentação Transitória Sistema de Excitação com Excitatrizes Rotativas***

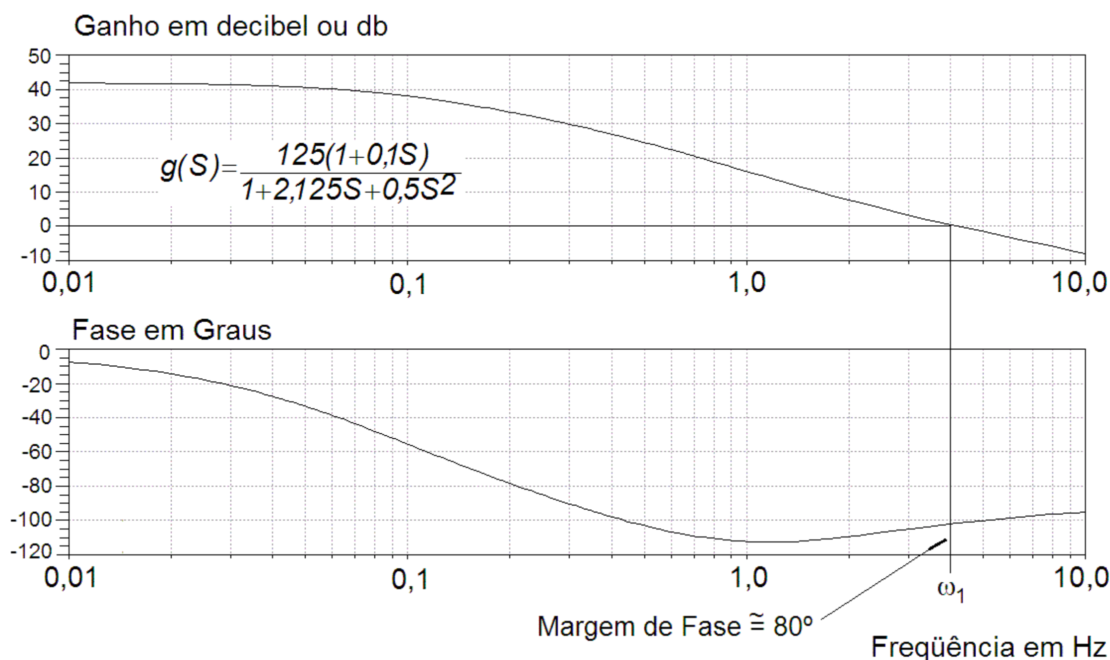



***Figura 6.17 – Plano de Bode da Função de Transferência do Processo de Regulação de Tensão com o Bloco de Realimentação Transitória Sistema de Excitação com Excitatrizes Rotativas***

**Nota:** os valores dos parâmetros do bloco transitório $K_r$ e $T_r$ foram sugeridos após extensa pesquisa sobre que valores seriam melhores para a estabilização do sistema em questão. Como a função de transferência da malha aberta do sistema de excitação não tem a mesma conformação que aquela função de transferência referente ao sistema de regulação de velocidade, um cálculo analítico na forma da resolução de uma equação do segundo grau, por exemplo, não foi possível. Para tal, seria necessária a desconsideração de valores de parâmetros que não poderiam ser desprezados sem que se perdesse qualidade.

---

**Nota especial sobre estabilidade segundo o critério de Nyquist**

O conceito de *margem de fase* de uma função de transferência no plano complexo de Laplace tem tudo a ver com o conceito de estabilidade desenvolvido por outro estudioso, o Engenheiro Eletrônico norte-americano Harry Theodor Nyqvist. Ele notou que a questão da estabilidade do sistema estava diretamente ligada ao ponto conhecido como *cross over point*, quando o ganho da função de transferência de malha aberta de um sistema qualquer é unitário, ou zero em decibel.
Se se considerar uma função de transferência de malha fechada de um determinado sistema do tipo com realimentação unitária, as raízes do polinômio denominador $1+g(S)$ da função de transferência é que determinarão se o sistema é ou não é

estável. Isso já bem sabido, porém a questão é que a visão de Nyquist, nesse particular, foi diferente.
Primeiramente, deve-se entender aquilo que vem a ser o conceito de mapeamento de uma função.
Sabe-se que toda função de transferência no plano complexo é uma função da variável complexa de Laplace $S$ de modo que possa existir uma função tal que $x(S): f(x) \rightarrow y(S)$ sendo $\frac{y(S)}{x(S)} = \frac{g(S)}{1+g(S)} = G(S)$ a função de transferência no plano complexo de um sistema qualquer linear e invariante no domínio do tempo. Ao se proceder a um movimento sobre a variável $S$, em seu plano de existência, esse movimento é mapeado no plano de existência da função de transferência $G(S)$.
Seja considerar a função $Q(S) = 1 + g(S)$ que representa o polinômio denominador da função de transferência de malha fechada desse sistema.
É possível imaginar que a variável complexa $S$ descreva uma trajetória fechada, não necessariamente um círculo, no plano cartesiano das raízes onde se considere o eixo das ordenadas como o eixo imaginário e o eixo das abscissas como o eixo real.
Com a variável complexa $S$ descrevendo uma trajetória fechada, prova-se que a função $Q(S) = 1 + g(S)$ também descreve uma trajetória fechada e no mesmo sentido do envolvimento realizado pela variável $S$. Geralmente, se $S$ varia no sentido horário, através de uma trajetória fechada que envolva os pontos internos a essa trajetória apenas uma vez, e sendo $N = P\{n^o \, de \, pólos \, envolvidos\} - Z\{n^o \, de \, zeros \, envolvidos\}$ então pode-se dizer que a variação do argumento de $G(S)$ foi de $+N \, x \, 360^o$ ou $+\{P - Z\} \, x \, 360^o$. *Nesse caso mais geral, a função Q(S) está sendo tomada como sendo uma fração própria em* $S$, *como seus zeros e seus pólos*.
Notar que se $Q(S)$ descrever uma trajetória fechada em torno da origem, por exemplo, $g(S)$ descreverá, por sua vez, uma trajetória em torno do ponto $-1 + j0$. É aqui que o conceito de estabilidade se estabelece.
Para tal, imaginando um sistema de coordenadas do tipo número imaginário puro *versus* número real, ou seja, ordenada *versus* abscissa, é criada uma trajetória conhecida como trajeto de Nyquist simbolizada por uma meia circunferência que abrange todo o semi-plano direito de raio infinito. Ver esquema mostrado na figura 6.18.

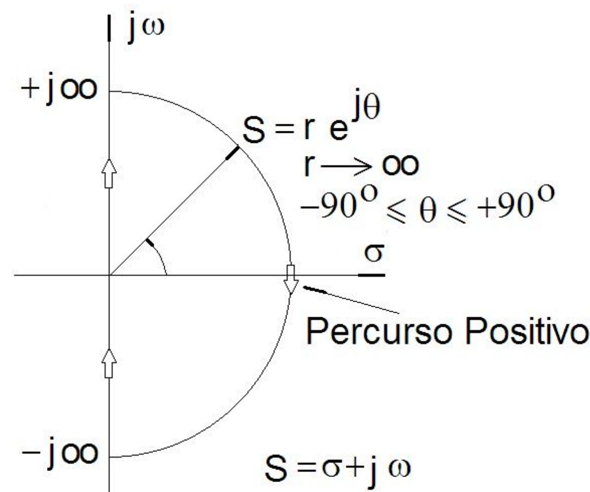



***Figura 6.18 – Trajetória de Nyquist***

Considerando o polinômio $Q(S)$, pode-se assim dizer que a fórmula $N = P\{n^o \text{ de pólos envolvidos de } Q(S)\} - Z\{n^o \text{ de zeros envolvidos de } Q(S)\}$ seja uma situação factível.
Os envolvimentos do ponto $-1 + j0$, no trajeto de Nyquist, podem ser de pólos ou mesmo de zeros de $Q(S)$. Como o que interessa são os zeros de $Q(S)$, já que correspondem aos pólos da função de transferência de malha fechada $G(S)$, então, para que o sistema seja declarado estável segundo Nyquist, deve-se ter $Z = 0$.

<u>Resumindo</u>: O percurso de Nyquist é um contorno fechado no semi-plano direito do plano da variável $S$, envolvendo totalmente o semi-plano direito do plano $S$ de uma função geral de $S$.

<u>Teorema do mapeamento</u>: O teorema do mapeamento pode ser entendido como uma aplicação da teoria conhecida como fórmula integral de Cauchy que foi desenvolvida como um suporte para essa teoria e outras aplicações. Pode-se começar a entender o teorema considerando uma determinada função $Q(S)$ na variável complexa $S$, onde $P$ é o número de pólos e $Z$ o número de zeros desta função. Sendo $Q(S)$ uma fração, deve-se entender que o critério aqui aplicado se refere a uma função do tipo em que o grau do polinômio numerador é inferior ao grau do polinômio denominador. Seja a condição em que os pólos e os zeros da função $Q(S)$ se encontram dentro de um contorno fechado específico no plano $S$. Considerar agora que o contorno fechado no plano $S$ mapeie o plano de $Q(S)$ como uma curva também fechada. O número $N$ dos envolvimentos, no sentido horário, da origem do plano de $Q(S)$ é igual a $Z - P$, ou a subtração do número de zeros do número de pólos. Para a comprovação do teorema do mapeamento é necessária aplicação do teorema de Cauchy e do teorema dos resíduos. Esse assunto escapa do propósito desse livro podendo ser planamente analisado no artigo da referência 65.

---

Assim, para a função de transferência da equação 6.20 que representa um sistema de excitação que se utiliza de excitatrizes rotativas, são dois os aspectos a serem verificados:

a) função de transferência com o sistema não compensado pela realimentação transitória, já com os valores dos parâmetros substituídos:

$$g(S) = \frac{125}{1 + 1{,}5\,S + 0{,}5\,S^2} \tag{6.21}$$

b) função de transferência com o sistema compensado pela realimentação transitória, já com os valores dos parâmetros substituídos:

$$g(S) = \frac{125(1 + 0{,}1S)}{1 + 2{,}125\,S + 0{,}5\,S^2} \tag{6.22}$$

Com as explicações fornecidas até aqui sobre a questão de se trabalhar com uma boa margem de fase, percebe-se que tudo tem a ver com a questão dos envolvimentos do ponto $-1 + j0$ por um ponto específico que foi considerado no diagrama polar da função de transferência de malha aberta, no caso o *cross over point*.

---

## EXEMPLO 6.3

Dada a seguinte função de transferência de malha aberta relativa ao sistema de regulação de velocidade de uma turbina hidráulica, mapear o ponto $-1 + j0$.

$$g(S) = \frac{(1 + 6{,}907\,S)(1 - 2{,}6\,S)}{0{,}05x2(1 + 0{,}3\,S)(1 + 51{,}8\,S)(1 + 1{,}3\,S)(1 + 6{,}16\,S)}$$

**Solução:**

Para tal, bastará a substituição do ponto na variável complexa de Laplace na função de transferência dada.

Assim, tem-se que:

$$g(S)=\frac{[1+6{,}907(-1)][(1-2{,}6(-1)]}{0{,}05x2[1+0{,}3(-1)][1+51{,}8(-1)][1+1{,}3(-1)][1+6{,}16(-1)]}=$$

$$=\frac{(1-6{,}907)(1+2{,}6)}{0{,}05x2(1-0{,}3)(1-51{,}8)(1-1{,}3)(1-6{,}16)}=3{,}863$$

Logo, o ponto $S = -1 + j0$ foi mapeado para o plano de $g(S)$ como o ponto $3{,}863 + j0$.

---

Seja agora analisar um sistema de excitação baseado em elementos retificadores do tipo SCR ou tiristores.
A função de transferência de malha aberta do processo inteiro, no plano complexo de Laplace, é dada a seguir onde todos os parâmetros se encontram em por unidade, contendo conectada a malha de realimentação transitória.

$$g(S)=\frac{K_V K_{th} K_6(1+T_r S)}{[(1+T_r S)(1+T_V S)(1+T_{th}S)+K_V K_{th} K_r T_r S](1+T'_{do} S)} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.23)$$

Também aqui, para efeito de análise, será considerada apenas a função de transferência do sistema de excitação como na equação seguinte:

$$g(S)=\frac{K_V K_{th}(1+T_r S)}{(1+T_r S)(1+T_V S)(1+T_{th}S)+K_V K_{th} K_r T_r S} \quad \text{em pu/pu} \qquad (6.24)$$

As figuras 6.19 e 6.20 mostram o plano de Bode para as condições operativas considerando-se, respectivamente, a função de transferência de malha aberta do sistema não compensada e a compensada.
Assim, para a função de transferência da equação 6.22 que representa um sistema de excitação que se utiliza de elementos tiristores, são dois os aspectos a serem verificados:

a) função de transferência com o sistema não compensado pela realimentação transitória, já com os valores dos parâmetros substituídos:

$$g(S)=\frac{1250}{1+1{,}005\,S+0{,}005\,S^2}\cong\frac{1250}{1+1{,}005\,S}$$

b) função de transferência com o sistema compensado pela realimentação transitória, já com os valores dos parâmetros substituídos:

$$g(S)=\frac{1250(1+0{,}5\,S)}{1+(31{,}25+1{,}5005)S+0{,}5075\,S^2+0{,}0025S^3}\cong\frac{1250(1+0{,}5\,S)}{1+32{,}7505\,S+0{,}5075\,S^2}$$

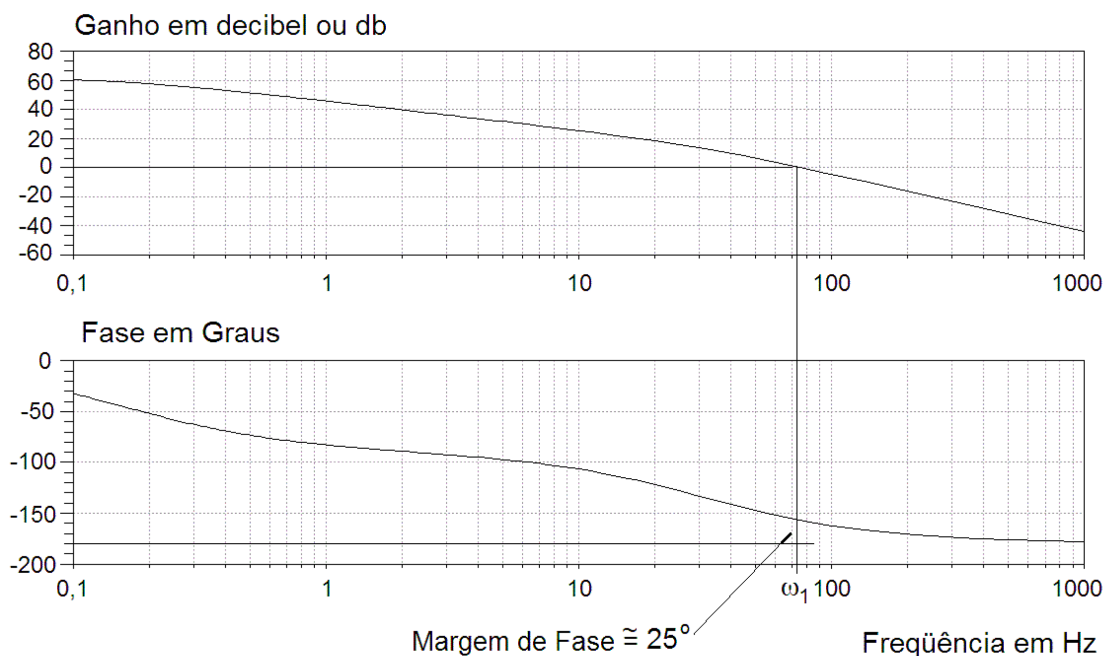



***Figura 6.19 – Plano de Bode da Função de Transferência do Processo de Regulação de Tensão sem o Bloco de Realimentação Transitória Sistema de Excitação Estática***

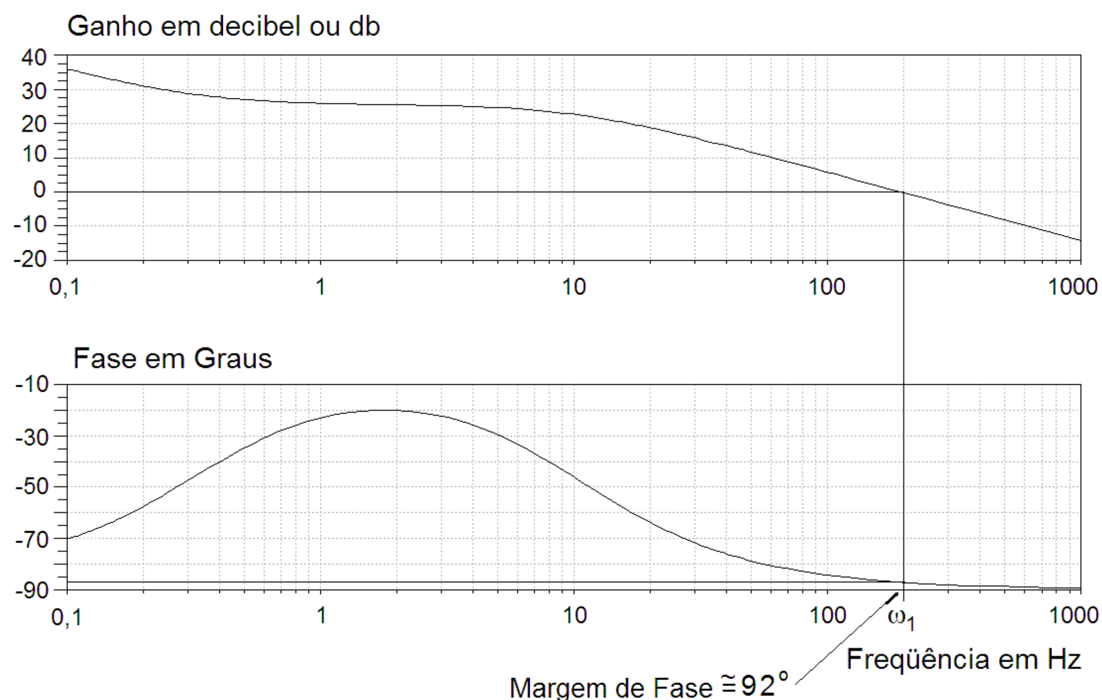



***Figura 6.20 – Plano de Bode da Função de Transferência do Processo de Regulação de Tensão com o Bloco de Realimentação Transitória Sistema de Excitação Estática***

**Nota 1:** também aqui valem as mesmas observações feitas em relação aos valores dos parâmetros do bloco transitório $K_r$ e $T_r$. Do mesmo modo que aquele verificado para o caso em que o sistema de excitação era do tipo com excitatrizes rotativas, a função de transferência da malha aberta do sistema de excitação estática não tem a mesma conformação que aquela função de transferência referente ao sistema de regulação de velocidade o que inviabilizou a utilização de um cálculo analítico na forma da resolução de uma equação do segundo grau, por exemplo. Para tal, seria necessária a desconsideração de valores de parâmetros que não poderiam ser desprezados sem que se perdesse qualidade.

**Nota 2:** é interessante observar o quão forte é a resposta de um sistema de excitação estática de máquinas síncronas se comparada com a resposta correspondente de um sistema cuja excitação é baseada no processo via excitatrizes rotativas.
Ao observar o diagrama de Bode, nota-se que o sistema dotado de excitação estática responde numa faixa de alta freqüência. Um dos cuidados que se deve ter é saber que a excitação de modos de freqüência, no campo da excitatriz, será muito prejudicial ao comportamento operativo do sistema elétrico de energia. Essa será uma preocupação constante do projetista.
Em sistemas de regulação de instalações hidráulicas, o modo de oscilação local, geralmente, ocorre e fica numa faixa que na prática se estende de $0{,}8$ a $2{,}0\ Hz$. Por exemplo, na região do Triângulo Mineiro, onde se encontram mais de 22 usinas de produção de energia elétrica de grande porte, a freqüência de oscilação no chamado modo local foi medida e ficou na casa de $1{,}48\ Hz$. Medidas mais recentes indicam uma redução desse valor para uma freqüência da ordem de $1{,}30\ Hz$. Lembrar que esses valores se referem à freqüência natural amortecida.
A referência 60 traz uma explanação com um estudo em que são analisadas as interações tanto locais quanto inter-áreas de geração frente a grandes distúrbios e ocorrências nos SEPs. Essas interações vão ser determinantes quando for abordado o tema estabilizador de potência ou PSS. A questão é que a interação entre sistema de excitação e PSS é determinante para o estabelecimento da estabilidade operativa do SEP.

Seguindo essa etapa de verificações, a figura 6.21 mostra a resposta no domínio do tempo, considerando-se a tensão terminal da máquina síncrona operando em vazio, para os casos antecedentes.
Notam-se, nos registros da tensão terminal, dois comportamentos bem diferentes, um amortecido outro com baixo amortecimento. O amortecimento verificado na resposta da figura 6.21 só foi conseguido após se ter lançado mão do bloco de realimentação transitória que foi introduzido no sistema de excitação.
Notar que com uma resposta em tensão em vazio mais branda evita-se o inconveniente de se envolver com a proteção de sobretensão. Geralmente, as instalações elétricas de energia dispõem de dois tipos de proteção de sobretensão, uma temporizada, ajustada numa faixa de $105$ a $110\%$ da tensão terminal de máquina síncrona e outra instantânea ajustada de $115$ a $125\%$. Sistemas de regulação de tensão caracterizados por apresentar baixas taxas de amortecimento no sinal de tensão terminal, via de regra, chegam a disparar as proteções de sobretensão quando muito não provocam o TRIP, tornando o sistema ainda fraco com a perda de unidades geradoras, o que, de modo algum, pode ser considerado uma situação normal.

**Nota 3:** como observação, é bom saber que a implementação de um bloco de realimentação a partir da tensão de campo, levando-se em conta um sistema do tipo estático, não é comum se resumindo muitas vezes ao estudo teórico como foi aqui abordado. A referência 50 mostra tipos de modelos que poderiam ser utilizados na modelagem de sistemas de excitação, incluindo aí modelos de sistemas do tipo estático. São apresentados, pelo menos, dois modelos de sistema de excitação, sendo um do tipo que emprega excitatrizes rotativas e outro que se utiliza da excitação estática, em que é utilizada a realimentação transitória via tensão de campo.

É importante lembrar que o formato da tensão de campo, principalmente com as elevadas taxas de teto que muitas vezes atingem valores da ordem de *7* a *8* vezes o valor da tensão de campo de regime permanente, exige uma preocupação adicional quanto ao aspecto de segurança de pessoas e equipamento.

Na prática, o que mais se nota são sistemas de excitação estática com a realimentação de estabilização processada via tensão de saída do próprio regulador de tensão.

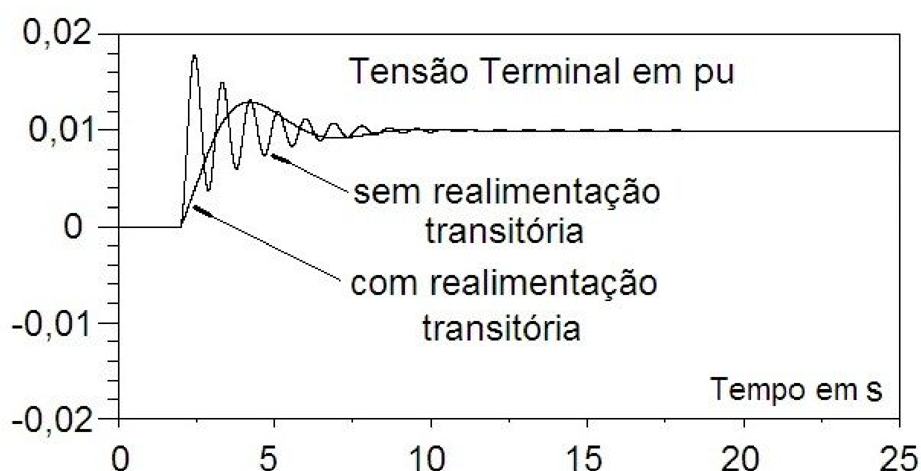



***Figura 6.21 – Resposta no Domínio do Tempo do Processo com e sem Realimentação Transitória***
***Sinal de Tensão de Saída da Máquina Síncrona em Vazio***

A figura 6.23 mostra a resposta no domínio do tempo, considerando-se a tensão terminal da máquina síncrona operando em carga, segundo o diagrama em blocos da figura 6.22, para os casos antecedentes.

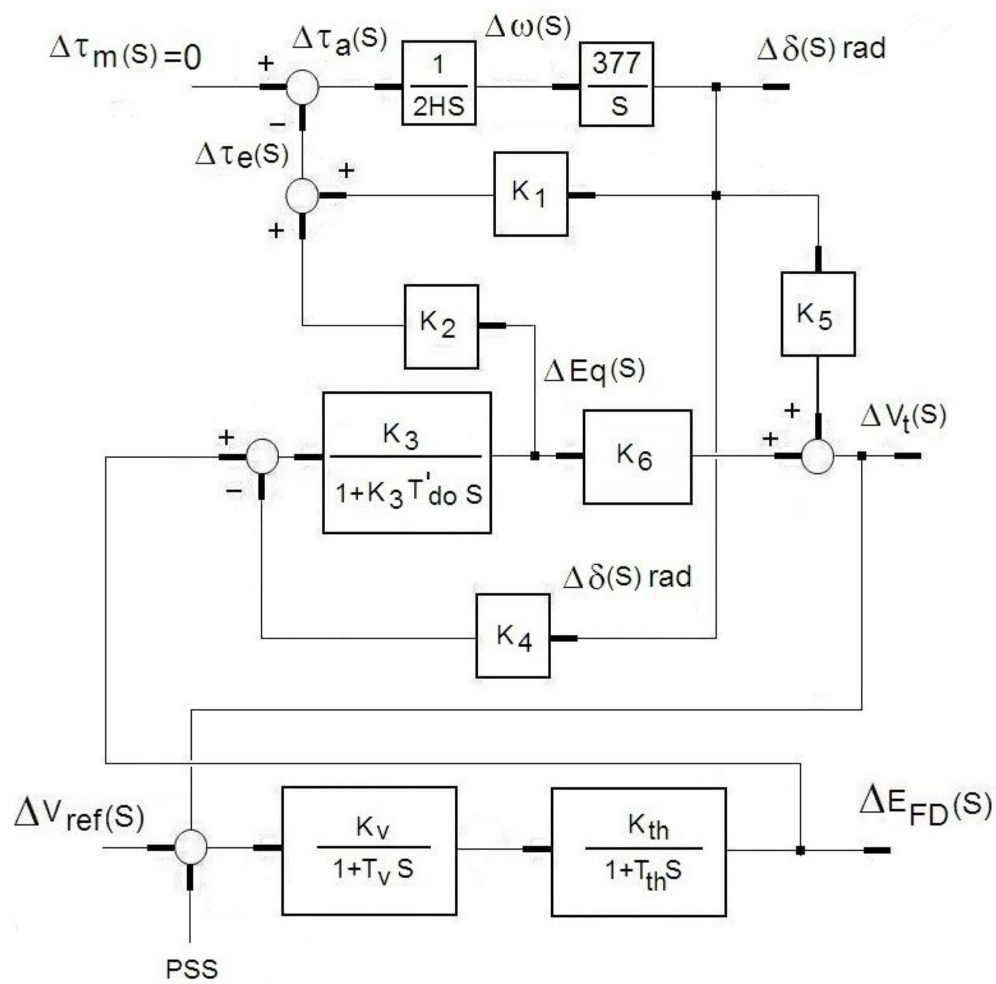



***Figura 6.22 – Diagrama em Blocos do Sistema de Excitação da Máquina Síncrona Operando sob Carga***

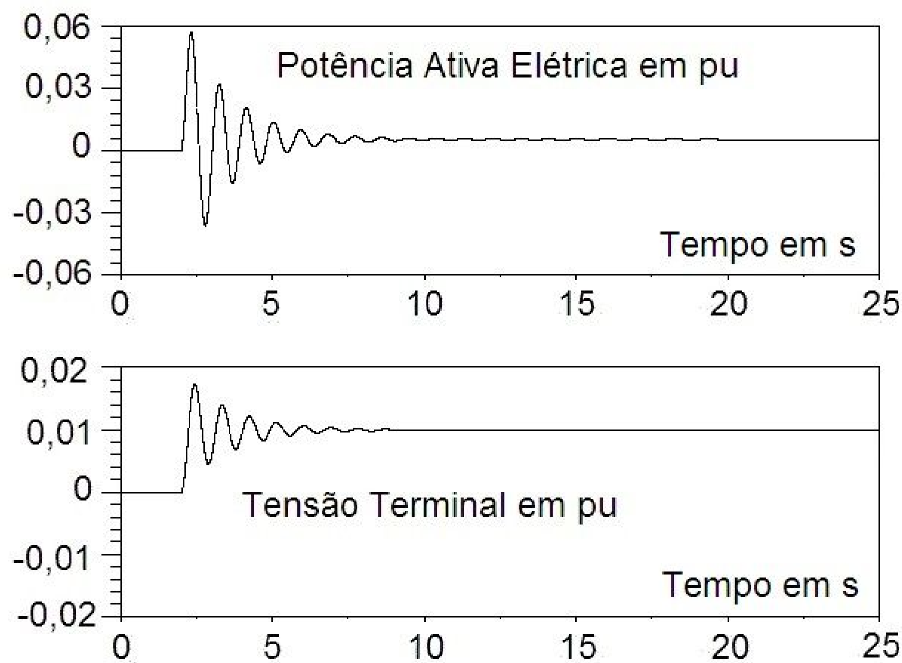



***Figura 6.23 – Resposta no Domínio do Tempo do Processo sem Realimentação Transitória***
***Sinal de Tensão de Saída da Máquina Síncrona Operando sob Carga***

## 6.7. Análise da Estabilidade Ligada ao Sistema de Excitação da Máquina Síncrona

Já foram adiantados, no capítulo 5, alguns aspectos da análise estabilidade específica quando se levou em conta a parte elétrica da máquina síncrona. As equações 5.82 e 5.83 mostram como a parte elétrica do conjunto formado por um gerador síncrono acoplado a um determinado sistema, contra uma barra infinita, interfere na operação interligada em termos de estabilidade.
Em princípio, a influência dos parâmetros $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ , referentes ao diagrama em blocos apresentado na figura 6.22, foi mostrada por alto.
Agora será promovida uma análise mais específica baseada em três pontos fundamentais para o tratamento da questão da estabilidade da máquina síncrona, a saber:

a) influência pura da parte elétrica

b) influência paramétrica $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$

c) influência do sistema de excitação e do regulador de tensão

### 6.7.1. Influência Pura da Parte Elétrica

Essa questão já foi, de certo modo, abordada no capítulo 5. Trata de se saber sobre os pontos positivos e negativos que envolvem a estabilidade operativa da máquina síncrona sem se intervir, diretamente, com os valores adquiridos pelos parâmetros $K_i$, com $i = 1,2,3,4,5,6$ e suas influências.

Como já foi dito, equações 5.82 e 5.83 mostram, de maneira clara, como a parte elétrica do conjunto formado por um gerador síncrono acoplado a um determinado sistema influencia o comportamento sob o aspecto da estabilidade.

O foco foi apontado para a variável de estado torque elétrico ou potência ativa elétrica que, em por unidade, por exemplo, apresentam a mesma expressão matemática.

Ficou determinado que:

a) nas <u>baixas freqüências</u>, o que se tem é o seguinte, se referindo à equação 5.82:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - K_2K_3K_4 + jK_2(K_3)^2 K_4 \frac{T'do}{\omega B}\omega \quad \text{em pu}$$

b) nas <u>altas freqüências</u>, o que se tem é o seguinte, se referindo à equação 5.83:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - \frac{K_2K_4}{K_3(\frac{T'do}{\omega_B})^2\omega^2} + j\frac{K_2K_4}{\frac{T'do}{\omega_B}\omega} \quad \text{em pu}$$

Se for analisada a decomposição do torque elétrico sob os aspectos de um torque sincronizante e outro de amortecimento, considerando aqui os parâmetros $K_i$, com $i = 1,2,3,4,5,6$ envolvidos nas expressões, nota-se que nas baixas freqüências, freqüências da ordem de $0,001$ até $0,5\ Hz$, o torque sincronizante será, por si só, elevado e positivo, contribuindo decisivamente para o bom comportamento do sistema. Quanto ao torque amortecedor, este, praticamente não será percebido na faixa operativa das baixas freqüências, embora ainda tenha um valor positivo na faixa das médias freqüências. Tanto é que no início, os analistas apenas focavam o aspecto da estabilidade visto pela ótica do torque sincronizante, situação que pode ser chamada de estabilidade em regime permanente.

Já no caso em que sejam avaliadas as altas freqüências, é interessante observar que há uma tendência de elevação do torque sincronizante positivo seguido de um decaimento no valor do torque amortecedor positivo. Essas análises são válidas desde que sejam positivos os valores para os parâmetros $K_i$, com $i = 1,2,3,4,5,6$,

pois eles podem variar com o carregamento da máquina síncrona, ver citação da referência 66.

### 6.7.2. Influência Paramétrica, Parâmetros Ki

Como já foi citado antes, tendo como base a modelagem contida na figura 6.22, o valor assumido por cada um dos parâmetros $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ é decisivo para o desempenho operativo da máquina síncrona sob o aspecto da estabilidade. Primeiramente, deve-se saber que o valor assumido por cada um desses parâmetros tem tudo a ver com o tipo e a forma de como o carregamento da máquina síncrona se dá. Segundo, que existem certos parâmetros como o parâmetro $K_4$, por exemplo, cujo sinal pode mudar fato que trará conseqüências diretas para a estabilidade.

Através de uma análise mais direta sobre os trabalhos desenvolvidos nessa área, pode-se concluir que entre os parâmetros $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ , especificamente os parâmetros $K_2$ e $K_6$ não trocam de sinal permanecendo sempre com valores positivos, independente do carregamento da máquina síncrona. Já os parâmetros $K_1$, $K_4$ e $K_5$ trocam de sinal conforme o carregamento. O parâmetro $K_3$ é o único parâmetro que somente depende de valores de impedâncias envolvidas no circuito elétrico.

A referência 1 confirma que em casos estudados, quando o sistema elétrico estava fortemente carregado, o parâmetro $K_5$ se apresentou com um valor negativo, mas quando o sistema teve seu carregamento diminuído esse parâmetro passou a apresentar um valor positivo. Isso é um fator de importante consideração uma vez que esse parâmetro tem forte ligação com a redução do torque amortecedor em sistemas com reguladores de tensão do tipo estático que trabalham com elevados valores de ganho de canal direto.

O parâmetro $K_4$ associado ao parâmetro $K_3$, mesmo que esse último não seja influenciado pelo carregamento da máquina síncrona, a ação do ângulo de potência faz com que o efeito desmagnetizante da armadura seja fortemente sentido na medida em que ocorre mudança no sinal da tensão terminal. Isso foi, matematicamente, mostrado na dedução da equação 5.38 cuja parcela que contém o efeito desmagnetizante aparece da seguinte maneira:

$$\Delta E_{qu}(S) = \frac{K_3 K_4}{1 + K_3 \frac{T'_{do}}{\omega_B} S} \Delta\delta(S) \qquad (6.25)$$

---

**Nota especial sobre estabilidade segundo o critério de Routh**

O critério de Routh, desenvolvido pelo matemático britânico Edward John Routh, é um instrumento poderoso e ao mesmo tempo simples. Consiste de um algoritmo que permite inspecionar as raízes de um polinômio de modo que se possa saber se há raízes reais positivas ou raízes complexas com parte real positiva, um indício de instabilidade para sistemas de controle quando o polinômio se tratar do polinômio característico da função de transferência no pano complexo de Laplace desse sistema.

O desenvolvimento consiste em, primeiro, considerar uma função de transferência na forma da equação 2.9 cuja função de transferência de malha fechada é dada pela equação 2.78, repetida a seguir por comodidade:

$$\frac{N(S)}{D(S)} = \frac{g(S)}{1 + g(S)h(S)} \tag{6.26}$$

onde

$$D(S) = b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + b_{n-2} S^{n-2} + b_{n-3} S^{n-3} + b_{n-4} S^{n-4} + \cdots + b_1 S + b_0$$

Desmembrando o polinômio denominador $D(S)$ em dois polinômios, sendo um composto das partes de maior grau de $D(S)$ e outro das partes daquele de grau menor, pode-se escrever que:

$$\frac{b_n S^n + b_{n-2} S^{n-2} + b_{n-4} S^{n-4} + \cdots}{b_{n-1} S^{n-1} + b_{n-3} S^{n-3} + b_{n-5} S^{n-5} + \cdots} =$$

$$= \frac{b_n S^n}{b_{n-1} S^{n-1}} + \frac{c_1 S^{n-2} + c_2 S^{n-4} + c_4 S^{n-6} + \cdots}{b_{n-1} S^{n-1} + b_{n-3} S^{n-3} + b_{n-5} S^{n-5} + \cdots}$$

onde

$$c_1 = -\frac{(b_{n-3}) b_n}{b_{n-1}} + b_{n-2} = \frac{(b_{n-1})(b_{n-2}) - b_n (b_{n-3})}{b_{n-1}}$$

$$c_2 = -\frac{(b_{n-5}) b_n}{b_{n-1}} + b_{n-4} = \frac{(b_{n-1})(b_{n-4}) - b_n (b_{n-5})}{b_{n-1}}$$

$$c_3 = -\frac{(b_{n-7}) b_n}{b_{n-1}} + b_{n-6} = \frac{(b_{n-1})(b_{n-6}) - b_n (b_{n-7})}{b_{n-1}}$$

$$\vdots$$

Agora, repetindo o processo de divisão com os polinômios de menor grau, tem-se que:

$$\frac{b_{n-1}S^{n-1}+b_{n-3}S^{n-3}+b_{n-5}S^{n-5}+\cdots}{c_1S^{n-2}+c_2S^{n-4}+c_4S^{n-6}+\cdots}=$$

$$=\frac{b_{n-1}S^{n-2}}{c_1S^{n-3}}+\frac{d_1S^{n-3}+d_2S^{n-5}+d_4S^{n-7}+\cdots}{c_1S^{n-2}+c_2S^{n-4}+c_4S^{n-6}+\cdots}$$

onde

$$d_1=-\frac{(b_{n-1})c_2}{c_1}+b_{n-3}=\frac{c_1(b_{n-3})-c_2(b_{n-1})}{c_1}$$

$$d_2=-\frac{(b_{n-1})c_3}{c_1}+b_{n-5}=\frac{c_1(b_{n-5})-c_3(b_{n-1})}{c_1}$$

$$d_3=-\frac{(b_{n-1})c_4}{c_1}+b_{n-7}=\frac{c_1(b_{n-7})-c_4(b_{n-1})}{c_1}$$

$\vdots$

E assim por diante até que se obtenham $n+1$ polinômios, incluindo os dois polinômios iniciais de grau $n$ e $n-1$.

A regra de análise é a seguinte*: para cada mudança de sinal, considerando-se cada um dos coeficientes obtidos de um polinômio de grau mais elevado para o polinômio seguinte, também de grau mais elevado, há uma mudança no sinal de uma raiz real positiva*.

Geralmente, o que se apresenta é um algoritmo de fácil montagem, que pode ser visto na seguinte disposição.

$$\begin{array}{|c|cccc}
S^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} \\
S^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & b_{n-7} \\
S^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \\
S^{n-3} & d_1 & d_2 & d_3 & \\
\vdots & & & & \\
S^1 & & & & \\
S^0 & & & &
\end{array} \qquad (6.27)$$

É possível criar uma rotina de determinação direta dos coeficientes observando-se a disposição dos cálculos mostrados no desenvolvimento da equação 6.27.

**Nota:** o algoritmo de Routh pode falhar numa primeira execução quando durante as operações de cálculo dos coeficientes surgir, por exemplo, uma divisão por zero. Isso certamente não permitirá a continuação dos cálculos.
Porém, quando isso acontecer, o problema será facilmente resolvido multiplicando-se o polinômio original por um binômio do tipo $(S+1)$, na variável complexa $S$ de Laplace que é o caso presente. Após o produto, dispondo-se do novo polinômio, agora com uma raiz a mais, porém conhecida, real e negativa, aplica-se novamente o critério, promovendo a análise.

---

## EXEMPLO 6.4

Dada a seguinte função de transferência, analisar as raízes do polinômio denominador aplicando o critério de Routh.

$$g(S) = \frac{10(0,055 + 0,2398S - S^2)}{0,0080 + 0,478S + 3,312S^2 + 4,284S^3 + S^4}$$

**Solução:**

A verificação é feita aplicando-se o algoritmo da equação 6.27 ao polinômio denominador da função de transferência dada. Assim, tem-se que:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S^4$ | 1 | 3,312 | 0,080 |
| $S^3$ | 4,284 | 0,478 | |
| $S^2$ | 3,2 | 0,089 | |
| $S^1$ | 0,3709 | | |
| $S^0$ | 0,080 | | |

Como não houve troca de sinal entre os coeficientes da primeira coluna, pode-se dizer que o polinômio denominador apresenta quatro raízes e todas elas são formadas de números reais negativos. O sistema é, portanto, estável.
As raízes são:

$S_1 = -0,0192$

$S_2 = -0,1621$

$S_3 = -0,7694$

$S_4 = -3,3330$

---

## EXEMPLO 6.5

Analisar a estabilidade de um sistema cuja função de transferência global apresenta no seu denominador o polinômio $D(S) = S^4 + S^3 + 2S + 5$.

**Solução:**

A verificação é feita aplicando-se o algoritmo da equação 6.27 ao polinômio denominador. Assim, tem-se que:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S^4$ | 1 | 2 | 5 |
| $S^3$ | 1 | 2 | |
| $S^2$ | 0 | ??? | |
| $S^1$ | | | |
| $S^0$ | | | |

Houve um problema com a aplicação do critério de Routh, pois não se consegue mais efetuar os cálculos a partir do coeficiente nulo.
Aplicando-se o recurso descrito em nota, onde se deve multiplicar o polinômio original por um binômio do tipo $(S+1)$, vem que:

$$D'(S) = (S+1)D(S) = S^5 + 2S^4 + 3S^3 + 4S^2 + 7S + 5$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S^5$ | 1 | 3 | 7 |
| $S^4$ | 2 | 4 | 5 |
| $S^3$ | 1 | 4,5 | |
| $S^2$ | −5 | 5 | |
| $S^1$ | 5,5 | | |
| $S^0$ | 5 | | |

Houve duas trocas de sinal entre os coeficientes da primeira coluna o que significa que o polinômio denominador da função de transferência global, além da raiz $S = -1$, que foi introduzida através do produto pelo binômio $(S+1)$, contém as seguintes quatro raízes:

$S_{2,3} = 0,5753 \pm j1,3544$

$S_{5,6} = -1,07529 \pm j1,07369$

Conclusão: o sistema apresentado é instável!

---

## EXEMPLO 6.6

Considerando-se o sistema de excitação estática de uma determinada instalação, a função de transferência de malha aberta do processo inteiro, no plano complexo de Laplace, é dada a seguir onde todos os parâmetros se encontram em por unidade, devidamente normalizados segundo uma base de valores previamente definida.

$$g(S) = \frac{K_V K_{th} K_3 K_6}{(1+T_V S)(1+T_{th} S)(1+K_3 T'_{do} S)}$$

Sendo dados os seguintes valores para os parâmetros, discutir a faixa de valores que o ganho $K_V$ do regulador de tensão pode assumir para que a operação seja considerada estável.

Dados:

$K_{th} = 500\ pu/pu$

$K_3 = 0,405\ pu/pu$

$K_6 = 0,162\ pu/pu$

$T_V = 1,0\ s$

$T_{th} = 0,005\ s$

$T'_{do} = 4,08\ s$

**Solução:**

A verificação é feita aplicando-se o algoritmo da equação 6.27 ao polinômio denominador da função de transferência de malha fechada.
Como foi dada a função de transferência de malha aberta, será necessária a obtenção da função de transferência de malha fechada. Assim, tem-se que:

$$G(S) = -\frac{g(S)}{1+g(S)} = -\frac{K_V K_{th} K_3 K_6}{(1+T_V S)(1+T_{th} S)(1+K_3 T'_{do} S) + K_V K_{th} K_3 K_6}$$

Substituindo-se os valores na expressão anterior obtém-se:

$$G(S) = -\frac{32{,}805\ K_V}{(1+S)(1+0{,}005\,S)(1+1{,}6524\,S) + \ \ 32{,}805\ K_V} =$$

$$= -\frac{32{,}805\ K_V}{0{,}008\,S^3 + 1{,}6656S^2 + 2{,}6574S + (1+32{,}805\,K_V\ )}$$

Colocando-se os coeficientes na disposição do algoritmo de Routh , vem que:

| | | |
|---|---|---|
| $S^3$ | $0{,}008$ | $2{,}6574$ |
| $S^2$ | $1{,}6656$ | $a$ |
| $S^1$ | $b$ | |
| $S^0$ | $c$ | |

onde cada parâmetro tem a seguinte expressão:

$$a = 1 + 32{,}805\,K_V$$

$$b = \frac{4{,}4261 - 0{,}008\,(1+32{,}805\,K_V\ )}{1{,}6656}$$

$$c = 1 + 32{,}805\,K_V$$

1) a primeira premissa conduz à seguinte conclusão:

$$c > 0 \quad \therefore \quad 1+32{,}805\,K_V > 0 \quad \therefore \quad K_V > -0{,}03048$$

2) a segunda premissa conduz à seguinte conclusão:

$$b > 0 \quad \therefore \quad \frac{4{,}4261 - 0{,}008\,(1+32{,}805\,K_V\ )}{1{,}6656} > 0 \quad \therefore \quad K_V < 16{,}8347$$

Conclusão: os valores permitidos para o ganho de canal direto do regulador de tensão estarão dentro da seguinte faixa:

$$-0{,}03048 < K_V < 16{,}8347$$

**Nota:** deve-se observar que os valores limites para o parâmetro $-0{,}0304 < K_V < 16{,}8347$ são exatamente os pontos em que, no plano cartesiano de existência das raízes, ou $plano-S$, as raízes do polinômio denominador da função de transferência de malha fechada cruzam o eixo imaginário ou eixo das ordenadas.

Nesse ponto, as raízes são números do tipo imaginário puro.
A verificação é obtida substituindo os valores limites de $-0{,}0304 < K_V < 16{,}8347$ no polinômio denominador da função de transferência de malha fechada.

1) Para $K_V = 16{,}8347$ , tem-se que as raízes do polinômio denominador são:
$S_{1,2} = \pm j18{,}225$ (raízes sobre o eixo imaginário!!!)
$S_3 = -208{,}2$

2) Para $K_V = -0{,}0304$ , tem-se que as raízes do polinômio denominador são:
$S_1 = 0$ (raiz na origem!!!)
$S_2 = -1{,}607$
$S_3 = -206{,}59$

---

## 6.7.3. Influência do Sistema de Excitação e do Regulador de Tensão

Quando o regulador de tensão é acoplado ao sistema de excitação formando um arranjo de controle automático, em função de novas particularidades, a estabilidade do sistema passa a ser influenciada sobremaneira.
A questão da presença do regulador de tensão tem a ver com a necessidade de o controle automático prover os devidos comandos com a devida prontidão que se espera de um sistema desse tipo.
Nos estudos anteriores, deduziram-se equações que permitiram analisar o comportamento da máquina pela análise da estabilidade, porém sem se levar em conta a presença do sistema de excitação.
Para que o estudo fique completo, será realizada uma análise focando a questão da ação sobre os torques sincronizantes e amortecedores — discutidos no capítulo anterior — na presença do regulador de tensão, o que não feito anteriormente.
A figura 6.22 traz, na forma de diagrama em blocos no plano complexo de Laplace, o modelo elétrico para uma máquina síncrona com a presença do sistema de excitação do tipo estático sendo desprezado o efeito da saturação e das possíveis distorções harmônicas inerentes a esse processo.
Não é prescindível dizer que o modelo da figura em questão representa a situação de máquina operando contra o barramento infinito.

A expressão do torque elétrico, levando-se em conta o plano complexo de Laplace, é dada pela seguinte expressão, já conhecida:

$$\Delta\tau_e(S) = K_1\,\Delta\delta(S) + K_2\,\Delta E_q(S) \qquad \text{em pu} \qquad (6.28)$$

Da figura 6.22, desprezando a constante de tempo $T_V$, para uma entrada de sinal

externo $\Delta v_{ref} = 0$, tem-se a seguinte expressão da fem da máquina síncrona em questão:

$$\Delta E_q(S) = -\frac{K_3}{1+K_3 T'_{do} S}\{K_4\, \Delta\delta(S) + \frac{K_v K_{th}}{1+T_v S}[K_5\, \Delta\delta(S) + K_6\, \Delta E_q(S)]\} \quad \text{em pu} \tag{6.29}$$

Agrupando a equação 6.29, de maneira conveniente, obtém-se que:

$$\Delta E_q(S) = -\frac{K_3 K_4}{1+K_3 T'_{do} S}\Delta\delta(S) - \frac{K_3 K_v K_{th} K_5}{(1+K_3 T'_{do} S)(1+T_v S)}\Delta\delta(S) - \frac{K_3 K_v K_{th} K_6}{(1+K_3 T'_{do} S)(1+T_v S)}\Delta E_q(S) \quad \text{em pu}$$

A função de transferência $\frac{\Delta E_q(S)}{\Delta\delta(S)}$ tomará, a partir da equação anterior, a seguinte expressão considerando-se que $K_3 K_v K_{th} K_6 >> 1$:

$$\frac{\Delta E_q(S)}{\Delta\delta(S)} = -\frac{\frac{K_4}{K_v K_{th} K_6} + \frac{K_4 T_v}{K_v K_{th} K_6}S + \frac{K_5}{K_6}}{1 + \frac{K_3 T'_{do} + T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}S + \frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}S^2}$$

Como o valor do produto $K_v K_{th}$ ou mesmo $K_v K_e$ é sempre tomado elevado em relação aos demais, o numerador da expressão anterior pode ser simplificado tomando a função de transferência o seguinte aspecto:

$$\frac{\Delta E_q(S)}{\Delta\delta(S)} = -\frac{\frac{K_5}{K_6}}{1 + \frac{K_3 T'_{do} + T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}S + \frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}S^2} \quad \text{em pu} \tag{6.30}$$

Fazendo $S = j\omega$ e $S^2 = -\omega^2$, seguindo semelhante procedimento já realizado no capítulo 5 para a identificação daquilo que vem a ser torque sincronizante e torque amortecedor, tem-se que:

$$\frac{\Delta E_q(S)}{\Delta\delta(S)} = -\frac{\frac{K_5}{K_6}}{1 - \frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2 + j\frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2} = -\frac{k}{a + jb} \qquad (6.31)$$

Através do artifício de se multiplicar um número complexo pelo seu conjugado, é possível transformar a equação 6.31 numa expressão do tipo:

$$\frac{\Delta E_q(S)}{\Delta\delta(S)} = -[\frac{ka}{a^2 + b^2} - j\frac{kb}{a^2 + b^2}] \qquad (6.32)$$

Considerando-se agora a equação 6.28, para o torque elétrico ou potência ativa elétrica, vem que:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - K_2[\frac{ka}{a^2 + b^2} - j\frac{kb}{a^2 + b^2}] = T_S + jT_A \quad \text{em pu} \quad (6.33)$$

sendo $T_S$ a parcela referente ao torque sincronizante e $T_A$ a parcela referente ao torque amortecedor de modo que:

$$T_S = K_1 - \frac{\frac{K_2 K_5}{K_6}(1 - \frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2)}{1 + \frac{(K_3 T'_{do} + T_v)^2}{K_3 K_v K_{th} K_6} - 2\frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2 + (\frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6})^2\omega^4} \quad \text{em pu} \quad (6.34)$$

e

$$T_A = \frac{\frac{K_2 K_5}{K_6}(\frac{K_3 T'_{do} + T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega)}{1 + \frac{(K_3 T'_{do} + T_v)^2}{K_3 K_v K_{th} K_6} - 2\frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2 + (\frac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6})^2\omega^4} \quad \text{em pu} \quad (6.35)$$

---

## EXEMPLO 6.7

Analisar o torque elétrico de uma máquina síncrona para as duas condições

seguintes:

a) máquina sem regulador de tensão;

b) máquina com regulador de tensão cujo sistema de excitação emprega elementos tiristores onde o parâmetro $T_{th}$ pode ser desconsiderado.

Considerar para tal o diagrama em blocos no plano complexo de Laplace da figura 6.22 com os seguintes dados:

$K_{th} = 500\ pu/pu$
$T_{th} = 0{,}005\ s$
$K_1 = 1{,}098\ pu/rad$
$K_2 = 1{,}202\ pu/pu$
$K_3 = 0{,}405\ pu/pu$
$K_4 = 1{,}096\ pu/rad$
$K_5 = -0{,}020\ pu/pu$
$K_6 = 0{,}162\ pu/pu$
$K_v = 2{,}5\ s$
$T_v = 1{,}0\ s$
$T'_{do} = 4{,}08\ s$

**Solução:**

As equações referentes torque elétrico que resolvem a presente questão são dadas pelas equações 6.34, 6.35 e 6.36, onde o parâmetro $T'_{do}$ já se encontra em segundos. Lembrar que no capítulo 5 esse parâmetro era dado em por unidade.

O sistema máquina síncrona *sem* regulador automático de tensão tem a seguinte equação para o torque elétrico

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} = K_1 - \frac{K_2K_3K_4}{1+(K_3T'_{do})^2\,\omega^2} + j\frac{K_2(K_3)^2K_4\,T'_{do}\,\omega}{1+(K_3\,T'_{do})^2\,\omega^2} \quad \text{em pu} \qquad (6.36)$$

Com a substituição dos valores que foram fornecidos, tem-se então que:

a) torque sincronizante em função da freqüência

$$T_S(S) = K_1 - \frac{K_2K_3K_4}{1+(K_3T'_{do})^2\,\omega^2} = 1{,}098 - \frac{0{,}5335}{1+2{,}7304\,\omega^2} \quad \text{em pu}$$

b) torque amortecedor em função da freqüência

$$T_A(S) = \frac{K_2 (K_3)^2 K_4 T'_{do}\,\omega}{1 + (K_3 T'_{do})^2 \omega^2} = \frac{0{,}8816\,\omega}{1 + 2{,}7304\,\omega^2} \quad \text{em pu}$$

o sistema máquina síncrona *com* regulador automático de tensão, dotado de um sistema de excitação que se utiliza de elementos tiristores, tem as seguintes equações para o torque elétrico cuja substituição dos valores fornecem as expressões:

1) torque sincronizante em função da freqüência

$$T_S = K_1 - \frac{\dfrac{K_2 K_5}{K_6}\left(1 - \dfrac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2\right)}{1 + \dfrac{(K_3 T'_{do} + T_v)^2}{K_3 K_v K_{th} K_6} - 2\dfrac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2 + \left(\dfrac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\right)^2 \omega^4} =$$

$$= 1{,}098 + \frac{0{,}14839 - 0{,}003\,\omega^2}{1{,}08578 - 0{,}040\,\omega^2 + 0{,}0004\,\omega^4} \quad \text{em pu}$$

2) torque amortecedor em função da freqüência

$$T_A = \frac{\dfrac{K_2 K_5}{K_6}\left(\dfrac{K_3 T'_{do} + T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega\right)}{1 + \dfrac{(K_3 T'_{do} + T_v)^2}{K_3 K_v K_{th} K_6} - 2\dfrac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\omega^2 + \left(\dfrac{K_3 T'_{do} T_v}{K_3 K_v K_{th} K_6}\right)^2 \omega^4} =$$

$$= -\frac{0{,}01273\,\omega}{1{,}08578 - 0{,}040\,\omega^2 + 0{,}0004\,\omega^4} \quad \text{em pu}$$

De posse das equações numéricas, para o problema em questão, são traçadas as curvas referentes aos valores dos torques elétricos sincronizante e amortecedor, tomando-se como base as duas condições exigidas pelo problema.
As figuras 6.24 e 6.25 mostram os gráficos dos valores de torque sincronizante e de torque amortecedor considerando-se um sistema com máquina síncrona contra a barra infinita sem regulador de tensão e com regulador de tensão.

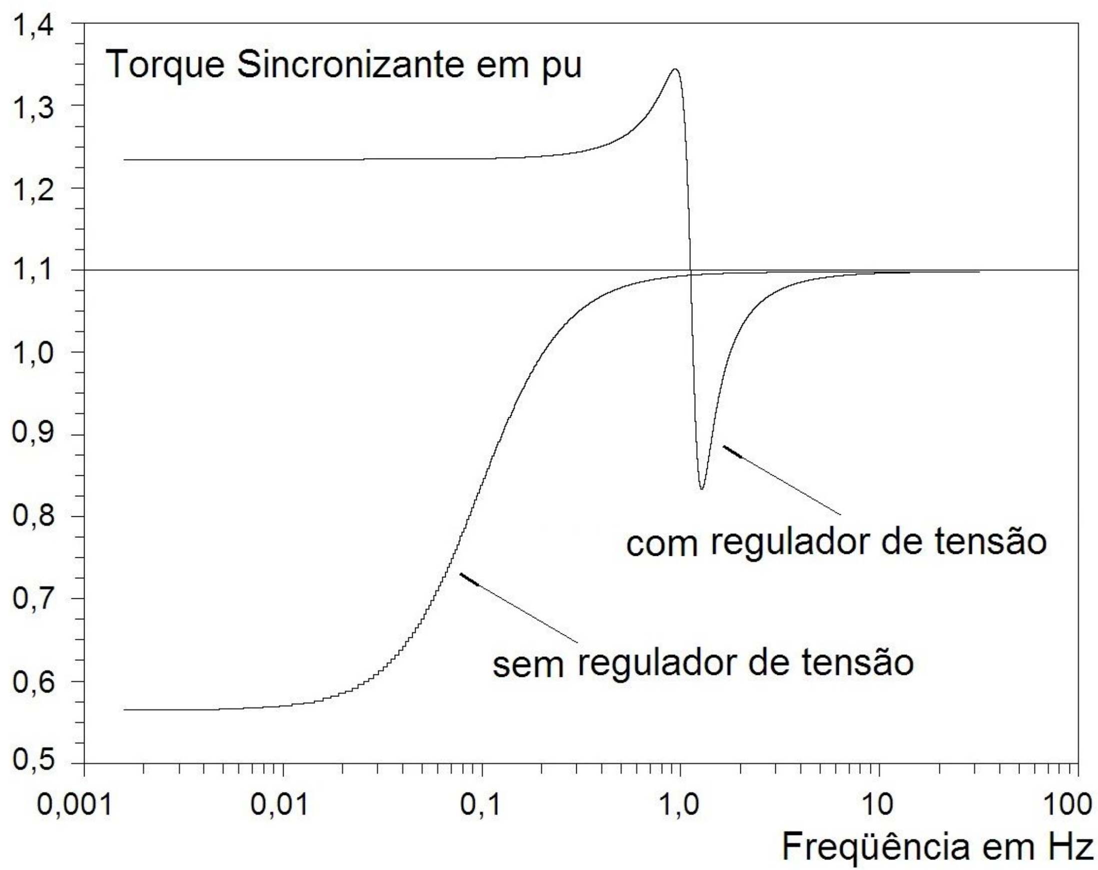



***Figura 6.24 – Gráfico do Torque Sincronizante versus Freqüência de Oscilação – Sistema Elétrico sem e com Regulador de Tensão Carregamento Nominal da Máquina Síncrona***

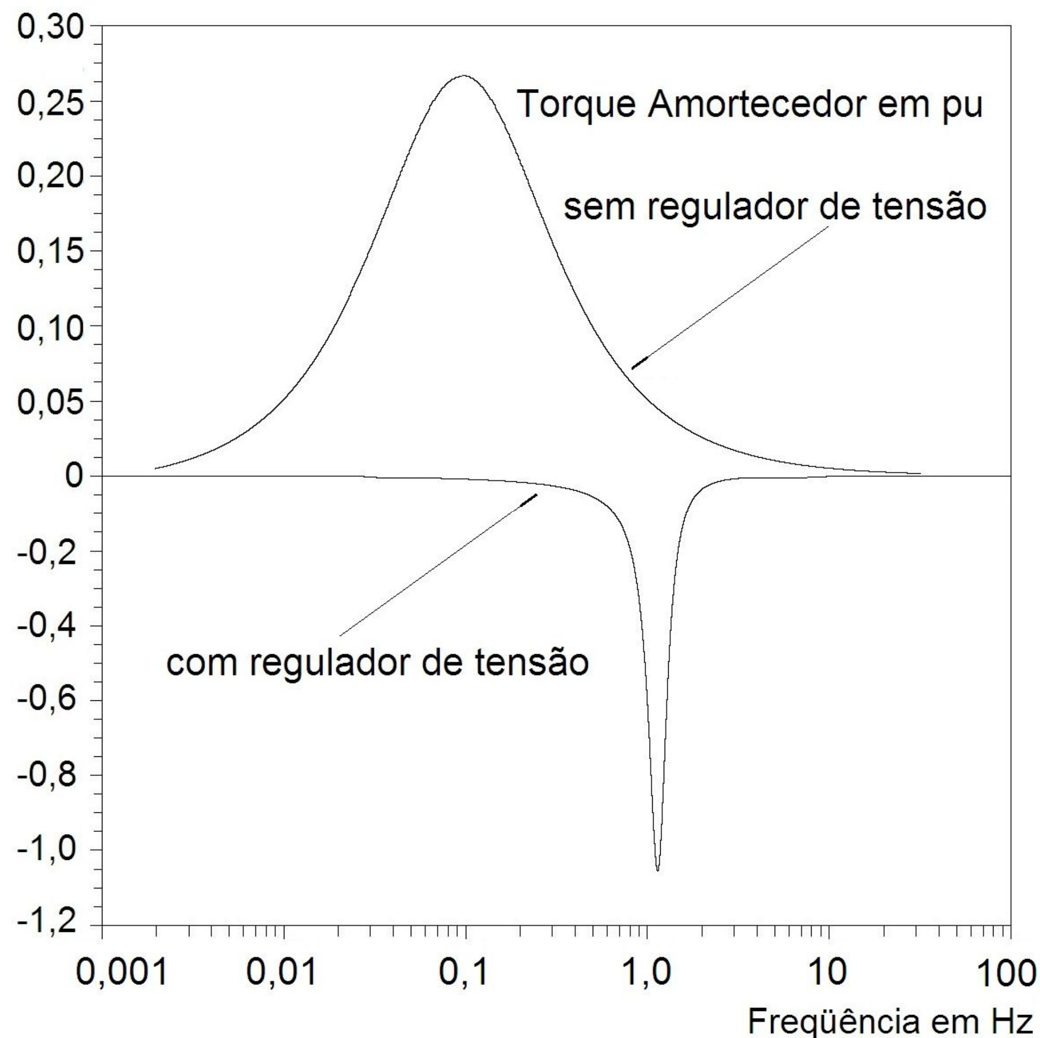



***Figura 6.25 – Gráfico do Torque Amortecedor versus Freqüência de Oscilação – Sistema Elétrico sem e com Regulador de Tensão Carregamento Nominal da Máquina Síncrona***

Algumas observações são importantes a essa altura das análises:

a expressão matemática para a representação do torque elétrico da máquina síncrona, aqui desenvolvida, tem a ver com o modelo linearizado que foi o escolhido para análise nesse livro;

a) também fica claro que o torque elétrico sincronizante, quando a máquina síncrona não se encontra sob controle de um regulador automático de tensão, sofre o efeito desmagnetizante por ação da reação da armadura à carga elétrica conectada, fato que na modelagem adotada é representado pela presença do parâmetro $K_4$; ver desenvolvimento da equação 5.80;

b) fica também claro que o torque sincronizante, quando a máquina síncrona se encontra sob controle de um regulador automático de tensão, praticamente não é reduzido sendo o efeito desmagnetizante por ação da carga reduzido nessa

condição, ver desenvolvimento da equação 6.34;

c) agora, observando a expressão matemática que representa o torque amortecedor, é percebido que ela tem o mesmo sinal do parâmetro $K_5$, ver desenvolvimento da equação 6.35. Isso significa que a presença de um regulador automático de tensão pode vir a reduzir o torque amortecedor conforme for o carregamento, pois há casos em que parâmetro $K_5$ se torna negativo, principalmente quando se trabalha na região próxima do carregamento nominal da máquina síncrona.

d) é evidente que a presença do regulador de tensão , por si só, não garante a manutenção de um torque amortecedor adequado para o sistema o que deverá ser obtido através da instalação dos chamados sinais estabilizantes também conhecidos por estabilizadores de potência ou PSS.

---

## 6.8. Estabilizadores de Potência ou PSSs

### 6.8.1. Introdução

A função imediata de um estabilizador de potência ou PSS, a partir daqui designado apenas por estabilizador de potência, é promover um amortecimento adicional contra as oscilações que se originam no SEP, oscilações essas que podem ser tanto de origem local quanto de origem regional ou até mesmo de origem inter-áreas de geração, se for levado em conta o ponto de instalação da máquina síncrona ou do gerador síncrono em questão.
Já foi visto que a introdução de um regulador de tensão dispondo de um ganho de controle elevado impõe à máquina síncrona, no caso um gerador síncrono, algumas vantagens e algumas desvantagens, se assim se pode dizer. Na realidade, para que se tenha um controle efetivo da tensão e da potência reativa, há que se exigir a presença de um gerador síncrono que disponha de um sistema de excitação robusto e perfeitamente controlável, o que implica na construção de um sistema com um regulador de tensão de ganho adequado. Essa condução acaba implicando na utilização de sistemas de controle automáticos com elevados valores de ganho do canal direto de controle da excitação associados a baixos valores de constantes de tempo de atraso envolvidas nesse processo.
A expressão *ganho elevado* não deve ser entendida aqui como, por exemplo, ganhos de valores infinitos em termos matemáticos. A expressão *ganho elevado* leva basicamente em conta o universo em que se trabalha com reguladores de velocidade e reguladores de tensão. Um sistema de excitação que emprega elementos do tipo *SCRs* certamente apresentará valores de ganho de controle superiores aos de um sistema equivalente montado a partir de excitatrizes rotativas.
No passado, trabalhar com valores mais elevados de ganho de canal direto para os reguladores de tensão esbarrava na própria dificuldade de se prover um sistema cuja resposta às solicitações fosse mais rápida. Questões tais como o uso de excitatrizes rotativas, a base de geradores de CC, no processo de retificação do sinal alternado associado aos conhecidos problemas de saturação magnética limitava esse procedimento. O próprio projeto da máquina síncrona não admitia sistemas de excitação dotados de super-taxas de variação da tensão de campo em

função de limitações ditadas pela classe de isolamento inerente à máquina síncrona.
A literatura técnica traz uma vasta gama de projetos de reguladores de tensão e sistemas de excitação abrangendo desde amplificadores magnéticos até sistemas do tipo metadínamos e amplidínamos, uma tradução do termo em inglês que se referencia à aplicação de geradores de CC dotados de escovas de eixo $d$. A referência 62 traz uma vasta teoria e exemplos práticos de aplicação de sistemas de controle dos anos 50 em que eram utilizados esses tipos de amplificadores, incluindo aí válvulas termiônicas, amplificadores magnéticos entre outros.
Como foi visto anteriormente nesse capítulo, uma das questões envolvendo o sistema de excitação vem associada às baixas taxas de amortecimento evidenciadas no processo. De maneira natural, componentes de certos sinais elétricos como o torque elétrico, por exemplo, não se apresentam, em termos de resposta em freqüência, em fase concordante com aqueles sinais componentes associados à freqüência elétrica do conjunto girante. Como se sabe, quando se mede um sinal de freqüência elétrica da rede, o que se está medindo, na realidade, é um sinal de freqüência acelerante que é proporcional à diferença entre a freqüência mecânica, geralmente associada ao órgão motriz de geração primária, e a freqüência elétrica associada à energia elétrica consumida pela carga, nesse sentido.
O sinal de torque elétrico que se encontra associado à rede elétrica, por conseguinte associado à carga elétrica assumida por uma determinada máquina síncrona, pode ser decomposto em dois sinais, sendo um diretamente proporcional ao ângulo elétrico de potência e outro diretamente proporcional à freqüência elétrica envolvida. Como já é do conhecimento, a componente do torque elétrico proporcional ao ângulo elétrico é conhecida como componente de torque sincronizante, ou simplesmente torque sincronizante, enquanto que a componente proporcional à freqüência elétrica é conhecida como torque amortecedor. Considerando-se esse aspecto, viu-se por bem assim o descrever uma vez que essas componentes do torque atuam de modo diferenciado sobre a estabilidade do SEP, embora sejam de mesma natureza.
A questão então é resolver esse problema com a utilização de algum tipo de sinal, em realimentação ativa de estado, através do qual a compensação dos atrasos provenientes da malha de excitação pudesse garantir um efeito de estabilização melhorando não só o amortecimento como também mantendo o sincronismo, principalmente quando a unidade de geração estivesse operando em sua capacidade nominal.
Há um bom tempo os estudiosos do assunto já se aperceberam de tais questões envolvendo, principalmente, o baixo amortecimento das oscilações de origem sistêmica e propondo para tal a utilização de estabilizadores de potência. A questão é que muita das vezes o assunto se limitava a resolver os problemas daquelas oscilações que vinham associadas ao que se acostumou chamar de *modo local de oscilação*.
Quando a malha elétrica do sistema brasileiro começou a crescer, os problemas tornaram-se uma realidade e abriu-se aí uma nova perspectiva de estudo e pesquisa nesse campo. Houve, desde então, grande avanço com o desenvolvimento de novos projetos de estabilizadores de potência, além de medidas outras que culminaram com a reavaliação de ajustes tanto do sistema de regulação quanto do sistema de proteção de inúmeras unidades geradoras.
A forma como um suposto compensador de estado, no caso o estabilizador de potência, seria implementado não foi outra senão introduzir o sinal de realimentação

diretamente na referência do regulador de tensão uma vez que é a partir dali que o problema ligado ao baixo amortecimento é verificado. Existem outras razões que justificam essa implementação tal como a que define a função de um estabilizador de potência como sendo um dispositivo que visa mudar o valor da tensão terminal de um gerador síncrono durante as oscilações de baixa freqüência de modo que possa permitir que as variações da tensão terminal ocorram em fase com a freqüência de rotação.

## 6.8.2. Breve Histórico

No final dos anos 70 e início dos anos 80, o Brasil passava por um grande desenvolvimento na área da energia elétrica com a construção de grandes usinas e um conseqüente aumento da carga instalada. Com a necessidade de alimentação dessas cargas, a malha de transmissão do país mais que dobrou nesse período.
A nova configuração do parque energético promoveu uma mudança de pensamento de modo que situações até então desconhecidas, ligadas ao SEP, promoveram uma reformulação na filosofia tanto de manutenção quanto de operação das novas instalações.
Houve grande crescimento do parque gerador de hidreletricidade no país com a construção das grandes usinas de empresas federais como Furnas, Eletrosul, Chesf e Eletronorte e de empresas estaduais como a Cesp, Copel, Ceee, Cemig, Light SP, CPFL entre outras.
Nota-se, nesse período, o surgimento dos primeiros planos operacionais de despacho de carga entre as empresas concessionárias de energia, planos esses promovidos e gerenciados pelo então GCOI, um grupo formado por essas empresas.
Segundo divulgação do BEN de 2005, entre os anos de 1970 e 1980 a hidreletricidade no Brasil subiu de $13$ para $27\ GW$, um aumento substancial para a época. Além das grandes usinas, houve também a entrada em operação da UHE Itaipu Binacional, a maior unidade de produção do mundo na época, um bloco de geração que previa então $18$ máquinas de $725\ MW$ cada uma.
Em termos de problemas com a estabilidade, uma das características verificadas na época foi o aparecimento de oscilações eletrodinâmicas na potência ativa elétrica gerada entre as grandes instalações do sul-sudeste.
A ocorrência dos *blackouts* de 18/08/1985 e de 17/09/1985 colocou em alerta as áreas de Engenharia de todas as empresas que operavam com o SIN.
Depois de várias análises, houve a constatação da existência de baixo amortecimento nas respostas transitórias associado aos principais controladores automáticos de potência ativa e potência reativa do sistema.
Podia se dizer que, em termos de estudos, não se trabalhava com análise de modelagem no plano complexo de controladores automáticos até então.
As simulações computacionais que havia se resumiam a utilização de computadores analógicos e, quando muito, a computação digital que por ora era utilizada apenas nas áreas de planejamento e de fluxo de carga.
Os poucos modelos de que se dispunha eram de alguns reguladores de tensão e não passavam de modelagem teórica e generalizada.
As técnicas de simulação eram simples e se limitavam apenas à representação linear de equações diferenciais bem simplificadas.
Aspectos ligados a não-linearidades eram desconsiderados nos estudos.

Com um investimento enorme promovido pelas empresas do setor elétrico em treinamento, estudos e ensaios de campo, foi possível detectar a existência de vários problemas cuja solução demandou um programa extenso de trabalho. Os estabilizadores de potência existentes foram reajustados enquanto outros foram trocados e ajustados. O sistema de proteção de máquina foi reajustado de modo a se respeitar uma determinada coordenação em relação ao sistema de controladores automáticos como reguladores de velocidade, reguladores de tensão, limitadores de reguladores e estabilizadores de potência.
Uma das características mais relevantes desse trabalho foi a certeza sobre a implementação dos estabilizadores de potência do tipo potência acelerante em substituição aos até então utilizados estabilizadores de potência elétrica. Na realidade, os estabilizadores de potência denominados de estabilizadores de potência acelerante não utilizam do sinal puro da potência acelerante, mas sim um sinal da freqüência acelerante que é sintetizado a partir dos sinais da freqüência elétrica e da potência ativa elétrica da máquina em que o dispositivo opera.
Em termos gerais, naquela época, ficou constatado que os estabilizadores de potência até então existentes e instalados, na melhor situação, estavam ajustados para promover o amortecimento *do modo local de oscilação*, apenas, sendo que outros se encontravam desajustados ou fora de serviço.
Também ficou constatado, através da instalação de dispositivos de medição da freqüência na barra de $500\ kV$, da UHE Emborcação (4 x 298 MW), que a oscilação da freqüência do modo *inter-áreas* além de estar numa faixa diferente, não se encontrava dentro da faixa de atuação daqueles estabilizadores de potência em operação. O valor medido em 06/10/1988, após abertura do elo de CC de Foz do Iguaçu com a saída de $2.200\ MW$ de geração, foi de $0{,}52\ Hz$, ver referência 67. Também da mesma referência foi possível obter o valor da freqüência de oscilação amortecida do modo local que ficou na casa de $1{,}5\ Hz$.
Quando se buscou uma forma de fazer com que o estabilizador de potência do tipo potência ativa elétrica permitisse aumentar o amortecimento, contemplando essas duas condições, percebeu-se desta impossibilidade. O fato é que aqueles tipos de estabilizadores de potência não haviam sido projetados para tal, além do fato de que a elevação do ganho de saída do estabilizador provocava a amplificação de oscilações que mais tarde foram identificadas como sendo de origem hidráulica, fato que também pode ser constatado na mesma referência citada.
Em face destas dificuldades, optou-se pela substituição do estabilizador de potência original, do tipo em potência ativa elétrica, pelo estabilizador de potência por potência acelerante o que permitiu um ajuste adequado para uma faixa mais ampla de freqüência. Dotados de um bloco específico de filtragem das oscilações de origem hidráulica, foi possível elevar o ganho de saída de controle com excelentes resultados operacionais que puderam ser comprovados em inúmeras ocorrências posteriores.

### 6.8.3. Sistemática de Ajuste do Estabilizador de Potência

#### 6.8.3.1. Aspectos Iniciais

Para o estudo, será novamente utilizado o diagrama em blocos da figura 6.22 considerando-se apenas os ramos que interferem na formação do torque elétrico.

Na figura 6.26, o bloco cuja função de transferência está indicada por $G_e(S)$ representa o estabilizador de potência que realimenta um sinal genérico $\Delta G(S)$ podendo este ser um sinal da velocidade de rotação do grupo, da freqüência da barra, da potência elétrica do grupo, da potência acelerante ou de qualquer outra grandeza sujeita ao fenômeno da oscilação sustentada de origem sistêmica.
A função $G_e(S)$, em uma dada freqüência, deverá apresentar um ângulo de fase adiantado daquele que se encontra ditado pela malha de excitação. Considerar o seguinte raciocínio.

Para a malha fechada de excitação do diagrama da figura 6.26, com $\Delta\delta(S) = 0$ e sem a presença do estabilizador de potência, obtém-se que:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -\frac{K_2\, K_v\, K_{th}\, K_3}{(1+T_v S)(1+T_{th} S)(1+K_3 T'_{do} S) + K_v\, K_{th}\, K_3\, K_6} \quad \text{em pu} \quad (6.37)$$

Considerando a relação $K_3\, K_v\, K_{th}\, K_6 >> 1$ e desprezando o valor da constante de tempo $T_{th}$, obtém-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -\frac{K_2}{K_6}\,\frac{1}{1+\left(\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v\, K_{th}\, K_3\, K_6}\right)S+\left(\frac{T_v\, K_3 T'_{do}}{K_v\, K_{th}\, K_3\, K_6}\right)S^2} \quad \text{em pu} \quad (6.38)$$

Supondo que a função de transferência $\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)}$ tenha um ângulo $\alpha$, de atraso em relação ao eixo $\Delta\omega$ referente à freqüência elétrica, deve-se introduzir em série com esta função outra função de compensação com um ângulo $\beta$ de avanço em relação ao mesmo eixo $\Delta\omega$ considerado, a fim de se promover a correção desejada.

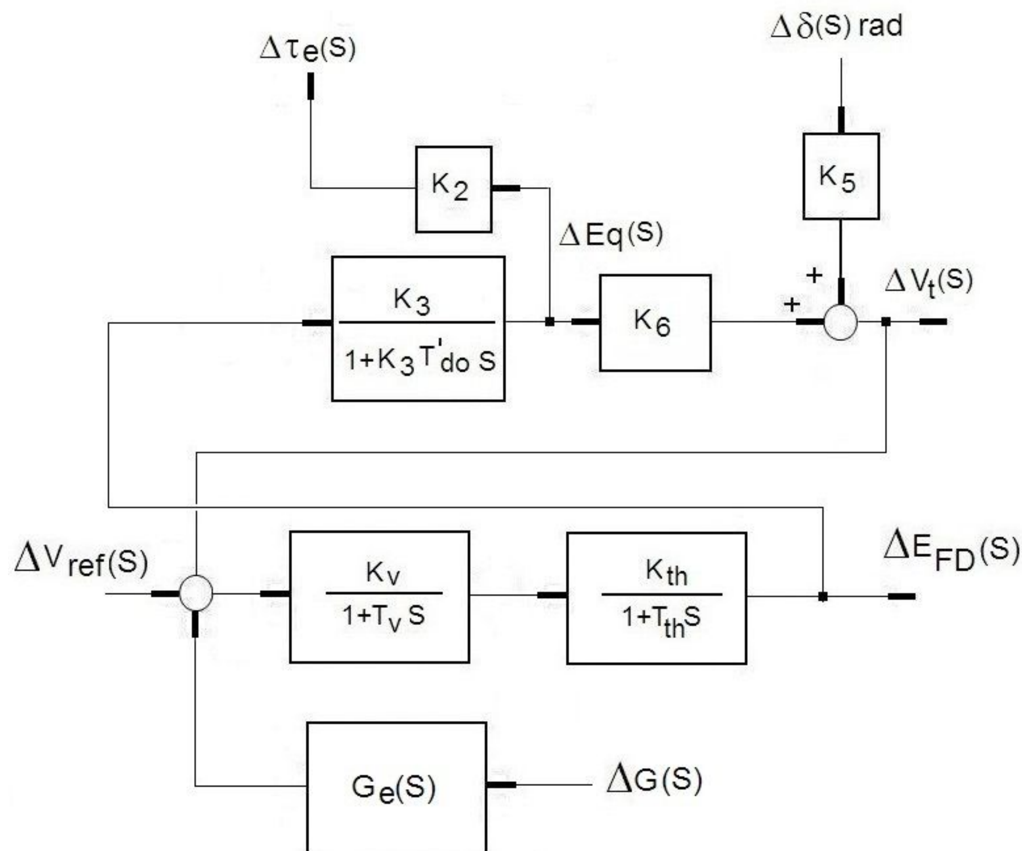



***Figura 6.26 – Malha Elétrica da Máquina Síncrona***
***Regulador de Tensão com o Estabilizador de Potência***

Pela figura 6.26 é possível deduzir que esta função de compensação procurada é a própria função de transferência $G_e(S)$ do estabilizador.

As oscilações sustentadas são originárias das baixas taxas de amortecimento que são verificadas nos sistemas elétricos que podem advir do elevado carregamento quando é observado que parâmetro $K_5$ torna-se negativo, caracterizando um atraso de resposta na malha do torque elétrico.

A parcela do torque elétrico identificada por $\Delta\tau_e(S)$ representa apenas aquela parte sob influência da excitação sem a presença do parâmetro relativo ao torque sincronizante $K_5$ que não interfere nos cálculos relativos aos efeitos amortecedores.

Esta parcela $\Delta\tau_e(S)$ pode ser representada pela figura 2.27, lembrando sempre que na substituição de $S = j\omega$ a , quando do estudo do estabilizador de potência, a referência será sempre o eixo da freqüência porque assim foi feito.

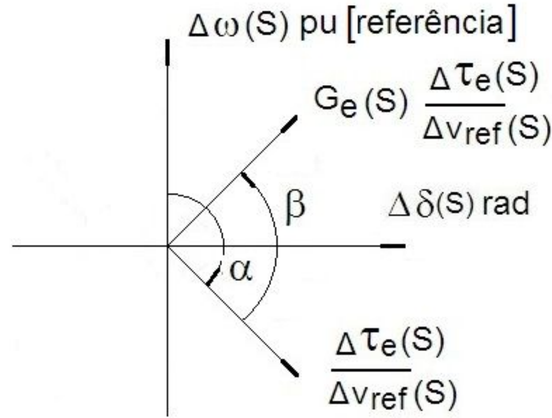



***Figura 6.27 – Diagrama Vetorial dos Torques Elétricos***

Em termos vetoriais, pode-se afirmar que:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} \rightarrow \text{atraso de } \alpha$$

e, logo após a compensação dada pelo estabilizador de potência:

$$G(S)\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} \rightarrow \text{avanço de } \beta$$

**Nota:** é interessante constatar na figura 6.27 que, originalmente, o sistema de controle estava provendo um torque amortecedor negativo, bastando para isso observar a projeção do vetor $\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)}$ sobre o semi-eixo negativo da freqüência, eixo das ordenadas. Logo após a compensação, tanto a parte relativa ao torque amortecedor quanto a parte relativa ao torque sincronizante ficaram do lado positivo de cada um dos eixos. A parcela relativa ao torque sincronizante pode ser vista na projeção sobre o eixo do ângulo elétrico de potência, eixo das abscissas. A condição com compensação é aquela esperada para que exista um controle mais efetivo da tensão de saída da máquina síncrona.

As seguintes relações são válidas, onde $T_S$ está relacionado com o torque sincronizante e $T_A$ relacionado com o torque amortecedor, antes e depois da compensação via estabilizador de potência:

$$T_{S(antes)} = \frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} \cos\alpha \quad \text{em pu} \qquad (6.39)$$

$$T_{A(antes)} = -\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} \sin\alpha \qquad \text{em pu} \qquad (6.40)$$

$$T_{S(depois)} = G_e(S)\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} \cos\beta \qquad \text{em pu} \qquad (6.41)$$

$$T_{A(depois)} = G_e(S)\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} \sin\beta \qquad \text{em pu} \qquad (6.42)$$

Portanto, pelas explicações apresentadas, baseadas em estudos teóricos e levantamentos de campo, fica mais claro do que se trata o problema do atraso provocado pela malha do sistema de excitação da máquina síncrona e o que isso tem a ver com as oscilações prolongadas durante as respostas do sistema de controle a determinadas ocorrências.
Essas oscilações são, portanto, de origem sistêmica, ou seja, de origem do sistema elétrico de potência e geralmente ocorrem numa faixa de freqüência própria entorno de $0{,}30$ a $1{,}80\ Hz$, compreendendo aí o limite inferior para as oscilações do modo inter-áreas e o limite superior para as oscilações do modo local ou regional de instalações hidrelétricas.
Com relação à função de transferência do estabilizador de potência, $G_e(S)$, normalmente o que se vê é um bloco de funções que pode vir embutido no conjunto de funções componentes do regulador de tensão ou separado deste compondo um pequeno bloco à parte.
Seja qual for o arranjo adotado, o certo é que o estabilizador de potência, trata-se de um sistema discriminado que se utiliza de uma ou mais variáveis de estado cuja saída é um único sinal que dá entrada no ponto de referência relativa ao sinal de erro de tensão para o regulador de tensão da máquina síncrona.
Fisicamente, a topologia interna do estabilizador de potência pode apresentar um, dois ou três canais de entrada de sinais analógicos e/ou digitais e um sinal de saída de controle, podendo este ser analógico ou digital conforme o tipo do regulador. Possui também sinais de supervisão que monitoram a saída de controle associada a sinais tais como potência ativa elétrica, tensão terminal e a própria saída do estabilizador. Em termos de função de transferência, o estabilizador é constituído de blocos padronizados onde são vistos filtros do tipo *reset*, do tipo bi-quadrático, filtros de ordem superior entre outros. Também são vistas cadeias de amplificadores, limitadores, somadores e um grupo específico do tipo *lead-lag* que pode aparecer em um ou mais estágios constituindo os verdadeiros compensadores de atraso-avanço que é a razão principal do dispositivo.
Em termos práticos, existem, basicamente, três tipos de estabilizador de potência que são largamente usados nas instalações elétricas, principalmente no SIN, graças a um esforço conjunto onde se uniram empresas concessionárias de energia e fabricantes de reguladores de velocidade e reguladores de tensão. Eles são do tipo potência acelerante ou freqüência acelerante por sintetização da potência mecânica ou freqüência mecânica, do tipo potência elétrica e de tipo freqüência, sendo esse último um tipo visto mais na teoria que na prática.
No próximo tópico serão descritos cada um desses três tipos de estabilizador de

potência onde serão mostradas as suas principais vantagens e desvantagens num sentido mais estrito.

### 6.8.3.2. Estabilizador de Potência do Tipo Potência Elétrica

O estabilizador de potência do tipo potência elétrica, na realidade, é um tipo de dispositivo que se utiliza da potência ativa elétrica gerada pela máquina síncrona como seu sinal de entrada. Este tipo de sinal adicional, até mesmo pela facilidade de sua implementação, é o mais difundido entre os sinais adicionais utilizados em sistemas de excitação de máquinas síncronas.

Como a realimentação do estado é promovida em potência ativa elétrica da máquina em questão, considerando-se a figura 6.26, pode-se escrever que:

$$\Delta G(S) = \Delta p_e(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.43)$$

Mas sabe-se também, do balanço das potências ou torques, que:

$$\Delta \tau_m(S) = \Delta \tau_a(S) + \Delta \tau_e(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.44)$$

onde

$\Delta \tau_m(S)$: variação do torque mecânico motriz primário

$\Delta \tau_a(S)$: variação do torque acelerante

$\Delta \tau_e(S)$: variação do torque elétrico da carga

Ou melhor, em termos de potência, já que se está trabalhando em por unidade numa base de valores previamente escolhida:

$$\Delta p_m(S) = \Delta p_a(S) + \Delta p_e(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.45)$$

Como as freqüências de oscilação, para as quais a compensação do estabilizador é pedida, estão em certos valores considerados elevados para a regulação da turbina, a função relativa à regulação de velocidade não contribuirá para os efeitos oscilantes da equação de balanço, de onde se pode considerar que a variação da potência mecânica será nula nesta faixa.

Deste modo tem-se, para a equação de balanço das potências, que:

$$\Delta p_a(S) + \Delta p_e(S) = 0 \quad \therefore \quad \Delta p_e(S) = -\Delta p_a(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.46)$$

Mas sabe-se também, observando o diagrama em blocos da figura 6.22, que a potência acelerante, no plano complexo de Laplace, é dada por:

$$\Delta p_a(S) = 2H\,S\,\Delta\omega(S) \qquad \text{em pu} \qquad (6.47)$$

Logo, a equação de sintetização da potência elétrica em função da freqüência tomará o seguinte aspecto:

$$\Delta p_e(S) = -2H\,S\,\Delta\omega(S) \qquad \text{em pu} \qquad (6.48)$$

Com base no diagrama em blocos da figura 6.26, Incluindo o bloco do estabilizador de potência na função de transferência da equação 6.38, as seguintes deduções são então possíveis:

$$\Delta G(S) = \Delta p_e(S) = -2H\,S\,\Delta\omega(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.49)$$

e

$$\Delta v_{ref}(S) = G_e(S)\,\Delta G(S) = G_e(S)\,\Delta p_e(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.50)$$

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta p_e(S)} = -\frac{K_2}{K_6}\,\frac{G_e(S)}{1+\left(\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S+\left(\frac{T_v\,K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S^2} \quad \text{em pu} \quad (6.51)$$

Ou seja:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\omega(S)} = \frac{2H\,K_2}{K_6}\,\frac{S\,G_e(S)}{1+\left(\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S+\left(\frac{T_v\,K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S^2} \quad \text{em pu}$$

(6.52)

Deve-se lembrar que:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\omega(S)} = -j\,\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\delta(S)} \qquad \text{em pu} \qquad (6.53)$$

Caso haja o desejo de se trabalhar com um amortecimento puro deve-se ter $\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta\omega(S)} = 1$ pu/pu e, para tal, a partir da equação 6.52, vem que:

$$G_e(S) = \frac{K_6}{2H\,K_2 S}[\,1 + (\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\;K_6})S + (\frac{T_v\,K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\;K_6})S^2\,] \quad \text{em pu} \tag{6.54}$$

Deste modo, se assim for considerado o amortecimento puro, levando-se a expressão de $G_e(S)$, da equação 6.54, na equação 6.38 vem que:

$$G_e(S)\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -\frac{1}{2H\,S} \quad \text{em pu} \tag{6.55}$$

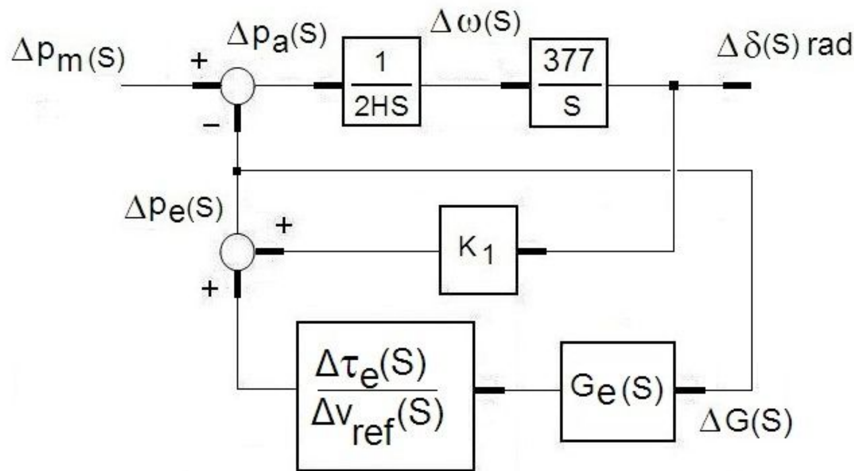



***Figura 6.28 – Estabilizador de Potência Tipo Potência Ativa Elétrica***

Supondo-se agora o estabilizador de potência do diagrama da figura 6.28, onde o torque elétrico analisado é proveniente da malha de excitação com o coeficiente de amortecimento $D$ desprezado, vem que a função de transferência $\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)}$ será dada pela seguinte expressão, se for considerado que se queira um amortecimento puro:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)} = \frac{\frac{377}{2HS^2}}{1 + \frac{377}{2HS^2}(\frac{K_1}{1 + \frac{1}{2HS}})} \quad \text{em rad/pu} \tag{6.56}$$

A equação 6.56 pode ser mais bem distribuída algebricamente fornecendo a seguinte função de transferência:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)} = \frac{\frac{377}{2H} + \frac{377}{(2H)^2 S}}{S^2 + \frac{1}{2H} S + \frac{377 K_1}{2H}} \quad \text{em rad/pu} \qquad (6.57)$$

O que se pode notar é o efeito residual que foi introduzido no sistema de controle caracterizado pela segunda parcela do numerador do segundo membro da função de transferência mostrada na equação 6.57. Ali há a presença de um integrador puro, uma característica que foi introduzida no controle em função da adoção desse tipo de estabilizador de potência.

Qualquer que seja a variação da potência mecânica, por menor que seja esta, haverá uma atuação contínua através da parcela $\frac{1}{S}$ lá existente.

No sentido de evitar esse inconveniente, os projetistas e os fabricantes de sistemas de controle vieram por bem dotar seus estabilizadores de potência de um dispositivo de filtragem do tipo passa-alta ou filtro *reset* logo na entrada do sinal de potência ativa elétrica. Assim é introduzido um filtro em série com a função de transferência $G_e(S)$ do estabilizador de potência cuja função é anular o efeito da integração contínua que foi introduzido na cadeia de regulação de tensão da máquina síncrona. Como os filtros do tipo *reset* apresentam a função derivativa, sua ação direta sobre o canal da potência ativa eliminaria o problema. Para que não haja interferência desse bloco naquele bloco responsável direto pela compensação do atraso na malha de controle, o filtro *reset* é ajustado com elevadas constantes de tempo que, geralmente, ficam dentro de uma faixa de valores de $2$ a $50\ s$. Alguns fabricantes, por questões de implementação, costumam utilizar dois estágios de *reset*.

**Nota:** durante todo o processo de análise do estabilizador de potência, não foi levada em conta a influência do ângulo de potência, uma vez que a máquina sempre esteve operando com carga. A questão é que para efeito do estabilizador de potência, a influência do ângulo de potência é muito pequena se for considerada. Outro fator é que não se deve operar com um estabilizador de potência com ações fortes sobre o sistema. Essa é uma das razões pelas quais os projetistas e fabricantes costumam limitar o sinal de saída do estabilizador numa faixa de $\pm 10\%$ ou $\pm 0{,}10\ pu$, antes de ser efetivamente aplicado ao sistema de controle.

---

## EXEMPLO 6.8

Dado o seguinte diagrama em blocos de um estabilizador de potência do tipo potência elétrica desenhado na figura 6.29, estudar a possibilidade de ajuste desse dispositivo no sentido de melhorar as condições de estabilidade do sistema elétrico composto por uma máquina síncrona contar a barra infinita.

Considerar para tal o diagrama em blocos no plano complexo de Laplace da figura 6.22 com os seguintes dados apresentados no exemplo 6.7 além de outros que não apareceram naquele exemplo:

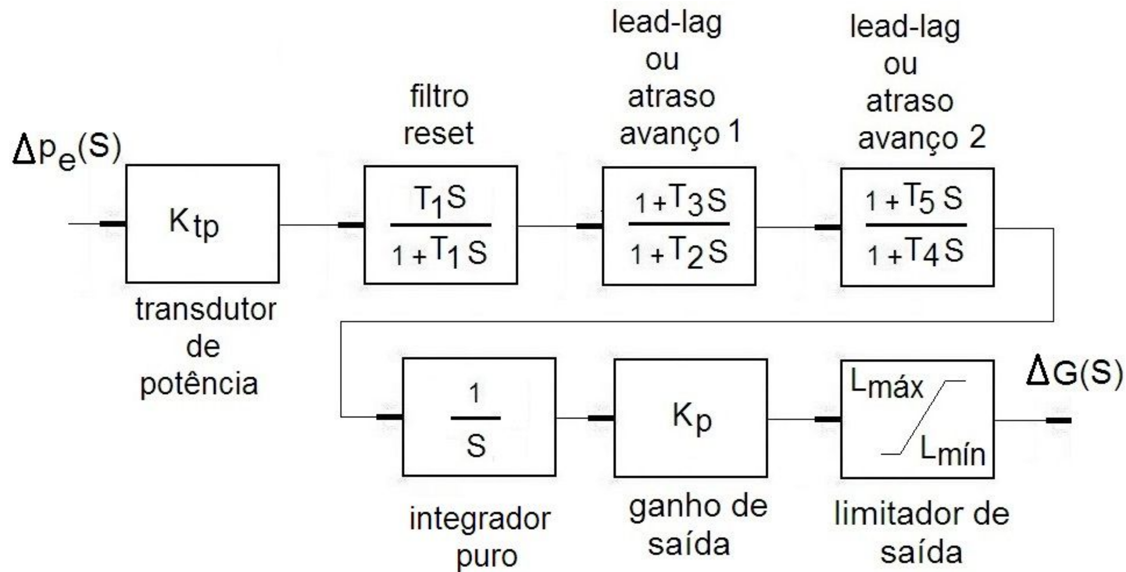



***Figura 6.29 – Estabilizador de Potência Padrão do Tipo Potência Elétrica***

São os seguintes os parâmetros ligados ao estabilizador de potência:

$K_{tp}$ : ganho do transdutor de potência ativa

$K_p$ : ganho de saída do estabilizador

$T_1$ : constante de tempo do filtro reset

$T_2$ : constante de tempo de atraso

$T_3$ : constante de tempo de avanço

$T_4$ : constante de tempo de atraso

$T_5$ : constante de tempo de avanço

$L_{máx}$ : limite máximo de saída do estabilizador

$L_{mín}$ : limite mínimo de saída do estabilizador

**Solução:**

A primeira medida a ser tomada é avaliar a real necessidade de se colocar o estabilizador de potência em serviço o que pode ser verificado com um simples ensaio de resposta do controle a um degrau de tensão aplicado na referência do regulador de tensão com a inspeção do sinal da potência ativa elétrica. Portanto, um ensaio que deverá ser feito com a máquina síncrona interligada e carregada em sua potência nominal, de preferência. Diz-se de preferência porque nesta fase não necessariamente é exigido que a máquina esteja operando próximo de sua carga nominal. O importante é que a máquina esteja interligada.

A figura 6.23 mostra a resposta do controle de tensão do sistema em questão a um degrau na referência do regulador de tensão, tendo sido colhidos os sinais da tensão terminal e da potência ativa elétrica, estando, portanto, a máquina com carga. Percebe-se a forte oscilarão presente o que demonstra, pelo menos para aquela oscilação associada ao *modo local de oscilação*, a existência de um baixo valor do torque amortecedor.
Essa se trata de uma primeira impressão que deverá ser confirmada em cálculo.
Para o caso de ser exigido que a compensação seja para um amortecimento puro, deve prover aos cálculos conforme já foi demonstrado anteriormente e que culminou com a equação 6.54, repetida a seguir.

$$G_e(S) = \frac{K_6}{2H\,K_2 S}\left[1 + \left(\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S + \left(\frac{T_v\,K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S^2\right] \quad \text{em pu}$$

Evidentemente que ao se tentar montar um bloco físico do estabilizador de potência, considerando a função de transferência da equação 6.54, é bem possível que se depare com a presença de raízes complexas do polinômio do segundo grau, configurando uma dificuldade. A questão é que ao se trabalhar com valores elevados de ganho de canal direto, principalmente em sistemas de excitação estática, é certeza de que aparecerão raízes complexas em pares conjugados.
O que se faz é obter uma função de transferência aproximada que forneça o devido amortecimento na faixa desejada.

A regra é analisar, primeiro, a função de transferência de malha fechada do sistema de controle que é dada pela relação $\frac{\Delta v_t(S)}{\Delta v_{ref}(S)}$ nas duas condições, com e sem a presença do estabilizador de potência. Agora, como ainda não se sabe qual será a função de transferência do estabilizador de potência o que se pode fazer é estudar uma combinação das constantes de avanço e atraso que dentro da possibilidade fornecida pelo equipamento.
Uma das limitações existentes na prática tem tudo a ver com essa situação, uma vez que os fabricantes, geralmente, não disponibilizam largas faixas de ajuste.
Para o modelo de estabilizador de potência apresentado na figura 6.29, a limitação de ajustes é notória, mas ainda tem a presença de um integrador puro específico, uma novidade.
Após inúmeras simulações foi possível utilizar um estabilizador de potência com a seguinte função de transferência que permitiu a redução do ganho da malha de canal direto do sistema de excitação na freqüência próxima do *modo local de oscilação* que se encontra na faixa de $1{,}0\ Hz$.
As figuras 6.30, 6.31, 6.32 e 6.33 mostram as respostas em freqüência e no domínio do tempo do sistema sem e com estabilizador de potência.

A função de transferência escolhida para o estabilizador de potência foi a seguinte:

$$G_e(S) = \frac{0{,}01}{S}(1+S)^2 \quad \text{em pu}$$

Os parâmetros do estabilizador de potência escolhidos foram os seguintes:

$K_{tp} = 1$ pu/pu

$K_p = 0{,}01$ pu/pu

$T_1 = 5$ s

$T_2 = 0{,}00001$ s

$T_3 = 1{,}0$ s

$T_4 = 0{,}00001$ s

$T_5 = 1{,}0$ s

$L_{máx} = +0{,}1$ pu

$L_{mín} = -0{,}1$ pu

**Nota:** como o estabilizador de potência aqui estudado se trata de um modelo numérico, houve por bem trabalhar com um valor muito pequeno para as constantes de tempo $T_2$ e $T_4$ a fim de se evitar a presença de uma função de transferência cuja fração fosse não própria.

As funções de transferência do sistema de excitação em questão, respectivamente nas condições sem e com estabilizador de potência ajustado, são dadas a seguir.

$$\frac{\Delta \tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -\frac{7{,}41975\,S}{1 + 0{,}03234\,S + 0{,}020\,S^2} \quad \text{em pu}$$

e

$$\frac{\Delta \tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -91{,}411\,\frac{S}{1 + 14{,}32\,S + 1{,}3984\,S^2 + 0{,}2464\,S^2} \quad \text{em pu}$$

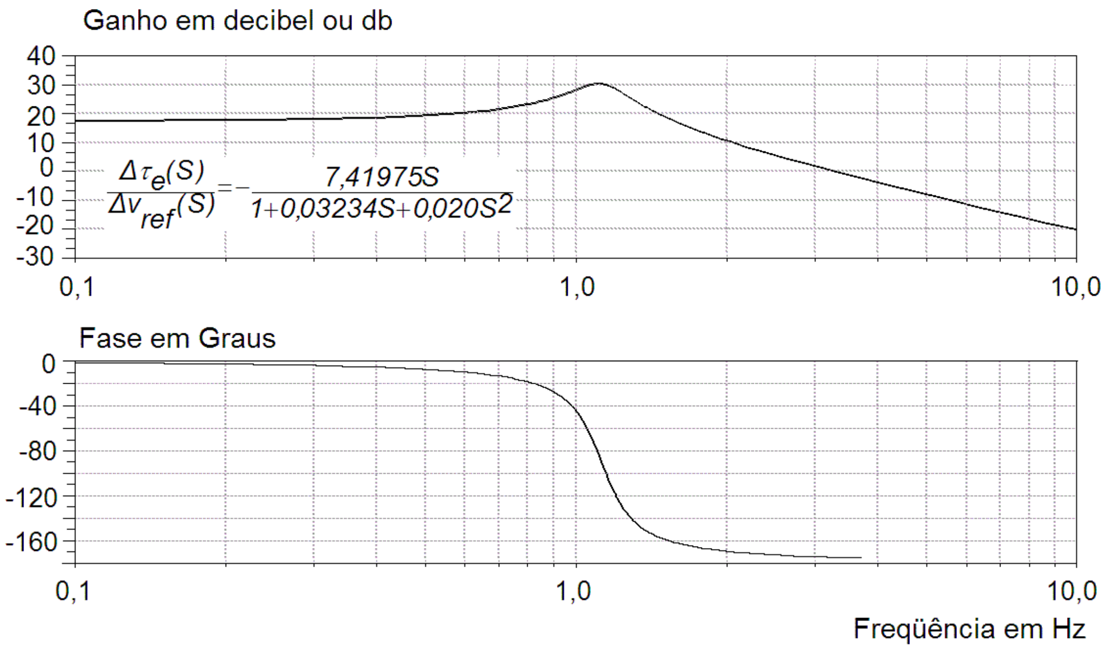



***Figura 6.30 – Resposta em Freqüência do Sistema de Excitação do Exemplo 6.8 sem Estabilizador de Potência***

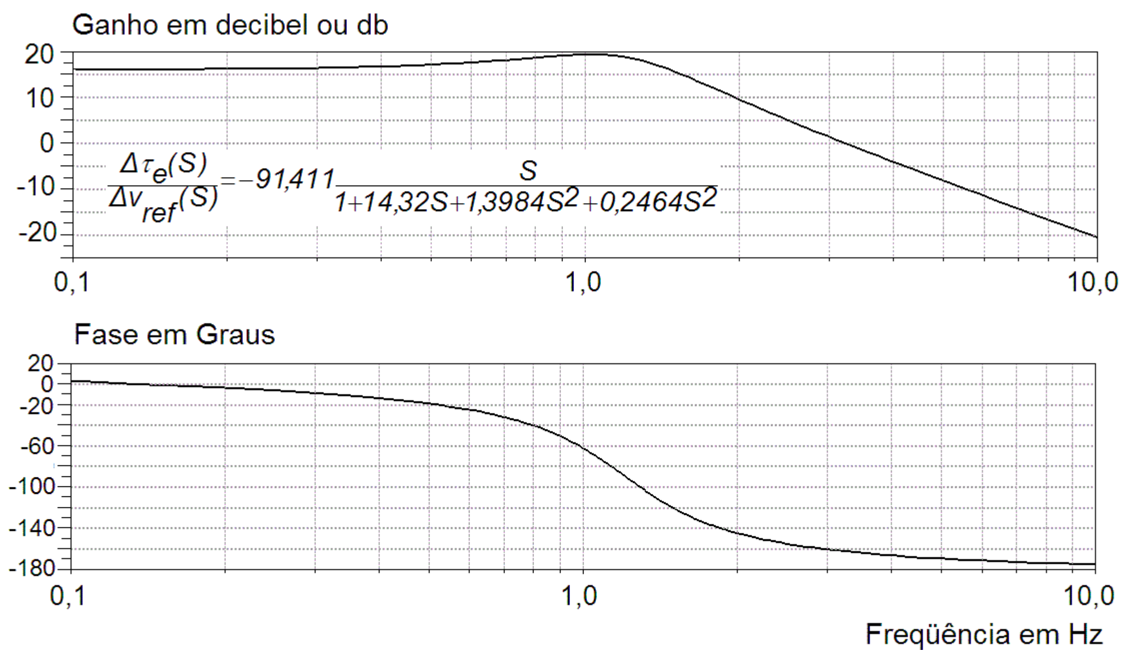



***Figura 6.31 – Resposta em Freqüência do Sistema de Excitação do Exemplo 6.8 com Estabilizador de Potência***

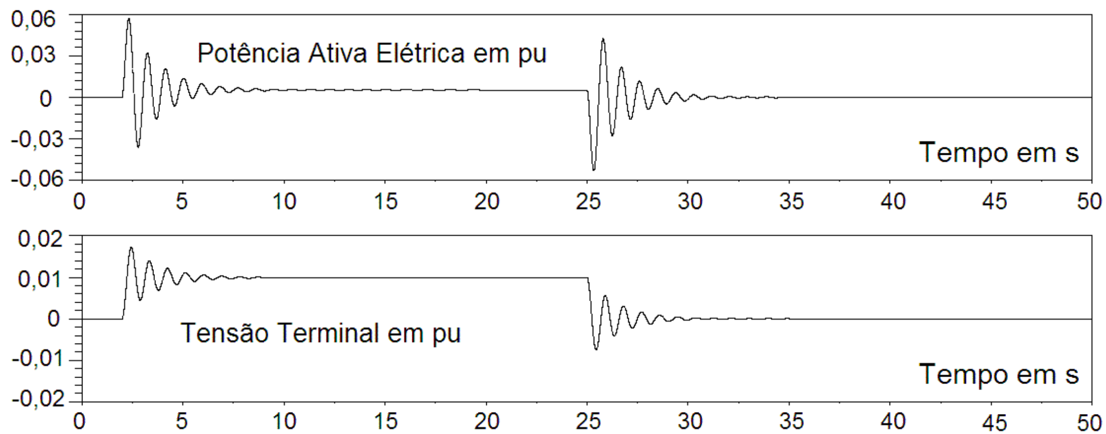



***Figura 6.32 – Resposta ao Degrau na Referência do Sistema de Excitação do Exemplo 6.8 sem Estabilizador de Potência***

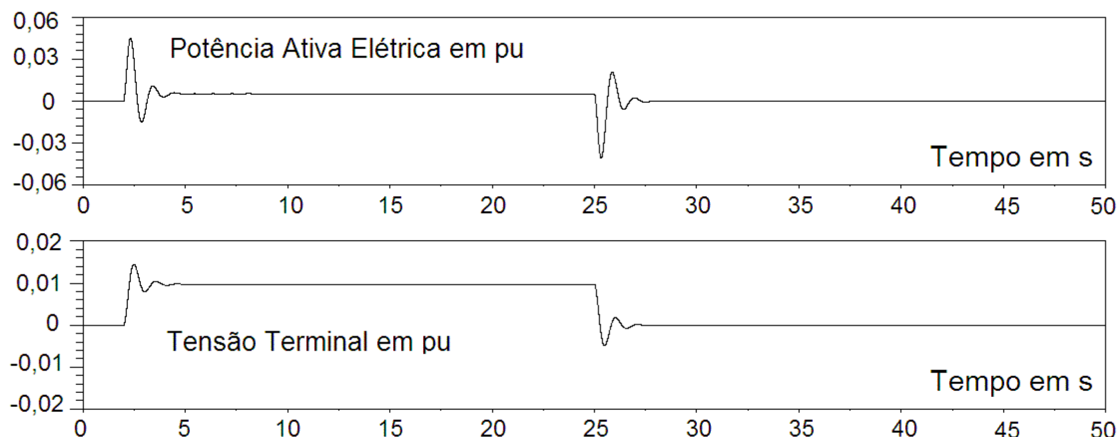



***Figura 6.33 – Resposta ao Degrau na Referência do Sistema de Excitação do Exemplo 6.8 com Estabilizador de Potência***

**Nota:** ainda que o sistema tenha ficado mais amortecido com a presença do estabilizador de potência, duas questões ainda persistem; a primeira tem a ver com a existência de alguma oscilação presente na forma de onda da tensão terminal, enquanto a outra, mais importante, tem a ver com a questão de o amortecimento estar associado apenas ao *modo local de oscilação* enquanto já se sabe que o ideal seria que os ajustes contemplassem também *o modo de oscilação inter-áreas*.

---

## 6.8.3.3. Estabilizador de Potência do Tipo Potência Acelerante

O estabilizador de potência do tipo potência acelerante, como o próprio nome indica, é um tipo de dispositivo estabilizador que se utiliza da potência acelerante como sinal de entrada. No início, este tipo de sinal adicional não era comum de ser implementado por várias questões técnicas que o inviabilizavam. Porém, a partir de estudos desenvolvidos por Técnicos e Engenheiros da área, esse dispositivo acabou

sendo projetado e fabricado, tendo sido instalado com sucesso em várias outras instalações do SIN e até do exterior.

Como a realimentação do estado é promovida em potência acelerante da máquina em questão, considerando-se a figura 6.34, pode-se escrever que:

$$\Delta G(S) = \Delta p_a(S) = 2H\,S\,\Delta\omega(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.58)$$

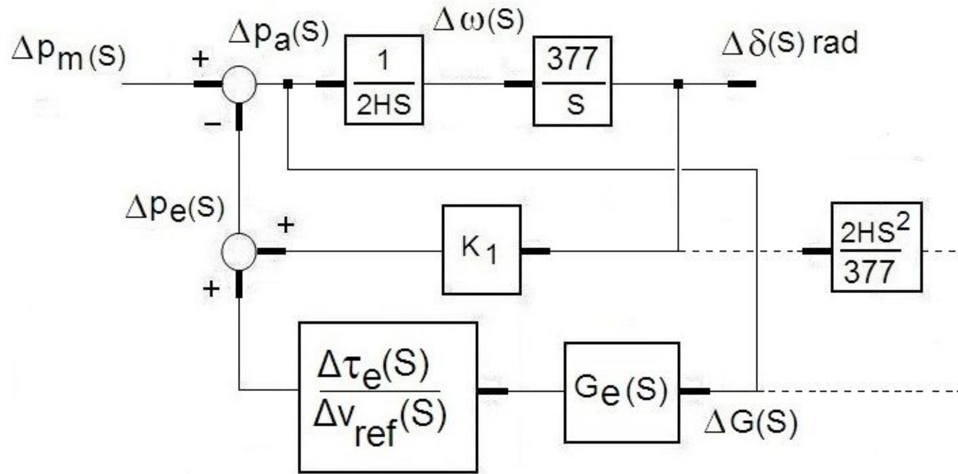



***Figura 6.34 – Estabilizador de Potência Tipo Potência Acelerante***

Utilizando o mesmo raciocínio aplicado no desenvolvimento da teoria do estabilizador de potência do tipo potência elétrica, obtém-se a equação 6.59 que difere da equação 6.54 pelo sinal menos do ganho.

$$G_e(S) = -\frac{K_6}{2H\,K_2 S}\left[1 + \left(\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S + \left(\frac{T_v\,K_3 T'_{do}}{K_v\,K_{th}\,K_3\,K_6}\right)S^2\right] \quad \text{em pu} \qquad (6.59)$$

Deste modo, se assim for considerado o amortecimento puro, levando-se a expressão de $G_e(S)$, da equação 6.59, na equação 6.38 vem que:

$$G_e(S)\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = \frac{1}{2H\,S} \quad \text{em pu} \qquad (6.60)$$

Seguindo, então, o procedimento teórico e supondo que o estabilizador de potência do diagrama da figura 6.34, onde o torque elétrico analisado é proveniente da malha de excitação com o coeficiente de amortecimento $D$ desprezado, vem que a função

de transferência $\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)}$ será dada pela seguinte expressão, se for considerado que se queira aqui também um amortecimento puro:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)} = \frac{\frac{377}{2HS^2}}{1 + \frac{377}{2HS^2}(K_1 + \frac{S}{377})} \quad \text{em pu} \qquad (6.61)$$

A equação 6.61 pode ser mais bem distribuída algebricamente fornecendo a seguinte função de transferência:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)} = \frac{\frac{377}{2H}}{S^2 + \frac{1}{2H}S + \frac{377\,K_1}{2H}} \quad \text{em pu} \qquad (6.62)$$

Observando a equação 6.62, nota-se que o emprego de um estabilizador de potência do tipo potência acelerante resolve a questão da existência de problemas residuais originárias da presença de possíveis componentes contínuas na malha de controle de tensão da máquina síncrona.

### 6.8.3.4. Estabilizador de Potência do Tipo Freqüência Acelerante

O estabilizador de potência do tipo freqüência acelerante, como o próprio nome também indica, é um tipo de dispositivo estabilizador que se utiliza da freqüência acelerante como sinal de entrada.
Como se sabe, o sinal de freqüência da rede nada mais é que um sinal freqüência acelerante e sua aplicação, como sinal de entrada no estabilizador de potência, é direta.

$$\Delta G(S) = \Delta\omega(S) \quad \text{em pu} \qquad (6.63)$$

Utilizando o mesmo raciocínio aplicado nos desenvolvimentos anteriores, obtém-se a equação 6.64.

$$G_e(S) = -\frac{K_6}{K_2}[1 + (\frac{T_v + K_3 T'_{do}}{K_v K_{th} K_3 K_6})S + (\frac{T_v K_3 T'_{do}}{K_v K_{th} K_3 K_6})S^2] \quad \text{em pu} \qquad (6.64)$$

Deste modo, se assim for considerado o amortecimento puro, levando-se a expressão de $G_e(S)$, da equação 6.64, na equação 6.38 vem que:

$$G_e(S)\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = 1 \quad \text{em pu} \qquad (6.65)$$

Seguindo, então, o procedimento teórico e supondo um estabilizador de potência onde o torque elétrico analisado é proveniente da malha de excitação com o coeficiente de amortecimento $D$ desprezado, vem que a função de transferência $\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)}$ será dada pela seguinte expressão, se for considerado que se queira aqui também um amortecimento puro:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)} = \frac{\frac{377}{2HS^2}}{1+\frac{377}{2HS^2}(K_1+\frac{S}{377})} \quad \text{em pu} \qquad (6.66)$$

A equação 6.66 pode ser mais bem distribuída algebricamente fornecendo a seguinte função de transferência:

$$\frac{\Delta\delta(S)}{\Delta p_m(S)} = \frac{\frac{377}{2H}}{S^2+\frac{1}{2H}S+\frac{377K_1}{2H}} \quad \text{em pu} \qquad (6.67)$$

Observando a equação 6.67, nota-se também que o emprego de um estabilizador de potência do tipo freqüência acelerante, de modo semelhante ao caso em que empregou o estabilizador de potência do tipo potência acelerante, resolve a questão da existência de problemas residuais originárias da presença de possíveis componentes contínuas na malha de controle de tensão da máquina síncrona.

As figuras 6.35 e 6.36 mostram a atuação de um estabilizador de potência do tipo potência elétrica para a mesma solicitação, qual seja um degrau na referência de tensão do regulador de tensão, porém no primeiro registro o filtro *reset* fora inibido enquanto no segundo o filtro estava ativo. Nota-se que um pequeno sinal proveniente do regulador de velocidade, por exemplo, afetou de modo negativo o sinal da tensão terminal por conta do problema que foi demonstrado de modo analítico e comprovado na prática.
Embora a teoria mostre o contrário, para os fabricantes, independente do tipo de estabilizador de potência a ser utilizado, a presença do filtro *reset* é *conditio sine qua non*. O ideal é não existir nenhum tipo de sinal residual ou de *off-set* presente no controle.

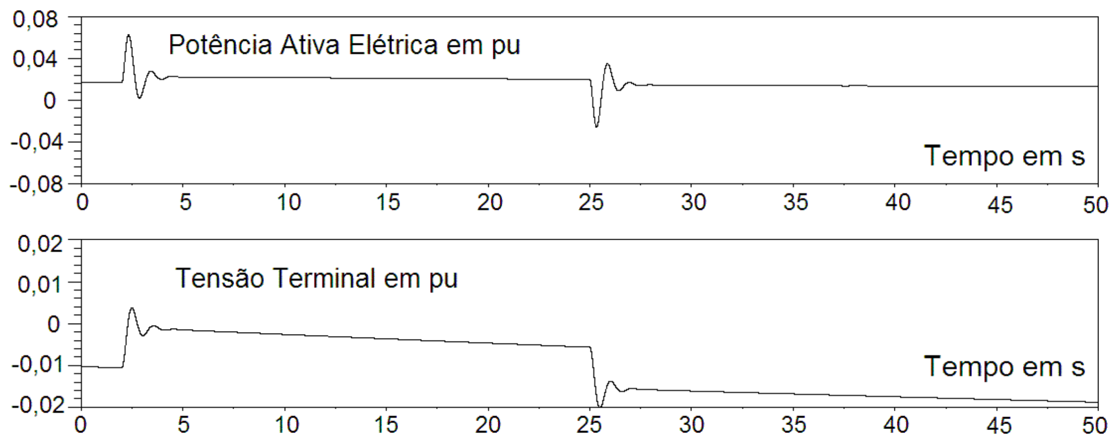



***Figura 6.35 – Resposta ao Degrau na Referência do Sistema de Excitação do Exemplo 6.8 com Estabilizador de Potência do Tipo Potência Elétrica sem o Filtro Reset***

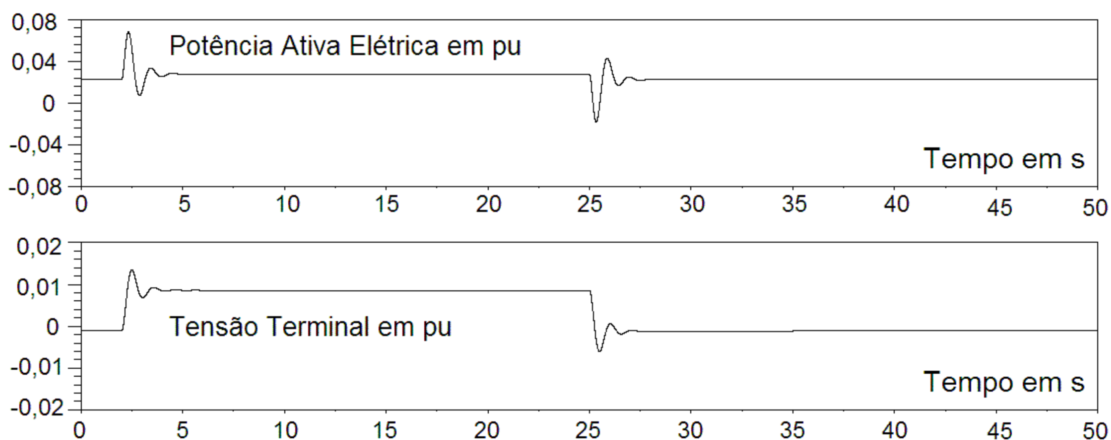



***Figura 6.36 – Resposta ao Degrau na Referência do Sistema de Excitação do Exemplo 6.8 com Estabilizador de Potência do Tipo Potência Elétrica com o Filtro Reset***

## 6.8.3.5. Estabilizador de Potência do Tipo Faixa Larga

Na referência 63, os autores debateram sobre a necessidade de se trabalhar com um estabilizador de potência do tipo potência acelerante e suas vantagens sobre o estabilizador de potência do tipo potência elétrica, além de outras questões pertinentes ao assunto.

Assim como foram apresentadas, muitas dessas questões tiveram sua confirmação em trabalhos de campo em várias instalações de grande porte cujos estabilizadores de potência do tipo potência elétrica acabaram sendo substituídos por estabilizadores de potência do tipo potência acelerante.

Essas questões têm a ver com o que já foi mencionado antes nesse livro. Em uma

das questões levantadas, a referência 67 também confirma um fenômeno que pode ser observado em sistemas dotados de estabilizadores de potência, a amplificação, através da malha de tensão, de oscilações de origem hidráulica. Em ensaios realizados na UHE Emborcação (4 x 298 MW) foi constatada a presença de oscilação hidráulica, provavelmente proveniente do tubo de sucção da turbina, em que as pulsações apresentavam uma componente fundamental da ordem de $0{,}5\ Hz$. Quando o ganho do estabilizador de potência foi elevado, no sentido de se aumentar a capacidade de amortecimento, esbarrou-se nesse problema.
Em relação ao estabilizador de potência do tipo potência acelerante, os artigos listados como referências 24 e 25 trazem no seu bojo um conceito novo aplicado ao assunto.
A proposição de um estabilizador de potência do tipo potência acelerante, em princípio, apresentava um problema associado à medição da potência mecânica da máquina que acabou sendo solucionado com a idéia de sintetização de grandezas afins.
A sintetização da potência acelerante, por exemplo, se daria com a leitura dos valores reais da potência ativa elétrica e da freqüência elétrica da máquina.
A figura 6.37 traz o esquema que foi apresentado nas referências listadas anteriormente para um estabilizador de potência que pode ser designado por estabilizador de potência do tipo freqüência acelerante por sintetização da freqüência elétrica.

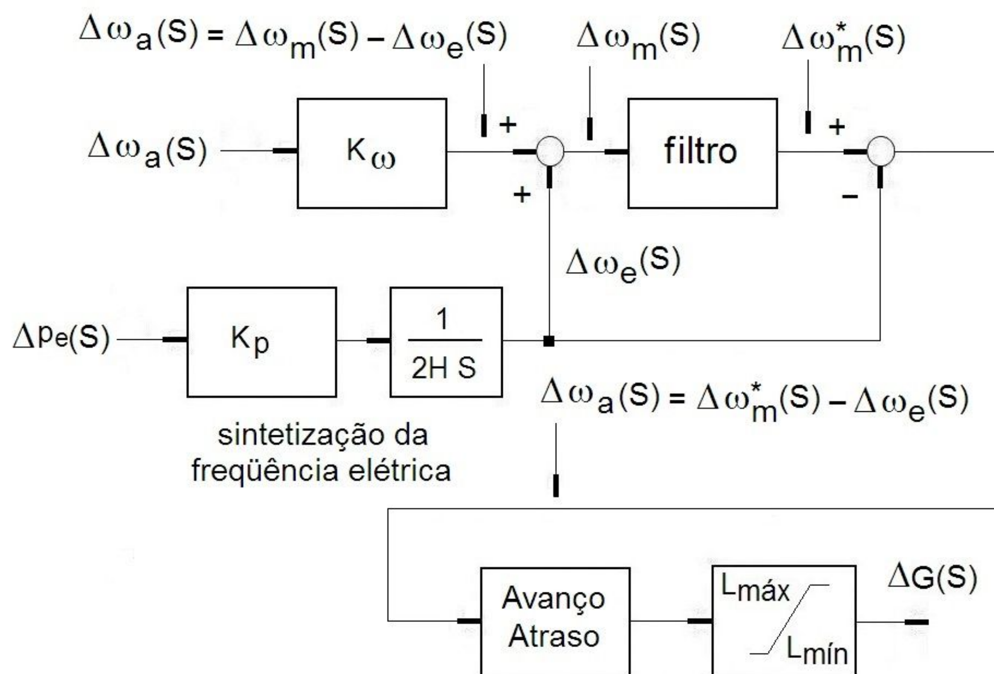



***Figura 6.37 –Estabilizador de Potência Tipo Freqüência Acelerante de Faixa Larga de Atuação***

Na figura 6.37 considerar a seguinte legenda, levando-se em conta a máquina síncrona na qual o estabilizador de potência encontra-se instalado:

$\Delta\omega_a(S)$ : variação do sinal de freqüência acelerante

$\Delta\omega_m(S)$ : variação do sinal de freqüência mecânica

$\Delta\omega^*{}_m(S)$ : variação do sinal de freqüência mecânica filtrada

$\Delta\omega_e(S)$ : variação do sinal de freqüência elétrica

$\Delta p_e(S)$ : variação do sinal de potência elétrica

$K_\omega$ : constante do transdutor de freqüência

$K_p$ : constante do transdutor de potência ativa

$S$ : variável complexa de Laplace

No princípio, os estudiosos do assunto estabilizador de potência *versus* estabilidade do SEP se depararam com uma gama enorme de problemas que estava associada não só ao problema da construção de um novo protótipo de estabilizador de potência, mas também com os problemas advindos dessa aplicação.
Os estabilizadores de potência do tipo potência elétrica eram, e ainda são, utilizados em larga escala, tanto no Brasil quanto na Europa assim como nos EUA e no Canadá, este último dotado de um sistema elétrico semelhante ao SEP daqui.
A questão é que os estabilizadores de potência do tipo potência elétrica são mais limitados em sua atuação respondendo melhor na faixa de freqüência que gira entorno do *modo local de oscilação* para cima.
Já os estabilizadores de potência do tipo freqüência são mais propensos a fornecer uma boa resposta na faixa de freqüência que muitas vezes se confunde com o *modo de oscilação interáreas*, ou seja, respondem melhor numa faixa de freqüência mais baixa.
Segundo a literatura técnica de regulação, em muitos trabalhos realizados, a faixa de valores da freqüência de oscilação do modo local verificada em SEPs é de *0,8* a *2,0 Hz* considerando-se aí as instalações hidrelétricas de potência. Para o *modo de oscilação inter-áreas* de geração essa mesma faixa de valores foi de *0,2* a *0,8 Hz*.

**Nota:** cuidados especiais deverão ser tomados com o chamado *modo de oscilação da excitatriz* cuja faixa de freqüência, normalmente, fica entre *2,5* a *4,0 Hz*. Trata-se da faixa de resposta em alta freqüência, característica particular da excitatriz. É uma região propensa a ressonância daí o cuidado a ser tomado. Em sistemas de excitação estática esse problema também ocorre sempre que se tentar elevar demais o ganho de saída do estabilizador de potência ou mesmo ajustar um determinado sinal de avanço de maneira inadequada. Já houve um caso comprovado no SIN em que a elevação do ganho de saída do estabilizador de potência provocou oscilações da ordem de *5,0 Hz* de maneira crescente e sustentada entre as grandezas da máquina em questão culminando o desligamento pela proteção.

O estabilizador de potência apresentado na figura 6.37 possui algumas melhorias que foram introduzidas nos modelos ofertados pelo fabricante. Entre essas

melhorias, estava à disposição um sistema de filtragem de ruídos no sinal da freqüência mecânica, ruídos esses provenientes da parte hidráulica do conjunto que ao serem eliminados permitiria que se trabalhasse com um sinal puro de freqüência acelerante.
Também foi adotada uma faixa de $\pm 0{,}10\ pu$ ou $\pm 10\%$ para a limitação do sinal de saída do estabilizador de potência. Outros houve por bem adotar uma faixa mais restritiva de $\pm 0{,}05\ pu$ ou $\pm 5\%$. Houve também muita preocupação com algumas características limitantes tais como a modalidade operativa como motor síncrono em vazio, operação como gerador síncrono em região de baixa carga quando se acentuam os efeitos de cavitação ou em região de carga proibitiva quando surgem os fenômenos de oscilação e instabilização devido à presença de vórtex e ressonância. Alguns optaram por disponibilizar um bloco à parte que se ocupava de promover o ligamento e o desligamento do estabilizador de potência em tais situações. Também se preocupou com situações durante as quais a ação do estabilizador não parecia contribuir negativamente para a estabilidade sendo para tal verificado o sinal de saída *versus* o nível de oscilação da tensão terminal da máquina síncrona. Esses foram pontos bastante discutidos entre os estudiosos do assunto que acabaram tendo um bom termo.

---

## EXEMPLO 6.9

É dado na figura 6.38 o diagrama em blocos do sistema de regulação de tensão de um gerador síncrono de grande porte com um estabilizador de potência do tipo potência elétrica que já se encontra ajustado para as condições operacionais que foram inicialmente exigidas. Analisar, a partir dos ajustes promovidos, o torque sincronizante e o torque amortecedor sabendo-se, de ensaios de campo, que a freqüência do *modo inter-áreas de oscilação* medida foi de $0{,}5\ Hz$ e a freqüência do *modo local de oscilação* foi de $1{,}5\ Hz$. Analisar os resultados.
Desprezar o valor da constante de tempo do transdutor de potência.

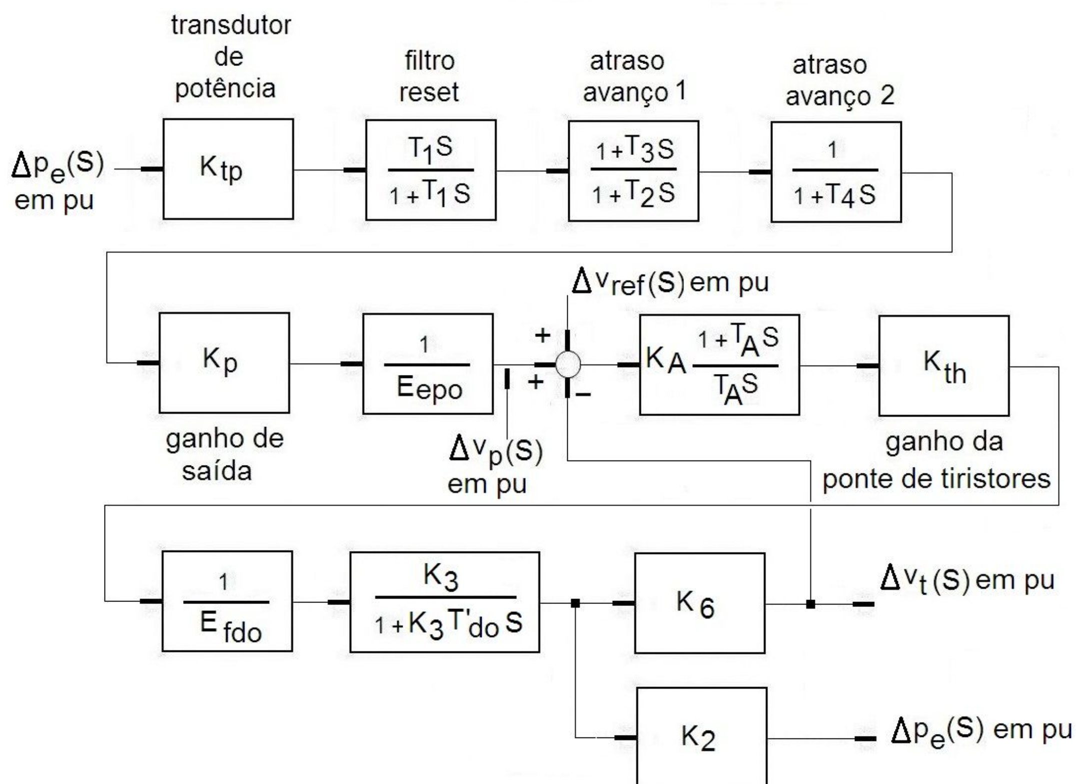



***Figura 6.38 – Sistema de Excitação com Estabilizador de Potência do Exemplo 6.9***

Na figura 6.38 considerar a seguinte legenda:

a) parâmetros de estabilizador de potência:

$K_{tp}$ : ganho do transdutor de potência = -5,433 volts/pu

$T_1$ : constante de tempo do filtro reset = 3,3 s

$T_2$ : constante de tempo de atraso = 0,03 s

$T_3$ : constante de tempo de avanço = 0,06 s

$T_4$ : constante de tempo de atraso = 1,0 s

$T_5$ : constante de tempo de avanço = 0

$K_p$ : ganho intermediário do estabilizador = - 1,0 volts/volts

b) parâmetros do regulador de tensão:

$K_A$ : ganho do regulador PI de tensão = - 49,5 volts/volts

$T_A$ : constante de tempo do regulador PI de tensão = 0,19 s

$K_{th}$ : ganho da ponte de tiristores = - 347,39 volts/volts

c) parâmetros do gerador síncrono e rede elétrica do modelo linearizado:

$K_1 = 2{,}14$ pu/radianos

$K_2 = 1{,}25$ pu/pu

$K_3 = 0{,}46$ pu/pu

$K_4 = 0{,}346$ pu/pu

$2H$ : constante de inércia do conjunto girante $= 10{,}43$ s

d) variáveis de estado envolvidas

$\Delta p_e(S)$ : variação do sinal da potência elétrica

$\Delta v_t(S)$ : variação do sinal da tensão terminal do gerador

$\Delta v_p(S)$ : variação do sinal da tensão de saída do estabilizador

$\Delta v_{ref}(S)$ : variação do sinal de referência da tensão terminal

$S$ : variável complexa de Laplace

e) valores associados aos valores base

$E_{epo}$ : tensão de saída do estabilizador para 1,0 pu da tensão terminal $= 13{,}75$ V

$V_{To}$ : tensão de saída do gerador de 1,0 pu $= 16{,}5$ kV

$E_{fdo}$ : tensão de excitação para 1,0 pu de tensão terminal na linha de entreferro $= 276$ V

$P_o$ : potência nominal de saída do gerador $= 284$ MVA

**Solução:**

No presente exemplo os parâmetros do estabilizador de potência já foram definidos e o que se pede é uma avaliação desses valores para as condições que foram postas. Fica implícito aqui que o estabilizador de potência deverá propiciar uma elevação do torque de amortecimento sem prejudicar o torque sincronizante nas faixas de freqüência tanto do *modo de oscilação local* quanto do modo de *oscilação inter-área*s de geração. Os valores para esses modos de oscilação foram fornecidos no enunciado do problema. Outro ponto importante é verificar se nas condições de baixas freqüências o torque sincronizante não esteja sendo prejudicado.

O modelo sob análise pode ser, resumidamente, comparado ao esquema mostrado na figura 6.39.

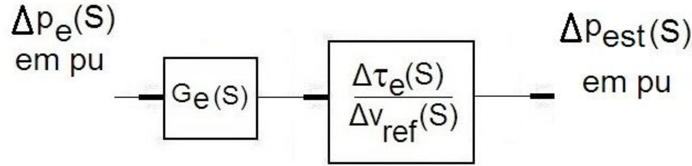



***Figura 6.39 – Esquema Simplificado do Sistema de Excitação com Estabilizador de Potência do Exemplo 6.9***

Na figura 6.39, resolveu-se designar a variável de saída $\Delta p_{est}(S)$ por torque elétrico de estabilização e por $G_e(S)$ a função de transferência do estabilizador de potência. Mesmo sendo considerado um torque de estabilização, situações haverá em que essa saída $\Delta p_{est}(S)$ poderá se apresentar como uma ação desestabilizadora será quando os ajustes poderão ser revistos.

Por inspeção ao diagrama em blocos da figura 6.38, pode-se escrever a seguinte função de transferência de malha aberta para o estabilizador de potência considerando ainda a equação 6.48 relativa ao estabilizador de potência do tipo potência elétrica $\Delta p_e(S) = -2H\,S\,\Delta\omega(S)$ em pu:

$$G_e(S) = -\frac{K_{tp} K_p\, 2H\,S}{E_{epo}} \frac{(ST_1)(1+ST_3)}{(1+ST_1)(1+ST_2)(1+ST_4)} = \frac{\Delta v_p(S)}{\Delta\omega(S)} \qquad \text{em pu}$$

De maneira semelhante à dedução da equação 6.38, pode-se escrever a seguinte função de transferência de malha fechada do processo de excitação em questão:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -K_2 \frac{\frac{K_A K_{th} K_3}{E_{fdo}}\left(\frac{1+ST_A}{ST_A}\right)\left(\frac{1}{1+S\,K_3 T'_{do}}\right)}{1+\frac{K_6 K_A K_{th} K_3}{E_{fdo}}\left(\frac{1+ST_A}{ST_A}\right)\left(\frac{1}{1+S\,K_3 T'_{do}}\right)} = \qquad \text{em pu}$$

$$= -\frac{K_2}{K_6} \frac{1+ST_A}{1+T_A \frac{E_{fdo}+K_6 K_A K_{th} K_3}{K_6 K_A K_{th} K_3} S + \frac{E_{fdo} T_A K_3 T'_{do}}{K_6 K_A K_{th} K_3} S^2}$$

Através da substituição dos valores dados no enunciado do problema nas duas equações obtidas através de cálculo, vem que:

1) para a função de transferência do estabilizador:

$$G_e(S) = -13{,}6 \frac{(1+0{,}06\,S)S^2}{(1+3{,}3S)(1+0{,}03\,S)(1+S)} = \frac{\Delta v_p(S)}{\Delta\omega(S)} \qquad \text{em pu} \qquad (6.68)$$

Com $\Delta p_e(S) = -2H\,S\,\Delta\omega(S)$

2) para a função de transferência do processo:

$$\frac{\Delta\tau_e(S)}{\Delta v_{ref}(S)} = -3{,}6127\ \frac{1+0{,}19\,S}{1+1{,}10\,S+0{,}06169S^2} \cong -3{,}6127\ \frac{1+0{,}19\,S}{(1+1{,}0416S)(1+0{,}059S)}$$

em pu (6.69)

Segue, agora, o procedimento para a obtenção das fórmulas recursivas para cálculo do ângulo e módulo para cada uma das equações 6.68 e 6.69.

Fazendo $S = j\omega$ e $S^2 = -\omega^2$, tem-se que:

1) para a função de transferência do estabilizador tem-se o módulo $\left|G_e(j\omega)\right|$ e a fase $\varphi(j\omega)$:

$$G_e(j\omega) = 13{,}6\,\frac{(1+j\,0{,}06\,\omega)\,\omega^2}{(1+j3{,}3\,\omega)(1+j0{,}03\ \omega)(1+j\,\omega)}$$

em pu (6.70)

$$\left|G_e(j\omega)\right| = 13{,}6\,\omega^2\sqrt{\frac{1+(0{,}06\omega)^2}{[1+(3{,}3\,\omega)^2]\,[1+(0{,}03\omega)^2]\ (1+\omega^2)}}$$

em pu (6.71)

$$\varphi_e(j\omega) = arc\ tg\,(0{,}06\,\omega) - arc\ tg\,(3{,}3\,\omega) - arc\ tg\,(0{,}03\,\omega) - arc\ tg\,\omega$$

em rad (6.72)

2) para a função de transferência do processo tem-se o módulo $\left|\frac{\Delta\tau_e}{\Delta v_{ref}}(j\omega)\right|$ e a fase $\varphi(j\omega)$:

$$\frac{\Delta\tau_e(j\omega)}{\Delta v_{ref}(j\omega)} = -3{,}6127\ \frac{1+j0{,}19\,\omega}{(1+j1{,}0416\,\omega)(1+j0{,}059\,\omega)}$$

em pu (6.73)

$$\left|\frac{\Delta\tau_e}{\Delta v_{ref}}(j\omega)\right| = 3{,}6127\sqrt{\frac{1+(0{,}19\,\omega)^2}{[1+(1{,}0416\,\omega)^2]\,[1+(0{,}059\,\omega)^2]}}$$

em pu (6.74)

$$\varphi(j\omega) = \pi + arc\ tg\,(0{,}19\,\omega) - arc\ tg\,(1{,}0416\,\omega) - arc\ tg\,(0{,}059\,\omega) \quad \text{em rad} \qquad (6.75)$$

O modelo completo para o processo aqui estudado é fornecido pelas equações de ganho e fase 6.74 e 6,75, respectivamente. Essas expressões matemáticas já se encontram com os valores numéricos dados no problema.
De modo semelhante, encontram-se dadas as equações 6.71 e 7.72, equações de ganho e fase, respectivamente, para o modelo do estabilizador de potência utilizado.

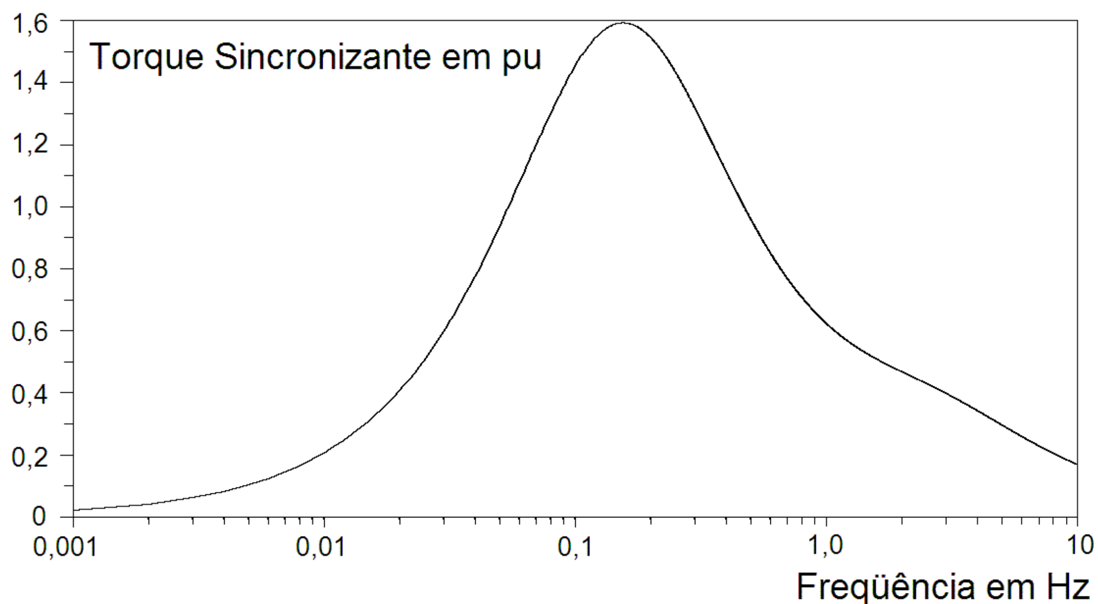



***Figura 6.40 –Torque Sincronizante versus Freqüência***
***Processo do Exemplo 6.9 sem Estabilizador de Potência***

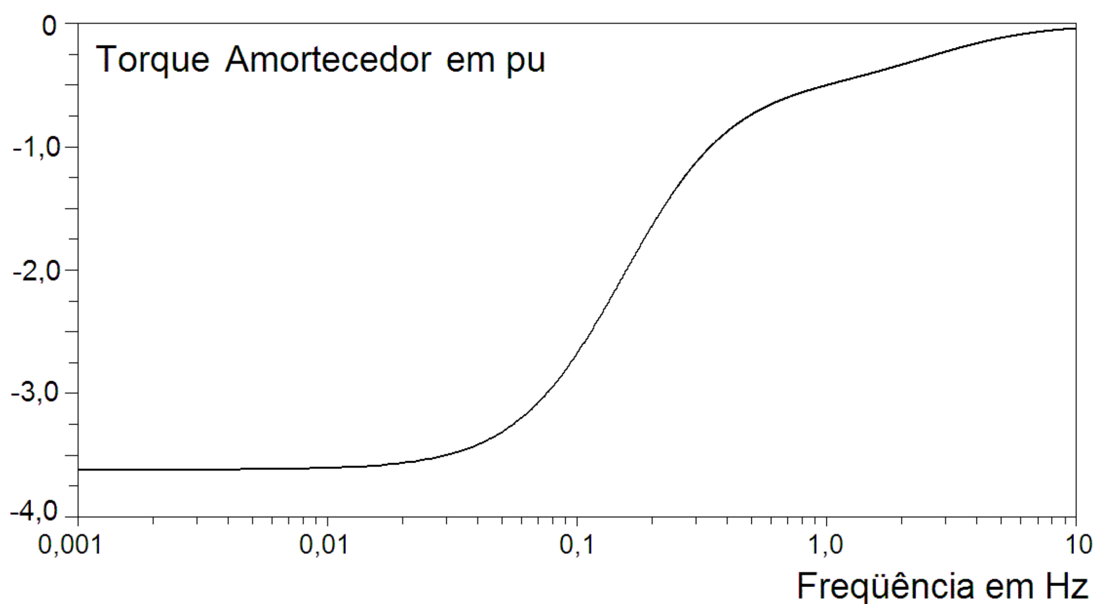


***Figura 6.41 –Torque Amortecedor versus Freqüência Processo do Exemplo 6.9 sem Estabilizador de Potência***

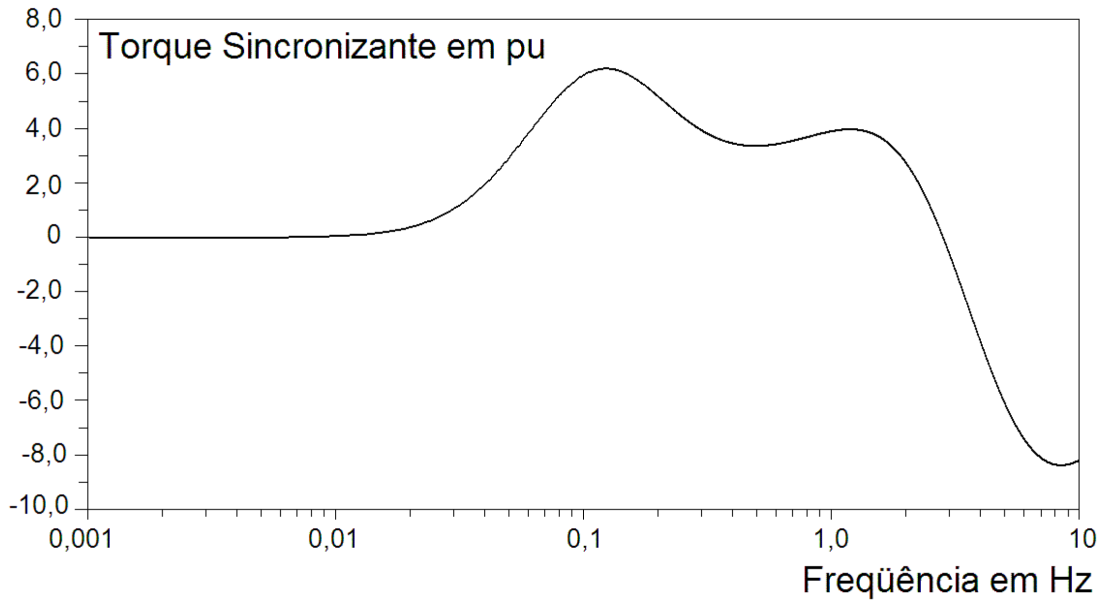



***Figura 6.42 –Torque Sincronizante versus Freqüência Processo com Estabilizador de Potência do Exemplo 6.9 Ajustes Fornecidos***

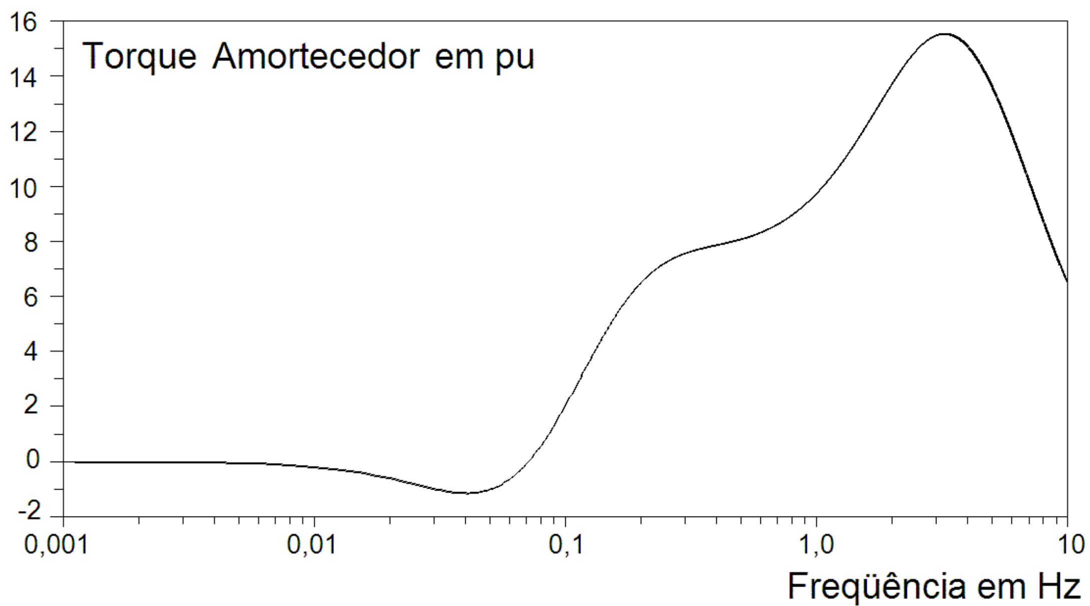



***Figura 6.43 –Torque Amortecedor versus Freqüência Processo com Estabilizador de Potência do Exemplo 6.9 Ajustes Fornecidos***

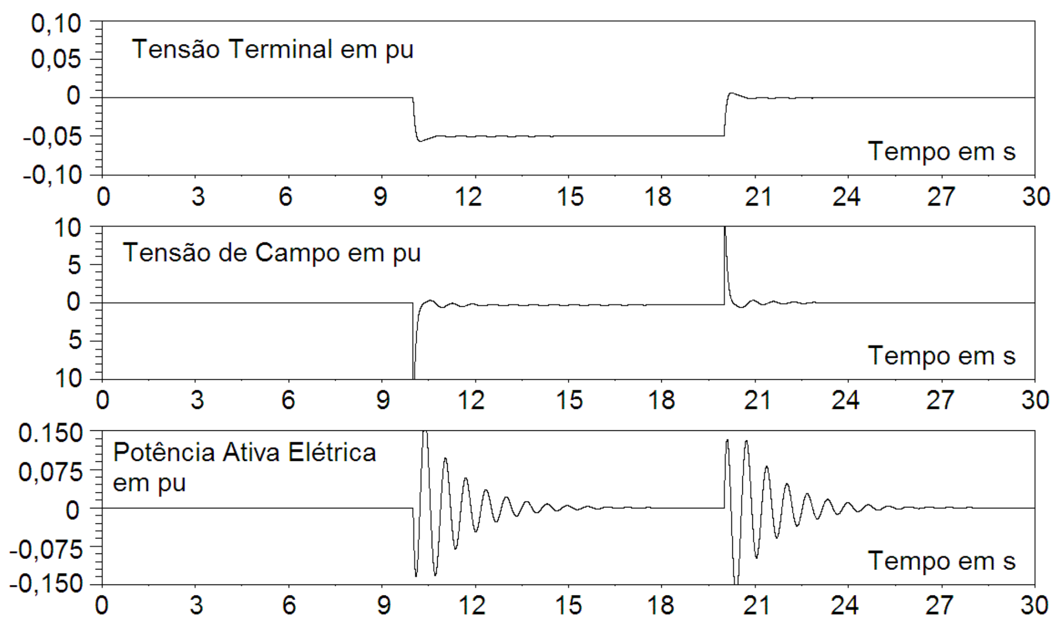



***Figura 6.44 – Resposta ao Degrau na Referência do Regulador de Tensão do Exemplo 6.9 sem Estabilizador de Potência***

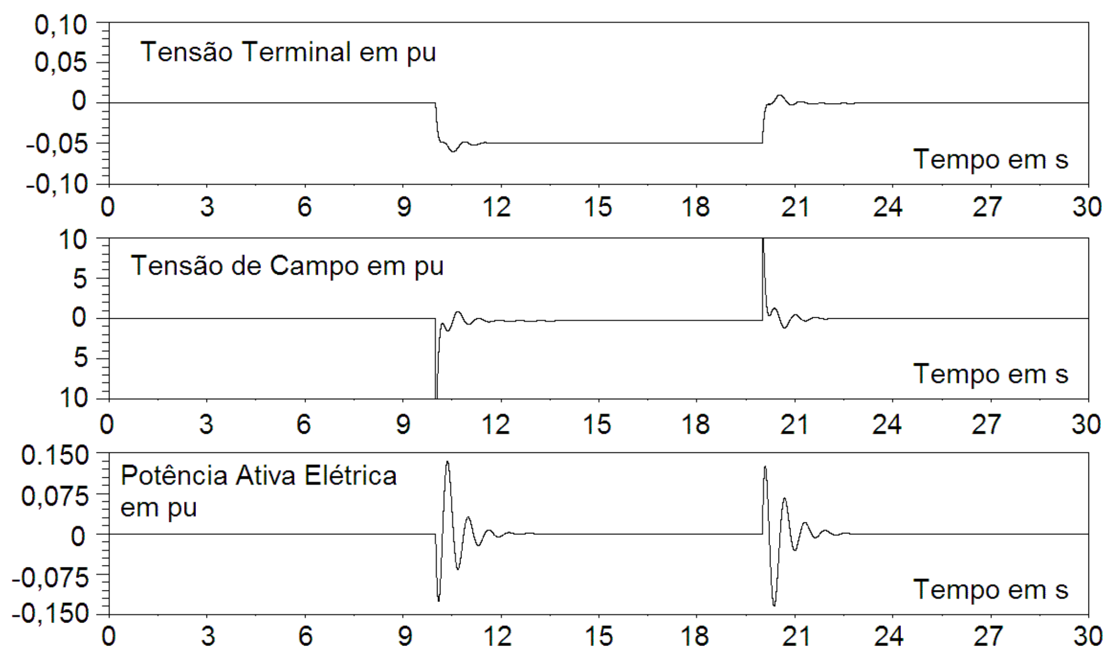



***Figura 6.45 – Resposta ao Degrau na Referência do Regulador de Tensão do Exemplo 6.9 com Estabilizador de Potência Ajustes Fornecidos***

**Nota a respeito do exemplo 3.6:**

Esse exemplo mostrou que é possível, a partir do uso de sinais adicionais estabilizantes, alterar o grau de amortecimento do sistema de controle de tensão de uma máquina síncrona, tanto para melhor quanto para pior, dependendo dos ajustes adotados. Uma esperada melhoria pode ser confirmada neste exemplo, bastando para isso fazer uma comparação entre as condições operativas sem e com o estabilizador de potência em serviço, considerando-se aí os ajustes propostos para esse exemplo durante a fase de comissionamento do equipamento. Comparar as curvas das figuras 6.41 e 6.43, principalmente na faixa de $0,5$ a $1,5\ Hz$. As figuras 6.44 e 6.45, que representam as respostas no tempo do sistema de excitação em carga, mostram o grau de amortecimento verificado no *modo local de oscilação*.
Um dado que pode preocupar o analista é o fato de que o torque sincronizante sofreu uma ligeira queda, principalmente na região das baixas freqüências, porém isso não deve ser visto como um grande problema. Uma simples comparação entre as curvas das figuras 6.40 e 6.42 evidencia esse fato, mas também mostra que em grande parte da faixa de $0,5$ a $1,5\ Hz$ o torque sincronizante sofreu uma elevação significativa.

---

**Nota:** como se sabe, o segredo do sucesso na utilização de um estabilizador de potência, basicamente, está no ajuste adequado do bloco atraso-avanço ou *lead-lag* do dispositivo.
Muitos outros detalhes, tais como as condições de desligamento do estabilizador ou mesmo o seu religamento, entre outros, foram aqui tratados, porém a alma do estabilizador de potência é mesmo o bloco atraso-avanço, quanto a isso não há dúvidas.
O que se pode dizer é que, após extensas pesquisas, ensaios de campo e análises, os estudiosos e Engenheiros da área concluíram que o ideal é que o estabilizador de potência apresente uma faixa determinada de atuação. Esta faixa deve compreender um valor inferior associado à freqüência entorno *do modo de oscilação inter-áreas* de geração e um valor superior associado ao *modo local de oscilação*. Isso quer dizer que o estabilizador de potência deverá ser ativo nessa faixa de freqüência de modo a introduzir, no sistema de controle de tensão da máquina síncrona, valores positivos tanto do torque sincronizante quanto do torque amortecedor.

## 6.9. Exercícios Propostos

**1** Explicar, fisicamente, a relação entre os parâmetros $K_1 - K_2 K_3 K_4 > 0$ em pu, mostrada no item 5.6.1, como uma condição de estabilidade a ser verificada num sistema de controle de tensão de uma máquina síncrona.

**2.** Promover a análise de estabilidade do um sistema de controle cuja equação característica é dada pelo polinômio $D(S) = S^4 + 3S^3 + 3S^4 + 3s + 2$.
Descobrir a particularidade desse tipo de sistema.

**3.** Na teoria existem dois conceitos importantes aplicados aos sistemas de controle, o conceito de *controlabilidade* e o conceito de *observabilidade*. Analisar, através da literatura técnica, ambos os conceitos e aplicá-los à planta que foi apresentada no sistema no exemplo 6.2 comprovando tais conceitos. Usar todos os dados do exemplo citado.

**4.** Considerando-se o exemplo 6.9, estudar a possibilidade da substituição do estabilizador de potência do tipo potência elétrica pelo estabilizador de potência do tipo potência acelerante cuja topologia foi mostrada na figura 6.37. Em relação ao estabilizador, compor todos os arranjos que forem necessários para a sua consecução. Consultar, para tal, a literatura técnica sobre o assunto.
Analisar os resultados comparando-os com aqueles obtidos no exemplo 6.9.

**5.** Como se sabe, o segredo do sucesso na utilização de um estabilizador de potência, basicamente, está no ajuste adequado do bloco atraso-avanço ou *lead-lag*. Estudar a resposta em freqüência considerando-se os três tipos de função de transferência para o bloco atraso-avanço utilizado no estabilizador de potência do sistema de excitação e controle de uma máquina síncrona movida por uma turbina do tipo Francis.
Qual dos três seria mais bem utilizado? Por quê?

a) $\frac{1+0{,}06S}{(1+0{,}03S)(1+S)}$

b) $\frac{1+0{,}6S}{(1+0{,}03S)(1+S)}$

c) $\frac{(1+0{,}03S)^2}{(1+0{,}003S)^2\,(1+0{,}001S)^2}$

# REFERÊNCIAS

## Livros Publicados


1. **P. M. Anderson & A. A. Fouad**

   Power System Control And Stability,
   The Iowa State University Press, Ames, Iowa, USA, 1982.

2. **Yao. Nan Yu**

   Electric Power System Dynamics,
   Academic Press, New York, USA, 1983.

3. **E. W. Kimbark**

   Synchronous Machine – Vol III,
   Dover publications Inc., New York, USA, 1956.

4. **L. K. Kirchmayer**

   Economic Control of Interconnected Systems,
   John Wiley & Sons Inc. Publishers, New York, USA, 1959.

5. **O. I. Elgerd**

   Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica,
   Editora Mc Graw - Hill do Brasil Ltda, São Paulo, SP, 1976.

6. **S. B. Crary**

Power System Stability, Vols I – II,
John wiley & Sons Inc.

7. **A. E. Fitzgerald – JR. Kingsley & A. Kusko**

Electric Machinery.
The Mc Graw - Hill, Inc., New York, USA, 1961,

8. **J. J. D'Azzo & C. H. Houpis**

Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares.
Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brasil, 1975.

9. **E. Clark**

Circuit Analysis Of A-C Power Systems Vols I – II,
John Wiley & Sons Inc., London, Chapman & Hall LTD., 1943.

10. **J. Feinstein**

Teoria de Controle Enfoque por Variáveis de Estado.
Editora Campus / Eletrobrás / EFEI, Rio de Janeiro, 1979.

11. **J. Milman & C. C. Halkias**

Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems
McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo,Japan 1972.

12. **K. Ogata**

Modern Control Engineering
University of Minesota - USA.
Prentice – Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1970.

13. **M. A. Pai**

Power System Stability Analysis by the Direct Method of Lyapunov, Vol 3
North-Holland Publishing Company, Amsterdan, Netherlands, 1981.

14. **L. R. Gomes**

Aplicação da Teoria do Controle Ótimo Via Realimentação de Estado aos Sistemas de Regulação e Controle de Instalações Hidroelétricas.
Dissertação de Mestrado
Escola Federal de Engenharia de Itajubá, EFEI
Pró-Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Itajubá, Jul / 1987.

**15. R. Bran & Z. de Souza**

Máquinas de Fluxo, Turbinas, Bombas e Ventiladores
Ao Livro Técnico SA / EFEI, Rio de Janeiro, 1980.

**16. R. Miller**

Power System Operation, The Western Systems Coordinating Council,
McGraw-Hill Book Company, 1970.

**17. J. M. Smith**

Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists,
A Willey – Interscience Publication, 1977.

**18. M. R. Spiegel**

Mathematical Handbook of Formulas and Tables,
McGraw-Hill Book Company, USA, 1964.

**19. J. A. Edminister**

Circuitos Elétricos,
Editora Mc Graw - Hill do Brasil Ltda, São Paulo, SP, 1978.

**20. G. Birkhoff & S. MacLane**

Álbebra Moderna Básica,
Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, RJ, 1977.

**21. R. D. Fuchs**

Transmissão de Energia Elétrica,
Livros Técnicos e Científicos Editora SA, Rio de Janeiro, RJ, 1977.

**Artigos e Publicações**

**22. D. G. Ramey & J. W. Skooglund**

Detailed Hydrogovernor Representation For System Stability Studies,
IEEE Transactions on PAS, Vol PAS, 89 nº 1, Jan / 1970.

**23. J. H. Walker**

Operating Characteristics of Salient - Pole Machines.
British Thompson - Houston Co. LTD, England, Paper 1411, Aug / 1952,

**24. F.P. de Mello, L. N. Hannett & J. M. Undrill**

Practical Approaches To Supplementary Stabilizing From Accelerating Power,
IEEE Transactions PAS, Vol PAS 97, nº 5, Sept / 1978.

**25. J. M. C. Soares, F. H. Pons, F. Reichert & D. O. Reis**

Projeto e Ensaios de um Sinal Adicional Estabilizador de Uso Geral.
IX Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica,
Belo Horizonte, MG Grupo X GOP, 1987.

**26. N. Martins**

Análise e Controle de Oscilações Eletromecânicas Pouco Amortecidas em Sistemas de Potência,
1º Encontro Argentino - Brasileiro Sobre Estabilidade de Sistemas de Potência. CEPEL, RJ, 1987.

**27. L.R. Gomes & C. H. F. da Silva**

Medições em Reguladores de Velocidade de Turbinas Hidráulicas, Revista SODEBRAS, Vol 8, Nº. 94, PP 72-78 Outubro 2013.

**28. L. R. Gomes & C. H. F. da Silva**

Análise do Comportamento do Regulador de Velocidade de Turbinas Hidráulicas, Revista SODEBRAS, Vol 8, Nº. 94, PP 84-91 Outubro 2013.

**29. L. R. Gomes & C. H. F. da Silva**

Equacionamento Básico para Modelagem de Sistemas de Excitação de Máquinas Síncronas que Empregam Grupo com Excitatrizes Rotativas,
Revista SODEBRAS, Vol 8, Nº. 91, PP 84-91, Julho 2013.

**30. G. Hutarew**

Test on Turbine Governing System – Parts I, II and III,
Water Power Publication, Pages 157-248, Apr / 1963.

**31. H. Mokarzel & E. M. M. Negrisolli**

Dinâmica e Controle dos Sistemas Elétricos.
Publicação FUPAI / Escola Federal de Engenharia de Itajubá, 1979,

**32. S. R. Carpi Jr.**

Sistemas de Excitação Siemens: Confiabilidade e Versatilidade no Controle da Tensão de Geradores Síncronos.
Revista Siemens Vol IX, Fev / 1989.

**33. Plant Dynamics And Control Analysis**

IEEE Transactions PAS, Paper 63 -1401, Vol S82, Pages 664 - 678, 1963.

**34. C. Concordia & L. K. Kirchmayer**

Tie-Line Power and Frequency Control of Electric Power System.
AIEE Transactions PAS, Part III A Vol 73, Pages 131-146, 1954 and Vol 72, pages 562-572, 1953.

**35. C. Concordia, F. P. de Mello, L. K. Kirchmayer & R. P. Schulz**

Effect of Prime-Mover Response and Governing Characteristics on System Dynamic Performance.
American Power Conference, Apr / 1966.

**36. R. Oldenburger & J. Donelson Jr.**

Dynamic Response of Hydro Plant.
AIEE Transactions Part III, Vol PAS 81, Pages 403-419, 1962.

**37. F. P. de Mello, R. J. Mills & W. F. B'Rells**

Automatic Generation Control Part I (Page 710) and Pat II (Page 716).
IEEE Transactions PAS, Mar / Apr 1973.

**38. L. M. Hovey**

Optimum Adjustment of Hydro Governors on Manitoba Hydro System.
AIEE Transactions PAS, Part II, Vol PAS 81, Pages 581-587, 1962.

**39. J. M. Undrill & J. L. Woodward**

Non-Linear Hydro Governing Model and Improved Calculation For Determining Temporary Droop.
IEEE Transactions PAS, Vol. PAS 86, nº 4, Apr / 1967.

**40. C. C. Young & R. M. Webler**

A New Digital Computer Program For Predicting Dynamic Performance of Electric Power Systems.
Pica Conference Record, Pages 21-30, 1967.

**41. L. M. Hovey and L. A. Bateman**

Speed - Regulation on a Hydro Station Supplying an Isolated Lo.
AIEE Transactions PAS Part III, Vol 81, Pages 364-371, 1962.

**42. F. R. Schleif & L. M. Johnstone**

Experiences With Hydraulic Prime Mover Controls.
Asme Transactions - Journal of Engineering For Power
Pages 189-193, Apr / 1961.

**43. R. Oldenburger & R. E. Goodson**

Hydraulic Line Dynamics, Proceedings of The 2nd / Fac Conference.
Paper 439 - 4, 1963.

**44. M. Leum**

The Development and Field Experience of a Transistor Electric Governor for Hydro Turbines. IEEE Transactions PAS Vol. PAS 85, Pages 393 – 402, Apr / 1966.

**45. F. R. Schleif & A.B. Wilbor**

The Coordination of Hydraulic Turbine Governors for Power System Operation.
IEEE Transactions PAS, Vol. PAS 85, Pages 750-756, Jul / 1966.

**46. C. L. Avery**

Field Adjustment of Hydraulic Turbine Governors.
Asme Transactions – Journal of Engineering for Power.
Pages 61-68, Jan / 1961.

**47. H. M. Stone**

Field Testing and Adjusting of Hydraulic Turbine Generator to Improve System Regulation.
Asme Transactions – Journal of Engineering for Power.
Pages 53-60 – Jan / 1961.

**48. P. Almeras**

Influence of Water Inertia on the Stability of Operation of a Hydro Electric System.
Engineers Digest – Vol. 4 – Pages 9-12, 55-61, 1947.

**49. F. R. Schleif, H. D. Hunkins, E. E. Hattan & W. B. Gish**

Control of Rotating Exciters for Power System Damping Pilot Applications and Experience.
IEEE Transactions PAS – Vol. PAS – 88 nº 8 Pages 1250-1266 Aug / 1969.

**50. IEEE Committee Report**

Computer Representation of Excitation Systems.
IEEE Transactions PAS, Paper 31 TP 67-424, Vol. PAS 87 nº6,Pages 1460-

1464 Jun / 1968.

**51. K. R. Mc Clymont, G. Manchur, R. J. Ross & R. J. Wilson**

Experience With High-Speed Rectifier Excitation Systems.
IEEE Transactions PAS, Vol. PAS 87, nº6, Pages 1464-1468, Jun / 1968.

**52. H. M. Valgas, R. J. G. C. Silva, L. R. Gomes & P. M. P. Paiva**

Experience on Modeling, Simulation and Validation of Control Systems of Hydroelectric Plants, Institute of Electrical and Electronics Engineers - IEEE / INDUSCON, São Paulo, 1992.

**53. Software Free SCILAB©, versão scilab - 4.1.1**

Consortium Scilab (INRIA, ENPC), Institut Nationale de Researche em Informatique et en Automatique, French Government, Copyright (c) 1989-2007.

**54. F. P. de Mello, R.J. Koessler et all**

Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies, Work Group on Prime Mover and Energy Supply Models for System Dynamic Performance Studies, Transactions on Power Systems, Vol 7, nº. 1, Feb 1992.

**55. W. D. T. Davies**

On the Analog Simulation of a Pure Time Delay,
Simulation Councils Inc. Publication, Pages 161-165, May 1972.

**56. L.R. Gomes & CHF da Silva**

Efeito da Banda-Morta no Comportamento de Reguladores de Velocidade de Turbinas Hidráulicas, Revista SODEBRAS, Vol 8, Nº. 91, PP 77-83, Julho 2013.

**57. W. A. Lewis**

A Basic Analysis of Synchronous Machines Pt. 1 , AIEE Transactions, PAS 77: Pages 436-455, 1958.

**58. L. R. Gomes & CHF da Silva**

Proteção de Sobretensão Proteção de Volts-Hertz e Limitação de Volts-Hertz em Máquinas Síncronas, Revista SODEBRAS, Vol 9, Nº. 102, PP 31-38, Junho 2014.

**59. L. R. Gomes**

Shannon's Theorem, Publicação Interna, LRG-ME 006/2012, October 2012.

**60. V. Vittal, N. Bhatia & A.A. Fouad**

Analysis of Inter-area Mode Phenomenon in Power Systems Following Large Disturbances, IEEE Transactions on PAS, Vol PAS 6, nº 4, Nov / 1991.

**61. Dynamic Response for a Hydroelectric Plant**

AIEE Winter General Meeting, Paper 62 -167, Jan-Feb 1962.

**62. AEG Progress – Special Issue – Regulation and Control**

Allgemeine Elektricitats - Gesellschaft, Vol nº 4, Berlin, 1955.

**63. N. Zeni Jr. & L. Thadeu O. da L.**

Modificações Introduzidas no Estabilizador de Sistema de Potência da Usina Hidrelétrica de Itaúba - VII SNPTE, Sub-Grupo Máquinas Rotativas, SGM, Brasília, Brasil, 1983.

**64. T. Hillesland, F. R. Schleif, T. W. Eberly, W. B. Gish, J. N. Haroian, W. E.**

**Hein, A. Klopfenstein, J. F. Luini. G. R. Meloy, J, Schmitt & F. O. Wald**
Western Systems Coordinating Council Control Work Group
Manual of Test Procedure for Power Systm Stabilizers - USA, 1976.

**Citações de Artigos e Publicações**

**65. J. J. Distefano, A. R. Stubberud & I. J. Williams**

Sistema de Retroação e Controle, Editora Mc Graw-Hill do Brasil , 1972, cita no realização do exemplo 11.26, página 267, da necessidade de se conhecer o teorema de Cauchy para funções de variáveis complexas que foi mencionado na referência 59 deste livro.

**66. P. M. Anderson & A. A. Fouad**

Power System Control And Stability,
The Iowa State University Press, Ames, Iowa, USA, 1982, cita artigo **M. K. El-Sherbiny & D. M. Metha**, Dynamic System Stability, Pt. 1, IEEE Transactions Vol PAS 92, Pages 1538-46, Sep-Oct 1973 sobre a variação dos parâmetros $K_i$ , com $i = 1,2,3,4,5,6$ em função do carregamento da máquina síncrona.

**Artigos e Publicações Internas**

**67. L. R. Gomes**

**Estabilizador de Potência por Potência Ativa Elétrica, relatório interno Cemig,** 01.124-GI/US6-034, 1988.

**68. C. A. D. Coelho**

Apostila do Curso Modelagem de Sistemas Lineares, Curso de Mestrado, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, EFEI, 1983 e Curso da Fundação de Pesquisa e Assessoramento à Indústria, FUPAI, 1985.

**Sobre os autores:**

**Luiz Renato Gomes :** Engenheiro Eletricista formado pela Escola Federal de Engenharia de Itajubá, EFEI, em 1977, Mestre de Ciências em Engenharia Elétrica pela mesma instituição em 1987, natural de Brazópolis, MG, empregado aposentado da Companhia Energética de Minas Gerais - CEMIG, especialista em controle automático, regulação de velocidade de turbinas hidráulicas e sistemas de excitação de máquinas síncronas.

**Cláudio Homero Ferreira da Silva :** Engenheiro Químico formado pela Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia, UFU, em 2000, Mestre em Ciências em 2002 e Ph.D em 2009, ambos em Engenharia Química pela mesma instituição, natural de Araguari, MG, empregado da Companhia Energética de Minas Gerais - CEMIG, Engenheiro de Tecnologia e especialista em controle automático de processos.

**Sobre o livro:** O livro versa sobre regulação de velocidade de turbinas hidráulicas e sistemas de excitação de máquinas síncronas, focando as equações de transferência dos processos envolvidos tanto no plano temporal quanto no plano da freqüência mostrando os sistemas de controle, as respostas tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência, exemplos práticos com modelos além de vários exercícios resolvidos e propostos. Livro destinado a alunos de graduação, pós-graduação e profissionais que lidam com sistemas automáticos de controle e regulação em instalações de energia elétrica.